Problemas resueltos de «Corriente Alterna»

1) Una bobina de 100 espiras, de 20 cm^2 cada una, gira a 50 r.p.m. en un campo magnético uniforme de 1 T. a) Escribir la expresión de la fem inducida e indicar su valor eficaz; b) ¿cuál sería la intensidad si la resistencia del circuito es de 20 ohmios?. [a) $\varepsilon = \frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\left(\frac{10\pi}{6}t\right)V$; $\varepsilon_{ef} = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}}V$; b) $I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{60\sqrt{2}}A$]

Solución:

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi}{dt} = -N\frac{d}{dt}\left[BS\cos(\omega t)\right] = NBS\omega\operatorname{sen}(\omega t) = \varepsilon_m\operatorname{sen}(\omega t) = \varepsilon_m\operatorname{sen}(2\pi\nu t)$$

$$\varepsilon = NBS\omega\operatorname{sen}(\omega t) = 100\times 1T\times 20\,cm^2\cdot\frac{10^{-4}\,m^2}{1cm^2}\times\frac{100\pi}{60}\frac{rad}{s}\operatorname{sen}\left(\frac{100\pi}{60}t\right) = \frac{\pi}{3}V\operatorname{sen}\left(\frac{10\pi}{6}t\right)$$

$$\varepsilon_{ef} = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}}V$$

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\frac{\pi}{3}V\operatorname{sen}\left(\frac{10\pi}{6}t\right)}{20\Omega} = \frac{\pi}{60}A\operatorname{sen}\left(\frac{10\pi}{6}t\right)\quad\left\{I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{60\sqrt{2}}A\right.$$

2) Un circuito serie de una autoinducción, L = 0,1 H, y una resistencia, R = 100 Ω, está alimentado por un generador cuya tensión eficaz es de 4 V y cuya frecuencia es de 1.000 Hz. Calcule: a) el valor máximo de la caída de tensión en la autoinducción y el desfase entre la tensión del generador y la intensidad; b) la capacidad de un condensador, conectado en serie con R y L, para que la intensidad sea máxima. [a) 5,586 V; la tensión adelanta 81º; I_{ef} = 6,287 mA; b) 2,533·10^{-7} F]

Solución:

$$v + v_L = iR\quad\{v = V_m\operatorname{sen}\omega t\}\quad\left\{v_L = -L\frac{di}{dt}\right\}\quad i = I_m\operatorname{sen}(\omega t+\phi)$$

$$\begin{cases}V_m\operatorname{sen}(\omega t) = I_mR\operatorname{sen}(\omega t+\phi) + LI_m\omega\cos(\omega t+\phi)\\ V_m\operatorname{sen}(\omega t) = I_mR\left[\operatorname{sen}(\omega t)\cos\phi + \cos(\omega t)\operatorname{sen}\phi\right] + I_mL\omega\left[\cos(\omega t)\cos\phi - \operatorname{sen}(\omega t)\operatorname{sen}\phi\right]\\ V_m\operatorname{sen}(\omega t) = \operatorname{sen}\omega t\left[I_mR\cos\phi - I_mL\omega\operatorname{sen}\phi\right] + \cos\omega t\left[I_mR\operatorname{sen}\phi + I_mL\omega\cos\phi\right]\end{cases}$$

$$\left\{\begin{aligned}V_m &= I_mR\cos\phi - I_mL\omega\operatorname{sen}\phi\\ 0 &= I_mR\operatorname{sen}\phi + I_mL\omega\cos\phi\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}(V_m)^2 &= \left(I_mR\cos\phi - I_mL\omega\operatorname{sen}\phi\right)^2\\ 0 &= \left(I_mR\operatorname{sen}\phi + I_mL\omega\cos\phi\right)^2\end{aligned}\right\}$$

$$\left\{\begin{aligned}(V_m)^2 &= (I_mR)^2\cos^2\phi + (I_mL\omega)^2\operatorname{sen}^2\phi - 2\left(I_mR\cos\phi\right)\left(I_mL\omega\operatorname{sen}\phi\right)\\ 0 &= (I_mR)^2\operatorname{sen}^2\phi + (I_mL\omega)^2\cos^2\phi + 2\left(I_mR\operatorname{sen}\phi\right)\left(I_mL\omega\cos\phi\right)\end{aligned}\right\}$$

$$(V_m)^2 = (I_mR)^2 + (I_mL\omega)^2 = I_m^2\left(R^2 + L^2\omega^2\right)$$

$$V_m = I_m\sqrt{R^2+L^2\omega^2}\quad\left\{\begin{aligned}X_L &= L\omega\\ Z &= \sqrt{R^2+L^2\omega^2}\end{aligned}\right\}\quad V_m = I_m\sqrt{R^2+X_L^2} = I_mZ$$

$$v_L = -L\frac{di}{dt} = -L\omega I_m \cos(\omega t + \phi) \quad \left\{ V_{L(máx)} = L\omega I_m = L\omega \frac{V_m}{Z} = L\omega \frac{V_{ef}\sqrt{2}}{Z} \right.$$

$$Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} = \sqrt{(100\,\Omega)^2 + (-628,318\,\Omega)^2} = 636,23\,\Omega$$

$$V_{L(máx)} = 628,318\,\Omega \times \frac{4\,V \times \sqrt{2}}{636,23\,\Omega} = 5,5865\,V$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = I_m R \operatorname{sen}\phi + I_m X_L \cos\phi \\ \tan\phi = \dfrac{\operatorname{sen}\phi}{\cos\phi} = \dfrac{-I_m X_L}{I_m R} = \dfrac{-X_L}{R} \end{array} \right\} \quad \phi = \arctan\left(\frac{-X_L}{R}\right) = \arctan\left(\frac{-628,318\,\Omega}{100\,\Omega}\right) = -80,956^o$$

$$I_{ef} = \frac{V_{ef}}{Z} = \frac{4\,V}{636,23\,\Omega} = 0,006287\,A$$

$$\{RCL\} \quad I_{ef} = \frac{V_{ef}}{Z} = \frac{V_{ef}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \qquad \{X_L = X_C\} \Rightarrow \left\{ I_{ef(máx)} = \frac{V_{ef}}{\sqrt{R^2}} = \frac{V_{ef}}{R} \right.$$

$$X_L = X_C \quad \left\{ L\omega = \frac{1}{C\omega} \right\} \quad C = \frac{1}{L\omega^2} = \frac{1}{0,1\,H \times (2\pi\,rad \times 1.000\,Hz)^2} = 2,533 \cdot 10^{-7}\,F$$

3) Un circuito serie RCL está conectado a un alternador de frecuencia 50 Hz y 120 V de tensión máxima. Calcula: a) la inductancia, la capacitancia y la impedancia del circuito; b) el valor instantáneo de la intensidad. Datos: R = 20 Ω; L = 1 H; C = $1,0\cdot10^{-5}$ F. [a) X_L = 314,16 Ω; X_C = 318,31 Ω; Z = 20,426 Ω; b) $i = 5,87\operatorname{sen}(2\pi 50t + 0,20)$]

Solución:

$$X_L = L\omega = 1\,H \times 2\pi\,rad \times 50\,Hz = 314,16\,\Omega$$

$$X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{1,0\cdot10^{-5}\,F \times 2\pi\,rad \times 50\,Hz} = 318,31\,\Omega$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(20\,\Omega)^2 + (314,16\,\Omega - 318,31\,\Omega)^2} = 20,426\,\Omega$$

La fem alterna aplicada y la corriente alterna resultante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \varepsilon_m \operatorname{sen}(\omega t) \\ i = I_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \end{array} \right\} \quad I_m = \frac{\varepsilon_m}{Z} = \frac{120\,V}{20,426\,\Omega} = 5,87\,A$$

$$\phi = \arctan\left(-\frac{X_L - X_C}{R}\right) = \arctan\left(-\frac{314,16\,\Omega - 318,31\,\Omega}{20\,\Omega}\right) = 11,72^o = 0,20\,rad$$

$$\varepsilon = 120\operatorname{sen}(2\pi 50t) \quad \left\{ i = 5,87\operatorname{sen}(2\pi 50t + 0,20) \right.$$

4) Dos elementos A y B se conectan en serie a un generador de corriente alterna. Indicar el tipo de elementos y calcular sus valores si el voltaje entre los extremos de los dos y la intensidad vienen dados por las ecuaciones: $v = 100\,\text{sen}\left(50t + \frac{3\pi}{8}\right)\text{V}$; $i = 20\,\text{sen}\left(50t + \frac{\pi}{8}\right)\text{A}$. [L = 0,01 H; R = 3,5 Ω]

Solución:

El voltaje está adelantado respecto a la intensidad en un ángulo menor de 90º lo que nos indica que los dos elementos han de ser una R y una L:

$$\cos\phi = \cos\left(\tfrac{3\pi}{8} - \tfrac{\pi}{8}\right) = \cos\tfrac{2\pi}{8} \quad \left\{ R = Z\cos\phi = \frac{V_m}{I_m}\cos\phi = \frac{100\,\text{V}}{20\,\Omega}\cos\tfrac{2\pi}{8} = \right.$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \frac{R}{\cos\phi}$$

$$X_L = L\omega = \sqrt{Z^2 - R^2} \quad \left\{ L = \frac{X_L}{\omega} \right.$$

5) En un circuito serie RCL los valores eficaces de la intensidad y del voltaje son 10 A y 300 V y la intensidad está retrasada respecto de la tensión 60º. Calcule: a) la impedancia; b) la reactancia; c) la resistencia. [a) 30 Ω; b) 26 Ω; c) 15 Ω]

Solución:

$$Z = \frac{V_{ef}}{I_{ef}} = \frac{300\,\text{V}}{10\,\text{A}} = 30\,\Omega$$

$$Z^2 = R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2 = R^2 + X^2 \quad \left\{ \begin{matrix} R = Z\cos\phi \\ X = Z\,\text{sen}\,\phi \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} R = Z\cos\phi = 30\,\Omega \times \cos 60º = 15\,\Omega \\ X = Z\,\text{sen}\,\phi = 30\,\Omega \times \text{sen}\,60º = 25{,}98\,\Omega \end{matrix} \right.$$

6) En un circuito serie RCL si el valor máximo de la tensión del generador es de 200 V y su frecuencia de 50 Hz, calcular: a) valor eficaz de la intensidad; b) factor de potencia; c) potencia media. Datos: R = 200 Ω; L = 1 mH; C = 2 µF. [a) 0,0882 A; b) 0,125; c) 1,56 W]

Solución:

$$I_{ef} = \frac{V_{ef}}{Z} = \frac{\frac{V_m}{\sqrt{2}}}{Z} = \frac{\frac{200\,\text{V}}{\sqrt{2}}}{1.603{,}70\,\Omega} = 0{,}0882\,\text{A}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & Z = \sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2} = \sqrt{\left(200\,\Omega\right)^2 + \left(-1.591{,}2\,\Omega\right)^2} = 1.603{,}70\,\Omega \\ & X_L = L\omega = 0{,}001\,\text{H} \times 2\pi\,\text{rad} \times 50\,\text{Hz} = 0{,}314\,\Omega \\ & X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{2\cdot 10^{-6}\,\text{F} \times 2\pi\,\text{rad} \times 50\,\text{Hz}} = 1.591{,}5\,\Omega \end{aligned} \right.$$

$$\cos\phi = \frac{R}{Z} = \frac{200\,\Omega}{1.603{,}70\,\Omega} = 0{,}125 \quad \left\{ \overline{P} = I_{ef}V_{ef}\cos\phi = 0{,}0882\,\text{A} \times \tfrac{200\,\text{V}}{\sqrt{2}} \times 0{,}125 = 1{,}56\,\text{W} \right.$$

7) Un circuito conectado a un generador de 110 V y 60 Hz consume 300 W. El factor de potencia es 0,6 y la intensidad está retrasada respecto de la tensión. a) Determinar qué elemento debe conectarse en serie para que el factor de potencia sea 1,0; b) ¿cuál será en ese caso la potencia?. [a) Un condensador de valor $1{,}37\cdot10^{-4}$ F; b) 833,33 W]

Solución:

Como la intensidad está retrasada respecto de la tensión hemos de colocar un condensador en serie para que la impedancia sea toda debida a la resistencia y las reactancias sean cero.

Para determinar el valor del condensador que hemos de colocar calculamos las reactancias iniciales a partir de la impedancia y de la resistencia:

$$\overline{P} = I_{ef}V_{ef}\cos\phi = \frac{V_{ef}}{Z}V_{ef}\cos\phi \quad \left\{ Z = \frac{V_{ef}^2\cos\phi}{\overline{P}} = \frac{(110\,V)^2\times 0{,}6}{300\,W} = 24{,}2\,\Omega \right.$$

$$\cos\phi = 0{,}6 \quad \left\{ R = Z\cos\phi = 24{,}2\,\Omega\times 0{,}6 = 14{,}52\,\Omega \right.$$

$$Z^2 = R^2 + X_L^2 \quad \left\{ X_L = \sqrt{Z^2 - R^2} = 19{,}36\,\Omega \right.$$

$$\cos\phi = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \quad \left\{ \begin{array}{l} X_L = X_C \\ \cos\phi = \dfrac{R}{R} = 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} C = \dfrac{1}{X_L\omega} \quad \{\omega = 2\pi\,rad\times 60\,Hz\} \\ C = \dfrac{1}{19{,}36\,\Omega\times 376{,}99\,\frac{rad}{s}} = 1{,}37\cdot10^{-4}\,F \end{array} \right.$$

$$\overline{P} = I_{ef}V_{ef}\cos\phi = \frac{V_{ef}}{Z}V_{ef}\cos\phi = \frac{V_{ef}^2\cos\phi}{R} = \frac{(110\,V)^2\times 1}{14{,}52\,\Omega} = 833{,}33\,W$$

8) Una bombilla de 60 W a 125 V se quiere conectar a una red de 220 V y 50 Hz. Para que funcione correctamente, se le conecta en serie un condensador de capacidad C. Calcule el valor de C necesario y la potencia consumida. [$8{,}44\cdot10^{-6}$ F y 60 W]

Solución:

La bombilla tiene una R que puede soportar una determinada intensidad eficaz, si la intensidad es mayor se funde, por tanto, el colocar el condensador en serie es para disminuir la intensidad al conectarla a más voltaje eficaz.

$$\overline{P}_{(bombilla)} = I_{ef}V_{ef}\cos\phi = I_{ef}^2 Z\cos\phi = \frac{V_{ef}^2}{Z}\cos\phi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos\phi = 1 \quad\Rightarrow\quad Z = R \quad\Rightarrow\quad \overline{P}_{(bombilla)} = \dfrac{V_{ef}^2\times 1}{R} = I_{ef}^2 R = 60\,W \\ \cos\phi \neq 1 \quad\Rightarrow\quad Z\cos\phi = R \quad\Rightarrow\quad \overline{P}_{(bombilla)} = I_{ef}^2 R = 60\,W \end{array} \right\} R = \frac{V_{ef}^2}{\overline{P}} = \frac{(125\,V)^2}{60\,W} = 260{,}42\,\Omega$$

$$I_{ef\,(bombilla)} = \frac{V_{ef}}{R} = \frac{125\,V}{260{,}42\,\Omega} = 0{,}480\,A$$

$$I_{ef\,(bombilla)} = \frac{V_{ef}}{Z} = \frac{220\,V}{Z} = 0{,}480\,A \quad \left\{ Z = \frac{V_{ef}}{I_{ef\,(bombilla)}} = 458{,}34\,\Omega \right.$$

$$Z^2 = R^2 + X_C^2 \quad \left\{ X_C = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{(458{,}34\,\Omega)^2 - (260{,}42\,\Omega)^2} = 377{,}17\,\Omega \right.$$

$$X_C = \frac{1}{C\omega} \quad \left\{ C = \frac{1}{X_C\omega} = \frac{1}{377{,}17\,\Omega \times 2\pi \times 50\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 8{,}44\cdot 10^{-6}\,\text{F} \right.$$

9) Un circuito serie RCL se conecta a un generador de corriente alterna. Calcule: a) la lectura del voltímetro al colocarlo en paralelo con cada uno de los elementos del circuito; b) factor de potencia y frecuencia de resonancia del circuito. Datos: V_{ef}(generador) = 100 V; $\nu = \frac{1.000}{2\pi}$ Hz ; R = 200 Ω ; L = 0,05 H; C = 2,0·10^{-4} F. [a) 97.56 V; 24,5 V y 2,45 V; b) 0,976 y 50,3 Hz]

Solución:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} X_L = L\omega = 50\,\Omega \\ X_C = \dfrac{1}{C\omega} = 5\,\Omega \end{array} \right\} \quad Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = 205\,\Omega$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{ef(R)} = I_{ef} R \\ V_{ef(L)} = I_{ef} X_L \\ V_{ef(C)} = I_{ef} X_C \end{array} \right\} \quad \left\{ I_{ef} = \frac{V_{ef(\text{generador})}}{Z} = \frac{100\,\text{V}}{205\,\Omega} = 0{,}49\,\text{A} \right\} \left\{ \begin{array}{l} V_{ef(R)} = I_{ef} R = 97{,}56\,\text{V} \\ V_{ef(L)} = I_{ef} X_L = 24{,}5\,\text{V} \\ V_{ef(C)} = I_{ef} X_C = 2{,}45\,\text{V} \end{array} \right.$$

$$\cos\phi = \frac{R}{Z} = \frac{200\,\Omega}{205\,\Omega} = 0{,}976 \quad \left\{ \begin{array}{l} X_L = X_C \quad \Rightarrow \quad L\omega = \dfrac{1}{C\omega} \\ \omega = \sqrt{\dfrac{1}{LC}} = 316{,}23\,\frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \Rightarrow \quad \nu = \dfrac{\omega}{2\pi} = 50{,}3\,\text{Hz} \end{array} \right.$$

10) Una resistencia inductiva (R = 300 Ω y L = 1 H) y un condensador de 2,0·10^{-5} F se unen a la tensión alterna: $v = 120\sqrt{2}\,\text{sen}(100\pi t)\,\text{V}$. Calcule las tensiones eficaces en los bornes de cada aparato. [130,3 V en la resistencia inductiva y 47,7 V en el condensador]

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_L = L\omega = 1\,\text{H} \times 100\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}} = 314{,}16\,\Omega \\ X_C = \dfrac{1}{C\omega} = \dfrac{1}{2{,}0\cdot 10^{-5}\,\text{F} \times 100\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 159{,}15\,\Omega \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = 404{,}20\,\Omega \\ I_{ef} = \dfrac{V_{ef}}{Z} = \dfrac{\frac{V_m}{\sqrt{2}}}{Z} = \dfrac{120\,\text{V}}{404{,}20\,\Omega} = 0{,}30\,\text{A} \end{array} \right.$$

$$v_L = I_{ef} Z_L = I_{ef}\sqrt{R^2 + X_L^2} = 0{,}30\,\text{A} \times 434{,}40\,\Omega = 130{,}3\,\text{V}$$

$$v_C = I_{ef} X_C = 0{,}30\,\text{A} \times 159{,}15\,\Omega = 47{,}7\,\text{V}$$

11) Cuando al carrete de un determinado electroimán se le aplica una tensión continua de 240 V, la intensidad de la corriente que lo atraviesa es de 12 A. Cuando se le aplica una tensión alterna de amplitud 240 V y 50 Hz de frecuencia, la intensidad es de 6 A. Calcule la inductancia del carrete y obtenga la expresión de la intensidad instantánea sabiendo que $v = V_m \operatorname{sen}(\omega t)$. [63,66 mH; $i = 8,50\,\text{A}\operatorname{sen}\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$].

Solución:

En corriente continua: $R_L = \dfrac{V}{I} = \dfrac{240\,\text{V}}{12\,\text{A}} = 20\,\Omega$

En corriente alterna: $Z_L = \dfrac{V_{ef}}{I_{ef}} = \dfrac{\frac{V_m}{\sqrt{2}}}{I_{ef}} = \dfrac{\frac{240\,\text{V}}{\sqrt{2}}}{6\,\text{A}} = 28,28\,\Omega$

$$Z_L^2 = R^2 + X_L^2 \quad \left\{ X_L = \sqrt{(28,28\,\Omega)^2 - (20\,\Omega)^2} = 20,0\,\Omega \right\} \quad L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{20,0\,\Omega}{2\pi \times 50\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 0,06366\,\text{H}$$

$$i = I_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi) = 8,50\,\text{A}\operatorname{sen}\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left\{ I_m = \frac{V_m}{Z} = \frac{240\,\text{V}}{28,28\,\Omega} = 8,50\,\text{A} \right\} \left\{ \phi = \arctan\frac{-X_L}{R} = \arctan\frac{-20\,\Omega}{20\,\Omega} = -45^\circ = -\frac{\pi}{2}\,\text{rad} \right\}$$

12) Una bobina, de resistencia $300\,\Omega$ y autoinducción 1 H, y un condensador, de 0,020 mF, se conectan en serie a una tensión alterna de 50 Hz y valor eficaz 240 V. Determine: a) la lectura de un voltímetro conectado en paralelo con la bobina; b) el factor de potencia y la frecuencia de resonancia del circuito. [a) 258 V; b) 0,742 y 35,6 Hz]

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_L = L\omega = 1\,\text{H} \times 100\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}} = 314,16\,\Omega \\ X_C = \dfrac{1}{C\omega} = \dfrac{1}{2,0 \cdot 10^{-5}\,\text{F} \times 100\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 159,15\,\Omega \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = 404,20\,\Omega \\ I_{ef} = \dfrac{V_{ef}}{Z} = \dfrac{240\,\text{V}}{404,20\,\Omega} = 0,60\,\text{A} \end{array} \right.$$

$$v_L = I_{ef} Z_L = I_{ef}\sqrt{R^2 + X_L^2} = 0,60\,\text{A} \times 434,40\,\Omega = 258,0\,\text{V}$$

$$\cos\phi = \frac{R}{Z} = \frac{300\,\Omega}{404,20\,\Omega} = 0,742$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_L = X_C \\ L\omega = \dfrac{1}{C\omega} \end{array} \right\} \quad \left\{ \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{1,0\,\text{H} \times 2,0 \cdot 10^{-5}\,\text{F}}} = 223,6\,\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right\} \quad \left\{ \nu = 35,6\,\text{Hz} \right.$$

13) Un circuito serie consta de una resistencia R, de $20\,\Omega$, y una bobina, de resistencia R_L y autoinducción L desconocidas. Al conectarlo a una tensión, $v = 120\cos(100t)\,\text{V}$, los valores máximos de las diferencias de potencial entre los extremos de la resistencia y de la bobina son 60 V y 90 V, respectivamente. Calcule: a) los valores de la resistencia de la bobina y la autoinducción; b) ¿qué condensador habría que añadir al circuito para que le factor de potencia fuese igual a la unidad? [a) $R_L = 7,5\,\Omega$ y L = 0,29 H; b) 0,34 mF]

Solución:

$$v_{R(máx)} = 60\,V = I_m R \quad \left\{ I_m = \frac{v_{R(máx)}}{R} = \frac{60\,V}{20\,\Omega} = 3\,A \right.$$

$$v_{L(máx)} = 90\,V = I_m Z_L \quad \left\{ Z_L = \frac{v_{L(máx)}}{I_m} = \frac{90\,V}{3\,A} = 30\,\Omega \right\} \quad \left\{ Z_L = \sqrt{R_L^2 + X_L^2} \right.$$

$$V_m = 120\,V = I_m Z \quad \left\{ Z = \frac{120\,V}{3\,A} = 40\,\Omega \right.$$

$$\left\{ Z^2 = \left(R + R_L\right)^2 + X_L^2 = R^2 + 2RR_L + R_L^2 + X_L^2 \left\{ \begin{matrix} Z^2 = R^2 + 2RR_L + Z_L^2 \\ 40^2 = 20^2 + 40R_L + 30^2 \end{matrix} \right\} \quad \left\{ R_L = 7{,}5\,\Omega \right. \right.$$

$$X_L = \sqrt{Z_L^2 - R_L^2} = 29{,}05\,\Omega \quad \left\{ L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{29{,}05\,\Omega}{100\,\frac{rad}{s}} = 0{,}290\,H \right.$$

$$\cos\phi = 1 = \frac{R}{Z} \quad \left\{ \begin{matrix} X_L = X_C \\ L\omega = \frac{1}{C\omega} \end{matrix} \right\} \quad \left\{ C = \frac{1}{L\omega^2} = \frac{1}{0{,}2905\,H \times \left(100\,\frac{rad}{s}\right)^2} = 3{,}44 \cdot 10^{-4}\,F \right.$$

14) Utilizando una autoinducción L, de 5 mH, y una resistencia R, de $60\,\Omega$, se desea montar un circuito serie RCL que conectado a la red (220 V y 50 Hz), permita el paso de una intensidad de corriente máxima. Calcule: a) la capacidad del condensador que debe utilizarse para conseguir dicho efecto; b) la caída de tensión y desfase entre tensión e intensidad en cada uno de los elementos del circuito. [a) 2,026 mF; b) 220 V y 5,76 V]

Solución:

La corriente será máxima si $\mathbf{X_L = X_C}$: $C = \frac{1}{L\omega^2} = \frac{1}{0{,}005\,H \times \left(2\pi \times 50\,\frac{rad}{s}\right)^2} = 2{,}026 \cdot 10^{-3}\,F$

$$I_{ef} = \frac{V_{ef}}{Z} = \frac{V_{ef}}{\sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}} = \frac{V_{ef}}{R} = \frac{220\,V}{60\,\Omega} = 3{,}666\,A$$

$$v_R = I_{ef} R = \frac{V_{ef}}{R} R = V_{ef} = 220\,V$$

$$v_L = I_{ef} X_L = \frac{V_{ef}}{Z} X_L = \frac{V_{ef}}{\sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}} X_L = \frac{V_{ef}}{R} X_L = \frac{V_{ef}}{R} L\omega = 5{,}760\,V$$

$$v_C = I_{ef} X_C = \frac{V_{ef}}{Z} X_C = \frac{V_{ef}}{\sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}} X_C = \frac{V_{ef}}{R} X_C = 5{,}760\,V$$

15) Un generador tiene de ecuación $\varepsilon = 25\,\mathrm{sen}\left(377t\right)V$, siendo la fem máxima de 25,0 V y la frecuencia angular de 377 rad/s. Se conecta a un condensador de $4{,}15 \cdot 10^{-6}$ F. Calcula: a) el valor máximo de la intensidad de corriente y el valor de la fem del generador en ese instante; b) el valor de la intensidad de corriente en el instante en el que la fem es de -12,5 V y está incrementando en magnitud. [a) I_m = 0,039 A y ε = 0 V; b) i = 0,034 A]

Solución:

$$I_m = \frac{V_m}{Z} = \frac{V_m}{X_C} = \frac{25\,V}{639{,}16\,\Omega} = 0{,}0391\,A$$

$$\varepsilon = 25\,\text{sen}(377t)\,V \quad \left\{ i = 0{,}0391\,A\,\text{sen}\left(377t + \frac{\pi}{2}\right) \right.$$

Si la fem es de -12,5 V: $\varepsilon = 25\,\text{sen}(377t)\,V = -12{,}5\,V \quad \left\{ \text{sen}(377t) = \frac{-12{,}5\,V}{25\,V} = -0{,}5 \right.$

$$377t = \arcsin(-0{,}5) = -30^o = -0{,}5236\,\text{rad} = 5{,}76\,\text{rad} \quad \left\{ i = 0{,}0391\,A\,\text{sen}\left(5{,}76 + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}034\,A \right.$$

$$t = 0{,}0153\,s$$

<u>**Demostración**</u> de que la intensidad está adelantada en $\frac{\pi}{2}\,\text{rad}$:

Las ecuaciones de la intensidad y del voltaje: $v = V_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{C}\int i\,dt \quad \begin{cases} v = V_m\,\text{sen}\,\omega t \\ i = I_m\,\text{sen}(\omega t + \phi) \end{cases}$

$$V_m\,\text{sen}\,\omega t = \frac{1}{C}\int I_m\,\text{sen}(\omega t + \phi)\,dt = -\frac{I_m}{C\omega}\cos(\omega t + \phi)$$

$$V_m\,\text{sen}\,\omega t = -\frac{I_m}{C\omega}\left[\cos(\omega t)\cos\phi - \text{sen}(\omega t)\,\text{sen}\,\phi\right] = \text{sen}\,\omega t\left[\frac{I_m}{C\omega}\text{sen}\,\phi\right] + \cos\omega t\left[-\frac{I_m}{C\omega}\cos\phi\right]$$

$$\begin{Bmatrix} V_m = \frac{I_m}{C\omega}\text{sen}\,\phi \\ 0 = -\frac{I_m}{C\omega}\cos\phi \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} V_m^2 = \left(+\frac{I_m}{C\omega}\text{sen}\,\phi\right)^2 \\ 0 = \left(-\frac{I_m}{C\omega}\cos\phi\right)^2 \end{Bmatrix} \quad \begin{cases} V_m^2 = \left(\frac{I_m}{C\omega}\right)^2 = I_m^2\left(\frac{1}{C\omega}\right)^2 \\ V_m = I_m\sqrt{\left(\frac{1}{C\omega}\right)^2} = I_m\sqrt{X_C^2} = I_m Z \end{cases}$$

De las ecuaciones anteriores se obtiene: $\begin{Bmatrix} V_m = I_m X_C\,\text{sen}\,\phi \\ 0 = I_m X_C\cos\phi \end{Bmatrix} \left\{ \frac{V_m}{0} = \tan\phi \right\} \left\{ \phi = \arctan\left(\frac{V_m}{0}\right) = \frac{\pi}{2} \right.$

La intensidad está adelantada respecto del voltaje: $i = 0{,}0391\,A\,\text{sen}\left(377t + \frac{\pi}{2}\right)$

16) Una bobina, que tiene una inductancia de L = 0,088 H y una resistencia desconocida, y un condensador de $9{,}4\cdot10^{-7}$ F se conectan en serie a un generador de corriente alterna de frecuencia

930 Hz. Si la constante de fase entre el voltaje aplicado y la intensidad de corriente vale 75º, calcula la resistencia de la bobina. [89 Ω]

Solución:

$$\cos\phi = \frac{R}{Z} \quad \left\{ \cos^2\phi = \frac{R^2}{Z^2} = \frac{R^2}{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \frac{R^2}{R^2 + X^2} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} X_L = L\omega = 514{,}2\,\Omega \\ X_C = \dfrac{1}{C\omega} = 182{,}1\,\Omega \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R^2 = R^2\cos^2\phi + X^2\cos^2\phi \\ R^2(1-\cos^2\phi) = X^2\cos^2\phi \end{array} \right\} \quad R = \sqrt{\frac{X^2\cos^2\phi}{1-\cos^2\phi}} = \sqrt{\frac{332{,}1^2\cos^2 75^o}{1-\cos^2 75^o}} = 89{,}0\,\Omega$$

17) Un generador proporciona un voltaje sinusoidal de 75,0V de voltaje eficaz y 550Hz de frecuencia. Se conecta a los extremos de los tres elementos RCL que están en serie, siendo la resistencia R = 5 Ω, el condensador C = 4,70·10^{-6} F y la bobina L = 0,0250 H. Calcula: a) lo que medirá un voltímetro conectado en paralelo a resistencia y después al condensador y a la bobina; b) la potencia media suministrada por el generador y la consumida o disipada en cada uno de los tres elementos. [a) 14,8 V y 73,52 V; b) 43,84 W por el generador; 43,84 W en la resistencia R y 0 W en el condensador C y en la bobina L]

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\varepsilon_m)^2 = (I_m R)^2 + [I_m (X_L - X_C)]^2 \\ \varepsilon_m^2 = V_R^2 + (V_L - V_C)^2 \end{array} \right\} \quad \left\{ \varepsilon_m = I_m\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = I_m Z \right\} \quad \left\{ \varepsilon_{ef} = I_{ef} Z \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_L = L\omega = 0{,}0250\,H \times 2\pi rad \times 550\,Hz = 86{,}40\,\Omega \\ X_C = \dfrac{1}{C\omega} = \dfrac{1}{4{,}70\cdot 10^{-6}\,F \times 2\pi rad \times 550\,Hz} = 61{,}57\,\Omega \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \\ Z = \sqrt{(5\Omega)^2 + (86{,}40\,\Omega - 61{,}57\,\Omega)^2} = 25{,}33\,\Omega \end{array} \right.$$

$$I_{ef} = \frac{\varepsilon_{ef}}{Z} = \frac{75\,V}{25{,}33\,\Omega} = 2{,}961\,A \qquad \left\{ v_R = I_{ef} R = 2{,}961\,A \times 5\,\Omega = 14{,}8\,V \right.$$

$$v_{LC} = I_{ef} X_{LC} = I_{ef}(X_L - X_C) = 2{,}961\,A \times (86{,}40\,\Omega - 61{,}57\,\Omega) = 73{,}52\,V$$

Potencia media suministrada por el generador:

$$\overline{P}_{generador} = \frac{1}{T}\int_0^T P dt = \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon i\, dt = \frac{\varepsilon_m I_m}{2}\cos\phi = \varepsilon_{ef} I_{ef} \cos\phi \left\{ \cos\phi = \frac{V_{ef(R)}}{\varepsilon_{ef}} = \frac{I_{ef} R}{I_{ef} Z} = \frac{5\,\Omega}{25{,}33\,\Omega} = 0{,}1974 \right.$$

$$\overline{P}_{generador} = \varepsilon_{ef} I_{ef} \cos\phi = 75\,V \times 2{,}961\,A \times 0{,}1974 = 43{,}84\,W$$

Potencia media consumida en la resistencia:

$$\overline{P}_R = \frac{1}{T}\int_0^T P dt = \frac{1}{T}\int_0^T v_R i_R\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T I_m V_m \operatorname{sen}^2 \omega t\, dt = \frac{I_m V_m}{T}\frac{T}{2} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}\frac{V_m}{\sqrt{2}} = I_{ef} V_{ef}$$

$$\overline{P}_R = I_{ef} V_{ef} = I_{ef} I_{ef} R = I_{ef}^2 R = (2{,}961\,A)^2 \times 5\,\Omega = 43{,}84\,W \quad \left\{ \overline{P}_R = I_{ef} V_{ef} = \varepsilon_{ef} I_{ef}\cos\phi = \overline{P}_{generador} \right.$$

La **potencia media consumida en la autoinducción L es cero:**

$$\left\{ v_L = V_L \operatorname{sen}(\omega t) = L\frac{di}{dt} \right\} \quad \left\{ di_L = \frac{V_L}{L}\operatorname{sen}(\omega t) \quad \Rightarrow \quad i_L = -\frac{V_L}{L\omega}\cos(\omega t) \right\}$$

$$\overline{P}_L = \frac{1}{T}\int_0^T P dt = \frac{1}{T}\int_0^T v_L i_L \, dt = -\frac{V_L^2}{TL\omega}\int_0^T \operatorname{sen}(\omega t)\cos(\omega t) dt = -\frac{V_L^2}{TL\omega}\int_0^T \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2\omega t) dt = 0$$

$$\left\{ \int_0^T \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2\omega t) dt = -\frac{1}{2}\frac{1}{2\omega}\Big[\cos(2\omega t)\Big]_0^T = -\frac{1}{4\omega}\Big[\cos(4\pi) - \cos 0\Big] = 0 \right\}$$

La **potencia media consumida en la autoinducción L es cero:**

$$\left\{ v_L = V_L \operatorname{sen}(\omega t) = L\frac{di}{dt} \right\} \quad \left\{ di_L = \frac{V_L}{L}\operatorname{sen}(\omega t) \quad \Rightarrow \quad i_L = -\frac{V_L}{L\omega}\cos(\omega t) \right\}$$

$$\overline{P}_L = \frac{1}{T}\int_0^T P dt = \frac{1}{T}\int_0^T v_L i_L \, dt = -\frac{V_L^2}{TL\omega}\int_0^T \operatorname{sen}(\omega t)\cos(\omega t) dt = -\frac{V_L^2}{TL\omega}\int_0^T \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2\omega t) dt = 0$$

$$\left\{ \int_0^T \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2\omega t) dt = -\frac{1}{2}\frac{1}{2\omega}\Big[\cos(2\omega t)\Big]_0^T = -\frac{1}{4\omega}\Big[\cos(4\pi) - \cos 0\Big] = 0 \right\}$$

La **potencia consumida en el condensador C es cero**:

$$\left\{ v_C = V_C \operatorname{sen}(\omega t) \right\} \quad \left\{ i_C = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(C v_C) = \frac{d}{dt}\Big[C V_C \operatorname{sen}(\omega t)\Big] = C V_C \omega \cos(\omega t) \right\}$$

$$\overline{P}_C = \frac{1}{T}\int_0^T P dt = \frac{1}{T}\int_0^T v_C i_C \, dt = \frac{1}{T}\int_0^T C V_C^2 \omega \operatorname{sen}(\omega t)\cos(\omega t) dt = \frac{C V_C^2 \omega}{T}\int_0^T \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2\omega t) dt = 0$$

$$\left\{ \int_0^T \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2\omega t) dt = -\frac{1}{2}\frac{1}{2\omega}\Big[\cos(2\omega t)\Big]_0^T = -\frac{1}{4\omega}\Big[\cos(4\pi) - \cos 0\Big] = 0 \right\}$$