7. «Corriente Alterna»

7.1 Generadores de corriente alterna

Todas las casas, las oficinas y las fábricas están conectadas con alambres que llevan corrientes alternas, es decir, corrientes cuyos valores varían con el tiempo de una forma sinusoidal. Cambian de dirección 100 veces por segundo ya que la frecuencia es de 50 Hz.

La velocidad de los electrones en un alambre es de 40 µm/s, si invertimos su dirección cada 0,01 s los electrones se moverán 0,4 µm en la mitad de un ciclo. A esta velocidad un electrón, antes de invertir su movimiento, no pasa más de diez átomos de cobre en el cristal. Por lo que podemos preguntar ¿cómo puede el electrón alguna vez llegar o trasladarse a cualquier parte?. La conducción de electrones no es "trasladarse a cualquier parte". Cuando decimos que la corriente en un alambre es de un amperio queremos decir que los transportadores de la carga pasan a través de un plano cortante que cruza el alambre a la velocidad de un culombio por segundo. La velocidad a la cual los transportadores de la carga cruzan aquel plano no se considera directamente. Así un amperio puede corresponder a un grupo de transportadores de carga moviéndose muy lentamente o a unos pocos moviéndose rápidamente.

Además, la señal dirigida a los electrones para que inviertan sus direcciones, la cual se origina en la fem alterna proporcionada por el generador de la compañía, se propaga a una velocidad próxima a la de la luz. Todos los electrones reciben sus instrucciones para invertir la dirección al mismo tiempo.

En su forma más sencilla, un generador de corriente alterna funciona de la siguiente forma:

- Una bobina de alambre, sujeta por un eje, está enrollada alrededor de un núcleo de hierro en un campo magnético uniforme (inductor).

- El eje de la bobina está rotando por algún medio mecánico, tal como un motor o una turbina.

- Como consecuencia de la variación del flujo magnético, respecto del tiempo, a través de la bobina se induce en la bobina (inducido) una fuerza electromotriz (fem).

- Cada extremo del alambre que forma la bobina está conectado al circuito externo por medio de un anillo metálico que gira con la bobina. Los anillos metálicos se deslizan, rozando, al pasar con un trozo de carbón que está fijo, a los cuales está conectado el circuito externo.

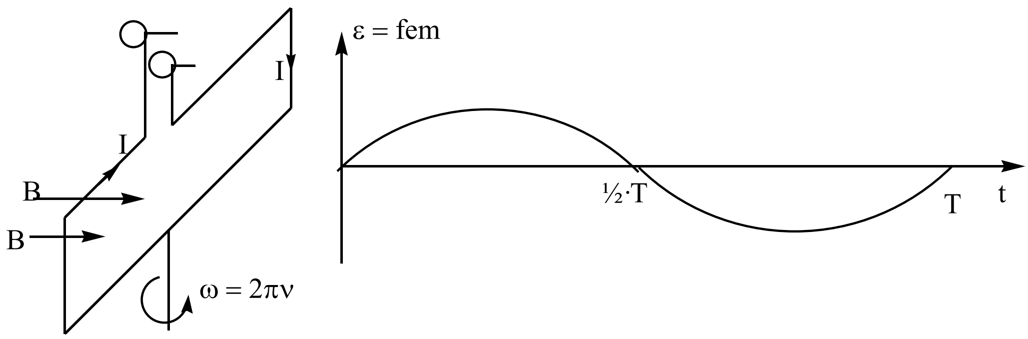
- Si el generador se conecta a un circuito externo, del generador sale una corriente eléctrica alterna.

Si la bobina tiene N espiras y está girando con una velocidad angular constante $\omega = 2\pi\nu$, de frecuencia ν, en un campo magnético uniforme, la fuerza electromotriz inducida viene dada por la ley de Lenz-Faraday:

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi}{dt} = -N\frac{d}{dt}\left[BS\cos(\omega t)\right] = NBS\omega\,\mathrm{sen}(\omega t) = \varepsilon_m\,\mathrm{sen}(\omega t) = \varepsilon_m\,\mathrm{sen}(2\pi\nu t)$$

La intensidad de la corriente también depende del tiempo: $i = I_m\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$

Las expresiones anteriores nos indican: a) que la fem varía sinusoidalmente con el tiempo y que esta cambia la polaridad cuando gira la bobina llamándose generador de corriente alterna; b) que la intensidad no está en fase con la fem.



$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi}{dt} = -N\frac{d}{dt}\left[BS\cos(\omega t)\right] = NBS\omega\,\mathrm{sen}(\omega t) = \varepsilon_m\,\mathrm{sen}(\omega t) = \varepsilon_m\,\mathrm{sen}(2\pi\nu t)$$

7.2 Magnitudes características de la corriente alterna: Valor instantáneo y valor máximo, período, frecuencia, pulsación y fase.

El voltaje producido en los terminales de un generador de corriente alterna fluctúa sinusoidalmente entre valores positivos y negativos como una función del tiempo. Y, la corriente, por tanto, también oscilará. El valor instantáneo del voltaje: $v = V_m\,\mathrm{sen}\,\omega t$. El valor instantáneo de la intensidad: $i = I_m\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$. El valor máximo del voltaje: V_m. El valor máximo de la intensidad: I_m. El período es el tiempo que transcurre para que el voltaje y la intensidad adquieran el mismo valor (T en segundos). La frecuencia es el número de veces por segundo en que adquieren el mismo valor. La frecuencia se mide en s^{-1} ó Hz (en Europa es de 50 Hz y en América de 60 Hz).

La fase del voltaje, (ωt), y la fase de la intensidad, $(\omega t + \phi)$, se miden en radianes. Siendo la diferencia de fase: ϕ. La pulsación es el número de veces en que adquieren el mismo valor en 2π segundos. Se mide en rad/s. La pulsación: $\omega = 2\pi\nu$

7.3 Intensidad y tensión eficaz

Una lámpara, provista de filamento, puede brillar conectada a una corriente alterna o a una corriente continua. Si aplicamos una tensión alterna a una resistencia, habrá una disipación de energía por efecto Joule, igual que si la tensión es continua.

Concepto de **valor eficaz**: "Se llama **valor eficaz de una tensión alterna** aquel valor que produce el mismo efecto Joule, en una resistencia, como si fuese una tensión continua".

Ley de Joule: "una corriente alterna de intensidad i en el instante t desarrolla en una resistencia óhmica, R, durante el tiempo infinitamente pequeño, dt, que sigue ese instante, una cantidad de calor positiva cualquiera que sea el sentido de la corriente".

La energía: $dW = iv_R dt = i^2 R dt = \left[I_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \right]^2 R dt$

"Se denomina **intensidad eficaz de la corriente alterna** considerando que el calor desarrollado es el mismo, al cabo de un período T (o de un número entero de períodos), que con una corriente continua de una determinada intensidad".

Por lo que se ha de cumplir: $Q_{Joule} = \int_0^T i^2 R dt = I_{eficaz}^2 RT = \left(\frac{I_m}{\sqrt{2}} \right)^2 RT$

Demostración:

$$I_{ef}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[I_m \operatorname{sen}(\omega t) \right]^2 dt = \frac{I_m^2}{T}\int_0^T \operatorname{sen}^2(\omega t) dt = \frac{I_m^2}{T}\frac{T}{2} = \frac{I_m^2}{2} \quad \left\{ I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(2\omega t) = \cos^2(\omega t) - \operatorname{sen}^2(\omega t) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(\omega t) \quad \left\{ \operatorname{sen}^2 \omega t = \frac{1}{2}\left[1 - \cos(2\omega t) \right] \right. \\ \int_0^T \operatorname{sen}^2(\omega t) dt = \int_0^T \frac{1}{2}\left[1 - \cos(2\omega t) \right] dt = \frac{T}{2} - \frac{1}{2(2\omega)}\left[\operatorname{sen}(2\omega t) \right]_0^T = \frac{T}{2} \end{array} \right\}$$

De la misma manera, se define la diferencia de potencial eficaz entre dos puntos para los que, en el instante t, la diferencia de potencial es

$$V_{ef} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \quad \left\{ \varepsilon_{ef} = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{2}} = \sqrt{\overline{\varepsilon^2}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left[\varepsilon_m \operatorname{sen}(\omega t) \right]^2 dt} \right.$$

7.4 Comportamiento de R, L y C en corriente continua y en corriente alterna

Resistencia (R): En un circuito de **corriente continua** la energía consumida en una resistencia R por efecto Joule es igual: $W = IVt = I^2 Rt \quad \left\{ P_{media} = IV = I^2 R \right.$

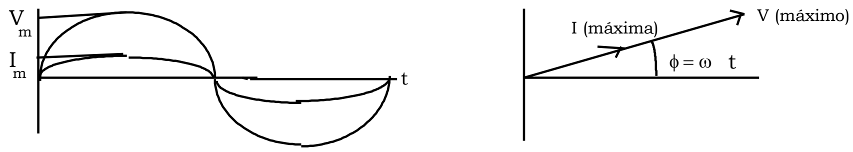
Si aplicamos una **tensión alterna** a una resistencia, habrá disipación de energía por efecto Joule, sin embargo como la fem y la intensidad dependen del tiempo

$$\varepsilon = v_R \quad \left\{ v_R = iR = V_m \operatorname{sen} \omega t = \varepsilon_m \operatorname{sen} \omega t \right\} \quad \left\{ i = \frac{V_m}{R} \operatorname{sen} \omega t = I_m \operatorname{sen} \omega t \right.$$

Comparando las ecuaciones de v_R y de i se observe que estas cantidades dependen del tiempo y que las dos **están en fase**, esto significa que sus correspondientes valores máximos coinciden en el tiempo y siendo $\mathbf{V_m = I_m R}$.

Por tanto: "**En un circuito de corriente alterna que contienen sólo resistencia, la corriente invierte su dirección cada vez que lo hace la polaridad de los terminales del generador**".

Fasores: En la siguiente figura se representa el método de los fasores. Los fasores son en esencia "**vectores rotantes**". Las dos flechas (los fasores) rotan en sentido contrario a las agujas del reloj alrededor del origen con frecuencia angular ω. La longitud de un fasor es proporcional a la amplitud de la cantidad alternante. La proyección de un fasor sobre el eje vertical es proporcional al valor instantáneo de esta cantidad alternante para un valor instantáneo dado del ángulo de fase $\phi = \omega t$



En los extremos de una R : el voltaje instantáneo y la intensidad instantánea están en fase

Potencia media consumida en la resistencia: $P_m = \frac{1}{T}\int_0^T P\,dt = \frac{I_m}{\sqrt{2}}\frac{V_m}{\sqrt{2}} = I_{ef}V_{ef}$

Demostración:

$$P_m = \overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T iv\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T I_m V_m \,\text{sen}^2\,\omega t\,dt = \frac{I_m V_m}{T}\frac{T}{2} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}\frac{V_m}{\sqrt{2}} = I_{ef}V_{ef}$$

Autoinducción (L): La palabra autoinducción procede de auto- e inducción, es decir, que produce una fem en un circuito por la variación de corriente que pasa por él. Siendo una aplicación de la ley de Lenz-Faraday. La diferencia de potencial aplicada a los extremos de una bobina inductiva pura de valor L:

$$v + V_L = 0 \quad \left\{V_m\,\text{sen}(\omega t) - L\frac{di}{dt} = 0\right\} \quad \left\{di = \frac{V_m}{L}\text{sen}(\omega t)\,dt\right.$$

$$i = \int \frac{V_m}{L}\text{sen}\,\omega t dt = -\frac{V_m}{L\omega}\cos\omega t = \frac{V_m}{L\omega}\text{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_m\,\text{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Estando la intensidad retrasada en $\frac{\pi}{2}$ respecto del voltaje.

Relación de los valores máximos: $\frac{V_m}{L\omega} = I_m \quad \left\{V_m = I_m(L\omega) = I_m X_L\right.$. Siendo $\mathbf{X_L}$ la **reactancia inductiva**.

Bobina con resistencia (RL): La diferencia de potencial aplicada a los extremos de una bobina inductiva, con una autoinducción de valor L y una resistencia interna a la bobina R, se obtiene aplicando la ley de Ohm

$$v + V_L = iR \quad \left\{\begin{matrix} v = V_m\,\text{sen}\,\omega t \\ V_L = -L\dfrac{di}{dt}\end{matrix}\right\} \quad i = I_m\,\text{sen}(\omega t + \phi)$$

El voltaje y la intensidad no están en fase.

$$V_m \operatorname{sen}(\omega t) = I_m R \operatorname{sen}(\omega t + \phi) + L I_m \omega \cos(\omega t + \phi)$$
$$V_m \operatorname{sen}(\omega t) = I_m R\left[\operatorname{sen}(\omega t)\cos\phi + \cos(\omega t)\operatorname{sen}\phi\right] + I_m L\omega\left[\cos(\omega t)\cos\phi - \operatorname{sen}(\omega t)\operatorname{sen}\phi\right]$$
$$V_m \operatorname{sen}(\omega t) = \operatorname{sen}\omega t\left[I_m R\cos\phi - I_m L\omega \operatorname{sen}\phi\right] + \cos\omega t\left[I_m R\operatorname{sen}\phi + I_m L\omega\cos\phi\right]$$
$$\left\{\begin{array}{l} V_m = I_m R\cos\phi - I_m L\omega\operatorname{sen}\phi \\ 0 = I_m R\operatorname{sen}\phi + I_m L\omega\cos\phi \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (V_m)^2 = (I_m R\cos\phi - I_m L\omega\operatorname{sen}\phi)^2 \\ 0 = (I_m R\operatorname{sen}\phi + I_m L\omega\cos\phi)^2 \end{array}\right\}$$

Sumamos:

$$\left\{\begin{array}{l} (V_m)^2 = (I_m R)^2\cos^2\phi + (I_m L\omega)^2\operatorname{sen}^2\phi - 2(I_m R\cos\phi)(I_m L\omega\operatorname{sen}\phi) \\ 0 = (I_m R)^2\operatorname{sen}^2\phi + (I_m L\omega)^2\cos^2\phi + 2(I_m R\operatorname{sen}\phi)(I_m L\omega\cos\phi) \end{array}\right\}$$
$$(V_m)^2 = (I_m R)^2 + (I_m L\omega)^2 = I_m^2\left(R^2 + L^2\omega^2\right)$$

$$V_m = I_m\sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \quad \left\{\begin{array}{l} X_L = L\omega \\ Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \end{array}\right\} \quad V_m = I_m\sqrt{R^2 + X_L^2} = I_m Z$$

X_L se llama la reactancia inductiva y Z la impedancia.

De las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\left\{\begin{array}{l} V_m = I_m R\cos\phi - I_m X_L\operatorname{sen}\phi \\ 0 = I_m R\operatorname{sen}\phi + I_m X_L\cos\phi \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} V_m = I_m R\cos\phi - I_m X_L\dfrac{(-I_m X_L\cos\phi)}{I_m R} = \cos\phi\left(I_m R + \dfrac{I_m X_L^2}{R}\right) \\ \cos\phi = \dfrac{V_m R}{I_m\left(R^2 + X_L^2\right)} = \dfrac{R}{Z} \end{array}\right.$$

$$0 = I_m R\operatorname{sen}\phi + I_m X_L\cos\phi \Rightarrow \left\{\tan\phi = \frac{\operatorname{sen}\phi}{\cos\phi} = \frac{-I_m X_L}{I_m R} = \frac{-X_L}{R}\right\}\left\{\phi = \arctan\left(\frac{-X_L}{R}\right)\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} Z^2 = R^2 + X_L^2 \\ \cos\phi = \dfrac{R}{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} R = 0\,\Omega \\ \phi = \arctan\left(\dfrac{-X_L}{R}\right) = -\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

La intensidad está retrasada respecto del voltaje.

La **potencia media consumida en la autoinducción L es cero:**

$$\left\{v_L = V_L\operatorname{sen}(\omega t) = L\frac{di}{dt}\right\} \quad \left\{di_L = \frac{V_L}{L}\operatorname{sen}(\omega t) \quad \Rightarrow \quad i_L = -\frac{V_L}{L\omega}\cos(\omega t)\right\}$$
$$\overline{P}_L = \frac{1}{T}\int_0^T P\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T v_L i_L\,dt = -\frac{V_L^2}{TL\omega}\int_0^T \operatorname{sen}(\omega t)\cos(\omega t)\,dt = -\frac{V_L^2}{TL\omega}\int_0^T \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2\omega t)\,dt = 0$$
$$\left\{\int_0^T \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2\omega t)\,dt = -\frac{1}{2}\frac{1}{2\omega}\left[\cos(2\omega t)\right]_0^T = -\frac{1}{4\omega}\left[\cos(4\pi) - \cos 0\right] = 0\right\}$$

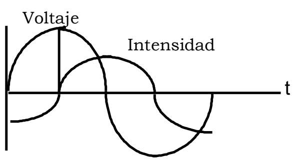
<u>De las ecuaciones obtenidas sacamos las siguientes conclusiones</u>:

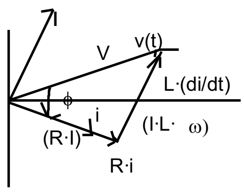
1. La intensidad de la corriente, i, en la autoinducción no está en fase con el voltaje de la autoinducción. La intensidad está retrasada respecto del voltaje.

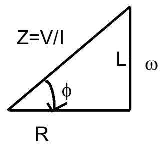
2. Si la autoinducción fuese pura, es decir, no presentase resistencia la intensidad estaría retrasada en 90º respecto del voltaje.

3. La resistencia que presenta la autoinducción pura (sin resistencia) al paso de la corriente llamada reactancia inductiva es directamente proporcional a la autoinducción L y a la pulsación (y a la frecuencia), es decir, mientras mayor sea la autoinducción L y mayor la frecuencia de la corriente alterna mayor es la resistencia de la autoinducción.

4. Una autoinducción absorbe y libera energía alternativamente en periodos iguales de tiempo y, en el promedio, la potencia es cero y una autoinducción no realiza potencia disipativa en un circuito de corriente alterna.







<u>Condensador</u> (C): Un condensador, en **corriente continua,** se caracteriza porque

a) La corriente fluye por él sólo el breve periodo de tiempo después de que se aplique el voltaje de la batería, para cruzarlo.

b) La carga fluye sólo mientras el condensador se está cargando.

c) Cuando el condensador esté totalmente cargado no salen más cargas de los terminales de la batería.

El condensador en **corriente alterna**: Supongamos que los extremos de una batería se conectan a un condensador totalmente cargado, donde repentinamente se invierten las conexiones, con el terminal positivo de la batería estando conectado al plato negativo y el terminal negativo conectado al plato positivo. Entonces, lo que ocurre es que la carga fluirá, otra vez, pero en dirección inversa, hasta que la batería recargue el condensador de acuerdo con las nuevas conexiones.

Esto, es similar a lo que ocurre cuando un condensador se conecta a un circuito de corriente alterna, donde la polaridad del voltaje aplicado al condensador cambia continuamente.

Cuando el generador está conectado a un condensador exclusivamente, la diferencia de potencial que cruza el condensador será:

$$v_C = V_m \operatorname{sen} \omega t = \frac{q_{libre}}{C} \quad \{q_C = Cv_C\}$$

$$i_C = \frac{dq_C}{dt} = CV_m \omega \cos \omega t = V_m C\omega \cos \omega t = V_m C\omega \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_m \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$V_m = \frac{I_m}{C\omega} = I_m X_C$$

Estando la intensidad adelantada en $\frac{\pi}{2}$ respecto del voltaje. Relación de los valores máximos: $V_m = I_m X_C$. Siendo **X_C** la **reactancia capacitativa**.

<u>Condensador y Resistencia</u> (RC): La diferencia de potencial aplicada a los extremos de un condensador en serie con una resistencia R, es igual

$$v = iR + V_C = iR + \frac{q}{C} = iR + \frac{1}{C}\int i dt \quad \begin{cases} v = V_m \operatorname{sen}\omega t \\ i = I_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \end{cases}$$

$$V_m \operatorname{sen}\omega t = I_m R \operatorname{sen}(\omega t + \phi) + \frac{1}{C}\int I_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi) dt$$
$$V_m \operatorname{sen}\omega t = I_m R \operatorname{sen}(\omega t + \phi) - \frac{I_m}{C\omega}\cos(\omega t + \phi)$$

$$V_m \operatorname{sen}\omega t = I_m R\left[\operatorname{sen}(\omega t)\cos\phi + \cos(\omega t)\operatorname{sen}\phi\right] - \frac{I_m}{C\omega}\left[\cos(\omega t)\cos\phi - \operatorname{sen}(\omega t)\operatorname{sen}\phi\right]$$
$$V_m \operatorname{sen}\omega t = \operatorname{sen}\omega t\left[I_m R\cos\phi + \frac{I_m}{C\omega}\operatorname{sen}\phi\right] + \cos\omega t\left[I_m R \operatorname{sen}\phi - \frac{I_m}{C\omega}\cos\phi\right]$$

$$\begin{Bmatrix} V_m = I_m R\cos\phi + \frac{I_m}{C\omega}\operatorname{sen}\phi \\ 0 = I_m R\operatorname{sen}\phi - \frac{I_m}{C\omega}\cos\phi \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} V_m^2 = \left(I_m R\cos\phi + \frac{I_m}{C\omega}\operatorname{sen}\phi\right)^2 \\ 0 = \left(I_m R\operatorname{sen}\phi - \frac{I_m}{C\omega}\cos\phi\right)^2 \end{Bmatrix}$$

$$V_m^2 = (I_m R)^2 + \left(\frac{I_m}{C\omega}\right)^2 = I_m^2\left[R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2\right] \quad \left\{V_m = I_m\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2} = I_m\sqrt{R^2 + X_C^2} = I_m Z\right.$$

X_C se llama la reactancia capacitativa y Z la impedancia.

De las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} V_m = I_m R\cos\phi + I_m X_C \operatorname{sen}\phi \\ 0 = I_m R\operatorname{sen}\phi - I_m X_C\cos\phi \end{Bmatrix} \Rightarrow \left\{V_m = I_m R\cos\phi + I_m X_C \frac{I_m X_C\cos\phi}{I_m R} = \cos\phi\left(I_m R + \frac{I_m X_C^2}{R}\right)\right.$$

$$\cos\phi = \frac{V_m R}{I_m\left(R^2 + X_C^2\right)} = \frac{R}{Z}$$

$$0 = I_m R\operatorname{sen}\phi - \frac{I_m}{C\omega}\cos\phi \quad \left\{\tan\phi = \frac{\operatorname{sen}\phi}{\cos\phi} = \frac{\frac{I_m}{C\omega}}{I_m R} = \frac{\frac{1}{C\omega}}{R} = \frac{X_C}{R}\right\} \quad \phi = \arctan\left(\frac{X_C}{R}\right)$$

$$\begin{Bmatrix} Z^2 = R^2 + X_C^2 \\ \cos\phi = \frac{R}{Z} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} R = 0\,\Omega \\ \phi = \arctan\left(\frac{X_C}{R}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

La intensidad está adelantada respecto del voltaje.

La **potencia consumida en el condensador C es cero**:

$$\left\{v_C = V_C \operatorname{sen}(\omega t)\right\} \quad \left\{i_C = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(Cv_C) = \frac{d}{dt}\left[CV_C \operatorname{sen}(\omega t)\right] = CV_C\omega\cos(\omega t)\right\}$$

$$\overline{P}_C = \frac{1}{T}\int_0^T P dt = \frac{1}{T}\int_0^T v_C i_C \, dt = \frac{1}{T}\int_0^T CV_C^2\omega \operatorname{sen}(\omega t)\cos(\omega t) dt = \frac{CV_C^2\omega}{T}\int_0^T \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2\omega t) dt = 0$$

$$\left\{\int_0^T \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2\omega t) dt = -\frac{1}{2}\frac{1}{2\omega}\left[\cos(2\omega t)\right]_0^T = -\frac{1}{4\omega}\left[\cos(4\pi) - \cos 0\right] = 0\right\}$$

De las ecuaciones obtenidas sacamos las siguientes conclusiones:

1. La intensidad de la corriente alterna no se interrumpe con un condensador.

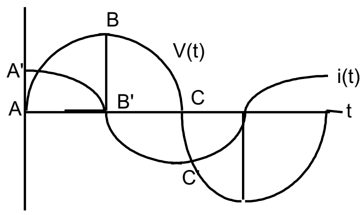
2. La intensidad en el condensador no está en fase con el voltaje del condensador, ya que la tangente de la diferencia de fase es positiva y, por tanto, la intensidad está adelantada respecto del voltaje.

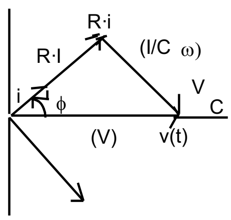
3. Si no consideramos la resistencia la intensidad estaría adelantada en 90º respecto del voltaje.

4. La resistencia que presenta el condensador al paso de la corriente llamada reactancia capacitativa es inversamente proporcional al valor de la capacidad del condensador C y a la pulsación (y a la frecuencia).

5. Mientras mayor sea la capacidad C y mayor la frecuencia de la corriente alterna menor es la reactancia capacitativa. Así, a altas frecuencias la corriente puede ser intensa aunque la capacidad sea pequeña.

6. Un condensador absorbe y libera energía alternativamente en periodos iguales de tiempo y, en el promedio, la potencia es cero y un condensador no realiza potencia disipativa en un circuito de corriente alterna.





Análisis de las gráficas voltaje e intensidad:

1. Cuando el voltaje se incrementa desde A hasta B, la carga sobre el condensador se incrementa y alcanza su valor máximo en B.

2. La corriente, o velocidad de flujo de carga, tiene un valor máximo positivo en el comienzo del proceso de carga en A', cuando no hay carga sobre el condensador y por lo tanto no hay voltaje sobre el condensador para oponerse al voltaje del generador.

3. Cuando el condensador está totalmente cargado en B, el voltaje del condensador tiene una magnitud igual a la del generador y completamente opuesta al voltaje del generador. El resultado es que la corriente decrece a cero en B'.

4. Mientras el voltaje del condensador decrece desde B a C, el flujo de carga sale del condensador en dirección opuesta a aquella del proceso de corriente de carga, como viene indicada por la corriente negativa desde B' a C'.

5. El voltaje y la corriente no están en fase y la corriente adelanta al voltaje en 90º.

6. El hecho que la corriente y el voltaje en un condensador tengan una diferencia de fase de 90º tiene una importante consecuencia desde el punto de vista de la potencia eléctrica.

8. Como la potencia eléctrica es el producto del voltaje y de la intensidad. Para un intervalo de tiempo desde los puntos A y B o desde A' y B' que tienen el voltaje y la intensidad positiva, la potencia instantánea es también positiva, significando que el generador está dándole energía al condensador.

9. Durante el período B y C o B' y C' la corriente es negativa mientras el voltaje permanece positivo, siendo la potencia negativa lo que significa que el condensador está retornando energía al generador.

Así la potencia se alterna entre valores positivos y negativos por iguales periodos de tiempo. En otras palabras, el condensador absorbe y da energía alternativamente. Consecuentemente, en promedio, la potencia es cero y un condensador o capacitor no consume energía en un circuito de corriente alterna.

7.5 Circuitos de corriente alterna (serie RCL). Impedancia

Vamos a analizar la relación entre la fem y la intensidad de corriente en un circuito de corriente alterna que tiene una resistencia (R), un condensador (C) y una autoinducción (L) en serie (circuitos serie RCL).

En los circuitos en serie RCL la oposición total al flujo de carga se llama impedancia del circuito que está formada parcialmente de la resistencia R, la reactancia capacitativa y la reactancia inductiva.

La fem alterna aplicada y la corriente alterna resultante: $\varepsilon = \varepsilon_m \operatorname{sen} \omega t \quad \left\{ i = I_m \operatorname{sen}\left(\omega t + \phi\right) \right.$

Para calcular la amplitud de la corriente y la diferencia de fase en un circuito serie RLC:

$$\varepsilon = v_R + v_L + v_C$$

Donde v_R, v_L y v_C son las diferencias de potencial en los extremos de la resistencia, la autoinducción y el condensador. Esta relación entre estas cuatro cantidades que varían con el tiempo permanece exacta en todos los instantes

$$v_R = iR = I_m R \operatorname{sen}\left(\omega t + \phi\right)$$
$$v_L = L\frac{di}{dt} = I_m L\omega \cos\left(\omega t + \phi\right) = I_m L\omega \operatorname{sen}\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$v_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{C}\int i dt = -I_m \frac{1}{C\omega}\cos\left(\omega t + \phi\right) = I_m \frac{1}{C\omega}\operatorname{sen}\left(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}\right)$$

Análisis de los resultados obtenidos:

1. La diferencia de potencial en los extremos de la resistencia está en fase con la intensidad.

2. La diferencia de potencial en los extremos de la autoinducción está adelantada en 90º respecto de la intensidad.

3. La diferencia de potencial en los extremos del condensador está retrasada en 90º respecto de la intensidad.

4. La diferencia de fase entre la fem y la intensidad va a depender de los valores de L, de C y de la pulsación (o de la frecuencia).

Obtención de la relación entre el voltaje y la intensidad analíticamente:

$$\varepsilon = v_R + v_L + v_C \quad \left\{ v_R = I_m R \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \right\} \quad \begin{cases} v_L = I_m L\omega \cos(\omega t + \phi) = I_m X_L \cos(\omega t + \phi) \\ v_C = -I_m \dfrac{1}{C\omega} \cos(\omega t + \phi) = -I_m X_C \cos(\omega t + \phi) \end{cases}$$

$$\varepsilon_m \operatorname{sen}(\omega t) = I_m R \operatorname{sen}(\omega t + \phi) + I_m X_L \cos(\omega t + \phi) - I_m X_C \cos(\omega t + \phi)$$
$$\varepsilon_m \operatorname{sen}(\omega t) = I_m R \operatorname{sen}(\omega t + \phi) + I_m (X_L - X_C) \cos(\omega t + \phi)$$
$$\varepsilon_m \operatorname{sen}(\omega t) = I_m R \left[\operatorname{sen}(\omega t)\cos\phi + \cos(\omega t)\operatorname{sen}\phi \right] + I_m (X_L - X_C)\left[\cos(\omega t)\cos\phi - \operatorname{sen}(\omega t)\operatorname{sen}\phi \right]$$
$$\begin{cases} \operatorname{sen}(\omega t): \ 1) \quad \varepsilon_m = I_m R \cos\phi - I_m (X_L - X_C)\operatorname{sen}\phi \\ \cos(\omega t): \ 2) \quad 0 = I_m R \operatorname{sen}\phi + I_m (X_L - X_C)\cos\phi \end{cases}$$

Con las dos ecuaciones anteriores sacamos las dos conclusiones siguientes:

a) Elevando al cuadrado las ecuaciones 1) y 2) y sumándolas tenemos

$$\left. \begin{cases} 1) \quad \varepsilon_m = I_m R \cos\phi - I_m (X_L - X_C)\operatorname{sen}\phi \\ 2) \quad 0 = I_m R \operatorname{sen}\phi + I_m (X_L - X_C)\cos\phi \end{cases} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 1) \quad (\varepsilon_m)^2 = \left[I_m R \cos\phi - I_m (X_L - X_C)\operatorname{sen}\phi \right]^2 \\ 2) \quad 0 = \left[I_m R \operatorname{sen}\phi + I_m (X_L - X_C)\cos\phi \right]^2 \end{cases}$$

$$(\varepsilon_m)^2 = (I_m R)^2 + \left[I_m (X_L - X_C) \right]^2 \quad \left\{ \varepsilon_m = I_m \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = I_m Z \right\} \quad \left\{ \varepsilon_{ef} = I_{ef} Z \right.$$

El valor de **Z**, que se llama la **impedancia** del circuito. Se relaciona con los elementos del circuito (R, L, C y ω) mediante la expresión anterior. Siendo $\mathbf{X_L}$ y $\mathbf{X_C}$ las reactancias inductiva y capacitativa. Tanto la impedancia como las reactancias y la resistencia se miden en ohmios, Ω.

b) A partir de las ecuaciones tenemos

$$\left. \begin{cases} \varepsilon_m = I_m R \cos\phi - I_m (X_L - X_C)\operatorname{sen}\phi \\ 0 = I_m R \operatorname{sen}\phi + I_m (X_L - X_C)\cos\phi \end{cases} \right\} \Rightarrow$$

$$\varepsilon_m = I_m R \cos\phi - I_m (X_L - X_C) \frac{\left(-I_m (X_L - X_C)\cos\phi \right)}{I_m R} = \cos\phi \left(I_m R + \frac{I_m (X_L - X_C)^2}{R} \right)$$

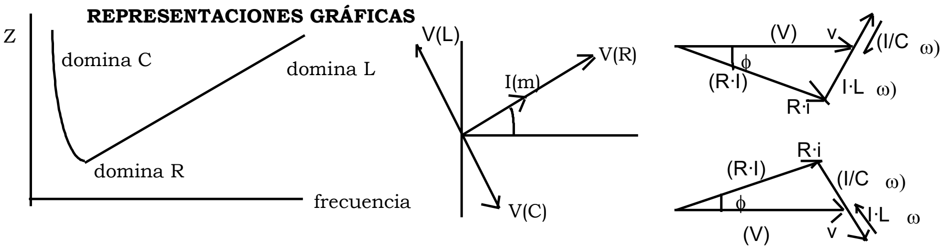
$$\varepsilon_m = \cos\phi \left(\frac{I_m \left[R^2 + (X_L - X_C)^2 \right]}{R} \right) \quad \left\{ \cos\phi = \frac{\varepsilon_m R}{I_m \left[R^2 + (X_L - X_C)^2 \right]} = \frac{R}{Z} \right.$$

$$0 = I_m R \operatorname{sen}\phi + I_m\left(X_L - X_C\right)\cos\phi \quad \begin{cases} \tan\phi = \dfrac{\operatorname{sen}\phi}{\cos\phi} = \dfrac{-I_m\left(X_L - X_C\right)}{I_m R} = -\dfrac{X_L - X_C}{R} \\ \phi = \arctan\left(-\dfrac{X_L - X_C}{R}\right) \end{cases}$$

Podemos tener dos casos:

1. Que el voltaje en los extremos de la autoinducción L sea mayor que en los extremos del condensador y la intensidad va retrasada respecto del voltaje.

2. Que el voltaje en los extremos del condensador sea mayor que en los extremos de la autoinducción y la intensidad va adelantada respecto del voltaje.



$$V_m = I_m\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = I_m\sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2} = I_m Z \quad \left\{V_{ef} = I_{ef} Z\right.$$

$$\phi = \arctan\left(-\frac{X_L - X_C}{R}\right) \quad \left\{\phi = \arccos\frac{R}{Z}\right.$$

<u>7.6 Resonancia</u>

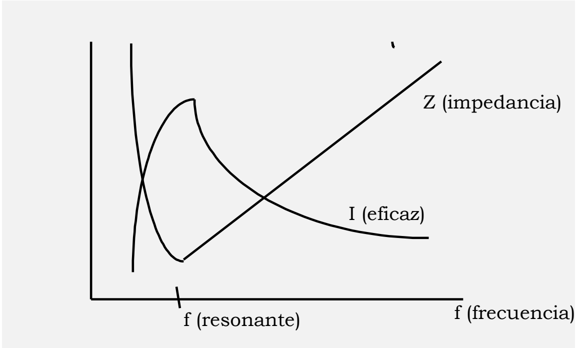
En Física el fenómeno de la resonancia ocurre cuando la frecuencia de la fuerza vibrante, es decir, la que produce la vibración se iguala exactamente a la frecuencia natural del objeto sobre el cual se aplica la fuerza.

En el caso eléctrico la fuerza vibrante es proporcionada por el campo eléctrico oscilante que está relacionado con el voltaje suministrado por el generador. Para que se produzca la resonancia en los circuitos eléctricos la diferencia de fase entre la intensidad y el voltaje ha de ser nula, es decir, **el voltaje y la intensidad han de tener la misma fase**.

El comportamiento de la corriente y el voltaje en los circuitos serie RCL da lugar a la condición de resonancia. Para que la Intensidad y la fem estén en fase se ha de cumplir que la reactancia inductiva y la reactancia capacitativa sean iguales. Lo que llevaría a que la impedancia sea mínima. En este caso, se dice que el circuito está en resonancia:

$$\phi = \arctan\left(-\frac{X_L - X_C}{R}\right) = 0 \quad \left\{X_L - X_C = 0\right\} \quad \left\{L\omega = \frac{1}{C\omega}\right\} \quad \left\{\omega_{res} = \frac{1}{\sqrt{LC}}\right.$$

La frecuencia resonante es determinada por la autoinducción y la capacidad, pero no por la resistencia. Efectos de la resonancia en el comportamiento de un circuito



7.7 Potencia en corriente alterna

La potencia instantánea $P_{(t)} = \varepsilon_{(t)} \cdot i_{(t)}$

La **potencia media consumida** $\overline{P} = \frac{1}{2} I_m \varepsilon_m \cos\phi = I_{ef} \varepsilon_{ef} \cos\phi$

Demostración:

$$\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P dt = \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon i\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\varepsilon_m \operatorname{sen}(\omega t)\cdot I_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi)\right] dt$$

$$\overline{P} = \frac{\varepsilon_m I_m}{T}\int_0^T \left[\operatorname{sen}(\omega t)\cdot \operatorname{sen}(\omega t + \phi)\right] dt$$

$$\operatorname{sen}(\omega t)\cdot \operatorname{sen}(\omega t + \phi) = \operatorname{sen}(\omega t)\left[\operatorname{sen}(\omega t)\cos\phi + \cos(\omega t)\operatorname{sen}\phi\right]$$

$$\overline{P} = \frac{\varepsilon_m I_m}{T}\int_0^T \left[\operatorname{sen}(\omega t)\left[\operatorname{sen}(\omega t)\cos\phi + \cos(\omega t)\operatorname{sen}\phi\right]\right] dt$$

$$\overline{P} = \frac{\varepsilon_m I_m}{T}\left[\cos\phi\int_0^T \operatorname{sen}^2(\omega t)\, dt + \operatorname{sen}\phi\int_0^T \operatorname{sen}(\omega t)\cos(\omega t)\, dt\right]$$

$$\left\{\int_0^T \operatorname{sen}^2(\omega t)\, dt = \int_0^T \frac{1}{2}(1-\cos 2\omega t) dt = \frac{T}{2}\right\} \quad \left\{\int_0^T \operatorname{sen}(\omega t)\cos(\omega t)\, dt = \frac{1}{2}\int_0^T \operatorname{sen}(2\omega t)\, dt = 0\right\}$$

$$\overline{P} = \frac{\varepsilon_m I_m}{T}\cos\phi \frac{T}{2} = \frac{\varepsilon_m I_m}{2}\cos\phi = \varepsilon_{ef} I_{ef} \cos\phi$$

El factor $\cos\phi$ **se le conoce con el nombre de factor de potencia**.

$$\varepsilon_{ef} = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{2}} = \sqrt{\overline{\varepsilon^2}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (\varepsilon_m \operatorname{sen}\omega t)^2 dt}$$

La diferencia de fase entre la intensidad y el voltaje tiene un efecto muy importante sobre la potencia disipada por el circuito. Recordamos que sobre un periodo de tiempo sólo la resistencia consume potencia.

7.8 Problemas de «Corriente Alterna»

1) Una bobina de 100 espiras, de 20 cm^2 cada una, gira a 50 r.p.m. en un campo magnético uniforme de 1 T. a) Escribir la expresión de la fem inducida e indicar su valor eficaz; b) ¿cuál sería la intensidad si la resistencia del circuito es de 20 ohmios?. [a) $\varepsilon = \frac{\pi}{3}\,\text{sen}\left(\frac{10\pi}{6}t\right)\text{V}$; $\varepsilon_{ef} = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}}\text{V}$; b) $I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{60\sqrt{2}}\text{A}$]

2) Un circuito serie de una autoinducción, L = 0,1 H, y una resistencia, R = 100 Ω, está alimentado por un generador cuya tensión eficaz es de 4 V y cuya frecuencia es de 1.000 Hz. Calcule: a) el valor máximo de la caída de tensión en la autoinducción y el desfase entre la tensión del generador y la intensidad; b) la capacidad de un condensador, conectado en serie con R y L, para que la intensidad sea máxima. [a) 5,586 V; la tensión adelanta 81º; I_{ef} = 6,287 mA; b) $2{,}533\cdot10^{-7}$ F]

3) Un circuito serie RCL está conectado a un alternador de frecuencia 50 Hz y 120 V de tensión máxima. Calcula: a) la inductancia, la capacitancia y la impedancia del circuito; b) el valor instantáneo de la intensidad. Datos: R = 20 Ω; L = 1 H; C = $1{,}0\cdot10^{-5}$ F. [a) X_L = 314,16Ω; X_C = 318,31Ω; Z = 20,426Ω; b) $i = 5{,}87\,\text{sen}\left(2\pi 50t + 0{,}20\right)$]

4) Dos elementos A y B se conectan en serie a un generador de corriente alterna. Indicar el tipo de elementos y calcular sus valores si el voltaje entre los extremos de los dos y la intensidad vienen dados por las ecuaciones: $v = 100\,\text{sen}\left(50t + \frac{3\pi}{8}\right)\text{V}$; $i = 20\,\text{sen}\left(50t + \frac{\pi}{8}\right)\text{A}$. [L = 0,01 H; R = 3,5 Ω]

5) En un circuito serie RCL los valores eficaces de la intensidad y del voltaje son 10 A y 300 V y la intensidad está retrasada respecto de la tensión 60º. Calcule: a) la impedancia; b) la reactancia; c) la resistencia. [a) 30 Ω; b) 26 Ω; c) 15 Ω]

6) En un circuito serie RCL si el valor máximo de la tensión del generador es de 200 V y su frecuencia de 50 Hz, calcular: a) valor eficaz de la intensidad; b) factor de potencia; c) potencia media. Datos: R = 200 Ω; L = 1 mH; C = 2 μF. [a) 0,0882 A; b) 0,125; c) 1,56 W]

7) Un circuito conectado a un generador de 110 V y 60 Hz consume 300 W. El factor de potencia es 0,6 y la intensidad está retrasada respecto de la tensión. a) Determinar qué elemento debe conectarse en serie para que el factor de potencia sea 1,0; b) ¿cuál será en ese caso la potencia?. [a) Un condensador de valor $1{,}37\cdot10^{-4}$ F; b) 833,33 W]

8) Una bombilla de 60 W a 125 V se quiere conectar a una red de 220 V y 50 Hz. Para que funcione correctamente, se le conecta en serie un condensador de capacidad C. Calcule el valor de C necesario y la potencia consumida. [$8{,}44\cdot10^{-6}$ F y 60 W]

9) Un circuito serie RCL se conecta a un generador de corriente alterna. Calcule: a) la lectura del voltímetro al colocarlo en paralelo con cada uno de los elementos del circuito; b) factor de potencia y frecuencia de resonancia del circuito. Datos: V_{ef}(generador) = 100 V; $\nu = \frac{1.000}{2\pi}\text{Hz}$; R = 200$\Omega$; L = 0,05 H; C = $2{,}0\cdot10^{-4}$ F. [a) 97.56 V; 24,5 V y 2,45 V; b) 0,976 y 50,3 Hz]

10) Una resistencia inductiva (R = 300Ω y L = 1 H) y un condensador de $2{,}0\cdot10^{-5}$ F se unen a la tensión alterna: $v = 120\sqrt{2}\,\text{sen}\left(100\pi t\right)\text{V}$. Calcule las tensiones eficaces en los bornes de cada aparato. [130,3 V en la resistencia inductiva y 47,7 V en el condensador]

11) Cuando al carrete de un determinado electroimán se le aplica una tensión continua de 240 V, la intensidad de la corriente que lo atraviesa es de 12 A. Cuando se le aplica una tensión alterna de amplitud 240 V y 50 Hz de frecuencia, la intensidad es de 6 A. Calcule la inductancia del carrete y obtenga la expresión de la intensidad instantánea sabiendo que $v = V_m \operatorname{sen}(\omega t)$. [63,66 mH; $i = 8{,}50\,\mathrm{A}\operatorname{sen}\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$].

12) Una bobina, de resistencia $300\,\Omega$ y autoinducción 1 H, y un condensador, de 0,020 mF, se conectan en serie a una tensión alterna de 50 Hz y valor eficaz 240 V. Determine: a) la lectura de un voltímetro conectado en paralelo con la bobina; b) el factor de potencia y la frecuencia de resonancia del circuito. [a) 258 V; b) 0,742 y 35,6 Hz]

13) Un circuito serie consta de una resistencia R, de $20\,\Omega$, y una bobina, de resistencia R_L y autoinducción L desconocidas. Al conectarlo a una tensión, $v = 120\cos(100t)\,\mathrm{V}$, los valores máximos de las diferencias de potencial entre los extremos de la resistencia y de la bobina son 60 V y 90 V, respectivamente. Calcule: a) los valores de la resistencia de la bobina y la autoinducción; b) ¿qué condensador habría que añadir al circuito para que le factor de potencia fuese igual a la unidad? [a) R_L = 7,5 Ω y L = 0,29 H; b) 0,34 mF]

14) Utilizando una autoinducción L, de 5 mH, y una resistencia R, de $60\,\Omega$, se desea montar un circuito serie RCL que conectado a la red (220 V y 50 Hz), permita el paso de una intensidad de corriente máxima. Calcule: a) la capacidad del condensador que debe utilizarse para conseguir dicho efecto; b) la caída de tensión y desfase entre tensión e intensidad en cada uno de los elementos del circuito. [a) 2,026 mF; b) 220 V y 5,76 V]

15) Un generador tiene de ecuación $\varepsilon = 25\operatorname{sen}(377t)\,\mathrm{V}$, siendo la fem máxima de 25,0 V y la frecuencia angular de 377 rad/s. Se conecta a un condensador de $4{,}15\cdot10^{-6}$ F. Calcula: a) el valor máximo de la intensidad de corriente y el valor de la fem del generador en ese instante; b) el valor de la intensidad de corriente en el instante en el que la fem es de -12,5 V y está incrementando en magnitud. [a) I_m = 0,039 A y ε = 0 V; b) i = 0,034 A]

16) Una bobina, que tiene una inductancia de L = 0,088 H y una resistencia desconocida, y un condensador de $9{,}4\cdot10^{-7}$ F se conectan en serie a un generador de corriente alterna de frecuencia 930 Hz. Si la constante de fase entre el voltaje aplicado y la intensidad de corriente vale 75º, calcula la resistencia de la bobina. [$89\,\Omega$]

17) Un generador proporciona un voltaje sinusoidal de 75,0V de voltaje eficaz y 550Hz de frecuencia. Se conecta a los extremos de los tres elementos RCL que están en serie, siendo la resistencia R = $5\,\Omega$, el condensador C = $4{,}70\cdot10^{-6}$ F y la bobina L = 0,0250 H. Calcula: a) lo que medirá un voltímetro conectado en paralelo a resistencia y después al condensador y a la bobina; b) la potencia media suministrada por el generador y la consumida o disipada en cada uno de los tres elementos. [a) 14,8 V y 73,52 V; b) 43,84 W por el generador; 43,84 W en la resistencia R y 0 W en el condensador C y en la bobina L]