

7. «Introducción a la Física moderna»

- 7.1 La crisis de la física clásica: relatividad y física cuántica.
- 7.2 La relatividad especial
 - 7.2.1 La relatividad Galileana. Las transformaciones de Galileo. El principio clásico de relatividad de Galileo.
 - 7.2.2 El principio de la relatividad de Einstein. La velocidad de la luz es constante.
 - 7.2.3 Eventos y mediciones.
 - 7.2.4 La relatividad de la simultaneidad.
 - 7.2.5 La dilatación del tiempo.
 - 7.2.6 La contracción de la longitud. El intervalo espacio-tiempo.
 - 7.2.7 Las transformaciones de Lorentz. Las transformaciones de Lorentz de la velocidad.
 - 7.2.8 Momento lineal relativista.
 - 7.2.9 Energía relativista. Equivalencia masa-energía. Conservación de la energía.
- 7.3 Dificultades de la teoría clásica: radiación térmica y efecto fotoeléctrico.
 - 7.3.1 La radiación térmica.
 - 7.3.2 El efecto fotoeléctrico.
 - 7.3.2.1 Características del efecto fotoeléctrico:
 - 7.3.2.2 Interpretación clásica del efecto fotoeléctrico
 - 7.3.2.3 El potencial de frenada
 - 7.3.2.4 Límites de la interpretación clásica
 - 7.3.2.5 Explicación de Einstein
 - 7.3.2.6 Fotones
- 7.4 Dualidad onda-corpúsculo. Hipótesis de De Broglie.
 - 7.4.1 Análisis del fenómeno dualidad onda-corpúsculo: Partículas y campos.
 - 7.4.2 Principio de incertidumbre de Heisenberg.

7.1 La crisis de la física clásica

Comenzamos estudiando la física de hace 350 años con los descubrimientos de Newton. Hemos aprendido el movimiento de partículas, la conservación de la energía, la física de las ondas y la interacción electromagnética que hace que los átomos permanezcan unidos y generen ondas de luz.

La mecánica de Newton y el electromagnetismo de Maxwell fueron dos pilares de la ciencia hasta finales del siglo XIX y ha sido la base para la ingeniería y la ciencia aplicada en el XX. A pesar de los éxitos de estas teorías, una serie de descubrimientos que comenzaron en 1900 y continuaron en las primeras décadas del siglo XX alteraron profundamente nuestro conocimiento del universo en el nivel más básico. Estos descubrimientos forzaron a los científicos a reconsiderar la propia naturaleza del espacio y el tiempo y a desarrollar nuevos modelos de luz y materia.

Los descubrimientos y las nuevas ideas llevaron a principios del siglo XX a dos nuevas teorías: la relatividad y la física cuántica. Estas nuevas teorías forman la base de la nueva física y son la práctica en el siglo XXI.

Relatividad

En 1900 Einstein estaba disconforme con las paradojas y las dificultades en la teoría de Maxwell del electromagnetismo. Einstein fue capaz de demostrar que el electromagnetismo es una teoría auto-consistente sólo si la velocidad de las ondas electromagnéticas (la velocidad de la luz) es la misma en todos los sistemas de referencia inercial, no importa cómo los sistemas de referencia puedan moverse con respecto a otros o a la fuente de la onda. Pero este extraño comportamiento de una onda viajando puede ser cierto solamente si el **espacio y el tiempo** son diferentes para dos experimentadores en movimiento relativo uno del otro.

Necesitaremos explorar qué significa que el espacio y el tiempo sean diferentes para experimentadores diferentes. Ello nos llevará a descubrir la contracción de longitud o la velocidad límite cósmica de las partículas. Posteriormente nos llevará a la famosa ecuación de la física: $E = m \cdot c^2$.

Física cuántica

Hemos visto que la luz algunas veces se comporta como una partícula y que los electrones manifiestan comportamiento ondulatorio.

Con el descubrimiento de la estructura de los átomos que estos se pueden dividir se comprobó que la física de Newton y Maxwell era incapaz de explicar el comportamiento de los átomos o la luz que ellos emiten.

Prestaremos atención al **efecto fotoeléctrico**. El experimento es sencillo y los datos son claros, pero hay dificultades para explicarlos. Fue Einstein quien dio una interpretación original del efecto fotoeléctrico en términos de cuantizar la energía, es decir, la idea de que la energía de la onda de luz está incluida en pequeños paquetes que llamamos **fotones**.

Estudiaremos el modelo atómico de Bohr que aplica la cuantización de la energía a los átomos y fue el primero en explicar el espectro de emisión de los átomos.

7.2 La relatividad especial

La relatividad no es una idea nueva en la ciencia, con Newton se han aplicado para estudiar el movimiento en distintos sistemas de referencia. Las transformaciones de Galileo.

Einstein pensó que la relatividad se aplicaría a todas las leyes de la física, no sólo de la mecánica. La dificultad es que algunos aspectos de la relatividad parecen incompatibles con las leyes del electromagnetismo, en particular las que gobiernan la propagación de las ondas de luz.

Es por lo que muchos científicos pensaron que la relatividad no se aplica al electromagnetismo. Einstein fue capaz de ver que la incompatibilidad surge desde suposiciones acerca del espacio y tiempo, suposiciones que nunca se habían cuestionado porque siempre se las consideró obviamente ciertas. Por lo que en lugar de abandonar las ideas de la relatividad, Einstein cambió nuestro conocimiento del espacio y tiempo.

Lo especial de la relatividad especial

La primera publicación de Einstein sobre relatividad es de 1905, que trató exclusivamente con sistemas de referencia inerciales, que son sistemas que se mueven uno respecto del otro a velocidad constante. Diez años después, Einstein publicó una teoría que abarca más de relatividad ya que considera movimientos acelerados y su conexión con la gravedad. La segunda teoría, por ser más general, se llama **relatividad general**. La relatividad general es la teoría que describe los agujeros negros, el espacio-tiempo curvado y la evolución del universo.

El movimiento a velocidad constante es un caso especial de movimiento, es decir, movimiento con aceleración cero. Por lo tanto, la primera teoría de la relatividad se conoce como **relatividad especial**. Es especial en el sentido de ser restrictiva, es un caso especial de su teoría más general, no especial en el sentido de excepcional. La relatividad especial, con sus conclusiones de la dilatación del tiempo y de la contracción de la longitud, es lo que vamos a estudiar.

7.2.1 La relatividad Galileana

Un sistema de referencia es un sistema de coordenadas donde el experimentador va equipado para medir distancias, tiempo y otro equipamiento necesario que mida la posición y el tiempo de un objeto moviéndose. El sistema de referencia lleva asociado que se extienda en todas direcciones, los experimentadores están en reposo en el sistema de referencia y el número de experimentadores y la calidad de su equipamiento son suficientes para medir posiciones y velocidades a cualquier nivel de precisión necesaria.

Los sistemas de referencia inerciales implican que la velocidad relativa es constante. Un sistema de referencia inercial es un sistema en que se cumple la 1ª ley de Newton, la ley de inercia es válida. En particular, un sistema de referencia inercial es aquel en el que una partícula aislada, sobre la que no actúan fuerzas, permanece en reposo o se mueve en línea recta con velocidad constante.

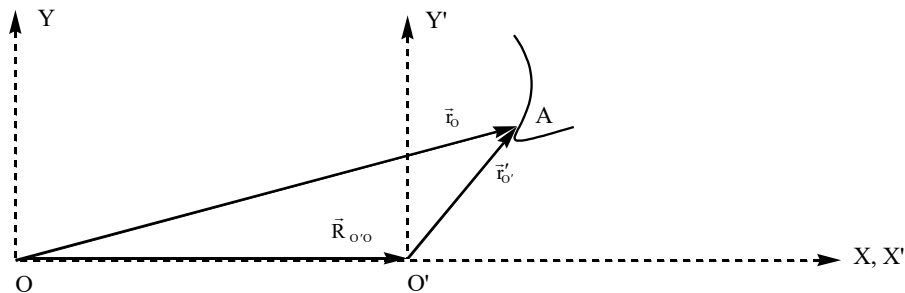
Cualquier sistema de referencia que se mueva a velocidad constante con respecto a un sistema inercial es también un sistema inercial. Por el contrario, un sistema de referencia que acelera con respecto a un sistema de referencia inercial no es un sistema de referencia inercial.

Un sistema de referencia inercial es una idealización. Un verdadero sistema de referencia inercial deberá estar flotando en un espacio profundo, alejado de cualquier influencia de la gravedad. En la práctica un laboratorio terrestre es una buena aproximación de un sistema de referencia inercial porque la aceleración asociada con la rotación de la tierra y el movimiento alrededor del sol son muy pequeños para influir en los experimentos.

Las transformaciones de Galileo

Un sistema se llama **inercial** si se comporta como una partícula libre, es decir, no está sujeto a interacción, y por tanto o está **en reposo o se mueve con velocidad constante y sin aceleración**, por lo que no ha de rotar. Dos sistemas se dice que son inerciales uno con respecto del otro si están en reposo relativo o se mueven con velocidad constante uno con respecto del otro.

Movimiento relativo del objeto A respecto del sistema fijo O y del sistema móvil O':



Características de los sistemas inerciales: Sean los Sistemas OXYZ y O'X'Y'Z' que se encuentran a una distancia R los dos centros. Una partícula situada en el punto P tendrá de coordenadas (x,y,z) para el primero y (x',y',z') para el segundo. Relacionados por:

$$\boxed{\vec{r}_O = \vec{R}_{O'O} + \vec{r}'_O} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{r}_O}{dt} = \frac{d\vec{R}_{O'O}}{dt} + \frac{d\vec{r}'_O}{dt} \\ \vec{v}_O = \vec{V}_{O'O} + \vec{v}'_O \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{v}_O}{dt} = \frac{d\vec{V}_{O'O}}{dt} + \frac{d\vec{v}'_O}{dt} \\ \vec{a}_O = \vec{a}_{O'O} + \vec{a}'_O \end{array} \right\} \boxed{\vec{a}_{O'O} = 0} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_O = \vec{a}'_O \\ \vec{F}_O = \vec{F}'_O \end{array} \right.$$

Para los Sistemas Inerciales tenemos que son iguales las leyes del movimiento, es decir, miden las mismas aceleraciones de la partícula situada en P y las mismas Fuerzas aplicadas en P. Esto es lo que se denomina el

El principio clásico de relatividad de Galileo: *las leyes de la mecánica son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales.*

El principio de la relatividad se establece con las leyes de la mecánica, no con los valores que son necesarios para satisfacer dichas leyes.

La colisión elástica proporciona un buen ejemplo del uso de sistemas de referencia. El principio de conservación del momento lineal: $\vec{p}_i = \vec{p}_f$. El coeficiente de restitución: $e = 1 = -\frac{v_2 - v_1}{v_2 - v_1}$.

Ejemplo de aplicación en choque elástico: La colisión de dos bolas $m_1 = 200$ g y $m_2 = 100$ g, con velocidades iniciales $v_1 = 2$ m/s y $v_2 = -3$ m/s. En el sistema inercial O (sistema laboratorio) en reposo las velocidades de las bolas después de la colisión:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ v_{2f} - v_{1f} = -(v_{2i} - v_{1i}) \\ v_{2f} = v_{1f} - v_{2i} + v_{1i} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 (v_{1f} - v_{2i} + v_{1i}) \\ (m_1 - m_2) v_{1i} + 2m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_{1f} \end{array} \right\} v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2) v_{1i} + 2m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 (v_{2f} + v_{2i} - v_{1i}) + m_2 v_{2f} \Rightarrow v_{2f} = \frac{2m_1 v_{1i} + (m_2 - m_1) v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

Las velocidades de las dos bolas en O' antes y después de la colisión:

$$\vec{v}'_{O'} = \vec{v}_O - \vec{V}_{O'O} \left\{ \begin{array}{l} v'_{1i} = v_{1i} - V_{O'O} = 2 \frac{m}{s} - (-3 \frac{m}{s}) = 5 \frac{m}{s} \\ v'_{2i} = v_{2i} - V_{O'O} = -3 \frac{m}{s} - (-3 \frac{m}{s}) = 0 \frac{m}{s} \end{array} \right.$$

$$v'_{1f} = \frac{(m_1 - m_2) v'_{1i} + 2m_2 v'_{2i}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v'_{1i} = \frac{0,200 \text{ kg} - 0,100 \text{ kg}}{0,300 \text{ kg}} \times 5 \frac{m}{s} = 1,67 \frac{m}{s}$$

$$v'_{2f} = \frac{2m_1 v'_{1i} + (m_2 - m_1) v'_{2i}}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v'_{1i} = \frac{0,400 \text{ kg}}{0,300 \text{ kg}} \times 5 \frac{m}{s} = 6,67 \frac{m}{s}$$

Después de la colisión en el sistema O

$$v_{1f} = v'_{1f} + V_{O'O} = 1,67 \frac{m}{s} + (-3 \frac{m}{s}) = -1,33 \frac{m}{s}$$

$$v_{2f} = v'_{2f} + V_{O'O} = 6,67 \frac{m}{s} + (-3 \frac{m}{s}) = 3,67 \frac{m}{s}$$

$$\text{Sist. O} \left\{ \begin{array}{l} P_i = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = P_f \\ P_i = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = 0,200 \text{ kg} \times 2 \frac{m}{s} + 0,100 \text{ kg} \times (-2 \frac{m}{s}) = 0,1 \text{ kg} \cdot \frac{m}{s} \\ P_f = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = 0,200 \text{ kg} \times (-1,33 \frac{m}{s}) + 0,100 \text{ kg} \times 3,67 \frac{m}{s} = 0,1 \text{ kg} \cdot \frac{m}{s} \end{array} \right\} P_i = P_f$$

$$\text{Sist. O'} \left\{ \begin{array}{l} P'_i = m_1 v'_{1i} + m_2 v'_{2i} = m_1 v'_{1f} + m_2 v'_{2f} = P'_f \\ P'_i = m_1 v'_{1i} + m_2 v'_{2i} = 0,200 \text{ kg} \times 5 \frac{m}{s} + 0,100 \text{ kg} \times (0 \frac{m}{s}) = 1,0 \text{ kg} \cdot \frac{m}{s} \\ P'_f = m_1 v'_{1f} + m_2 v'_{2f} = 0,200 \text{ kg} \times 1,67 \frac{m}{s} + 0,100 \text{ kg} \times 6,67 \frac{m}{s} = 1,0 \text{ kg} \cdot \frac{m}{s} \end{array} \right\} P'_i = P'_f$$

Ejemplo para hallar:

Dos bolas $m_1 = 300$ g y $m_2 = 100$ g, con velocidades iniciales $v_{1x} = 2$ m/s y $v_{2x} = -4$ m/s. Determina las velocidades de las bolas después del choque medidas en el sistema laboratorio O y en sistema O' sobre la bola 2 en reposo.

Solución

Las velocidades se miden en el sistema laboratorio O (reposo), siendo el sistema O' ($V_{O'O} = -4 \text{ m/s}$) el de la segunda bola. La transformación Galileana de estas velocidades a O':

$$v'_{1i} = v_{1i} - V_{O'O} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} - (-4 \frac{\text{m}}{\text{s}}) = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v'_{2i} = v_{2i} - V_{O'O} = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}} - (-4 \frac{\text{m}}{\text{s}}) = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Después de la colisión en O':

$$v'_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)v'_{1i} + 2m_2v'_{2i}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v'_{1i} = \frac{0,300 \text{ kg} - 0,100 \text{ kg}}{0,400 \text{ kg}} \times 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v'_{2f} = \frac{2m_1v'_{1i} + (m_2 - m_1)v'_{2i}}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v'_{1i} = \frac{0,600 \text{ kg}}{0,400 \text{ kg}} \times 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{1f} = v'_{1f} + V_{O'O} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} + (-4 \frac{\text{m}}{\text{s}}) = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{2f} = v'_{2f} + V_{O'O} = 9 \frac{\text{m}}{\text{s}} + (-4 \frac{\text{m}}{\text{s}}) = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\left. \begin{aligned} P_i &= m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = P_f \\ P_i &= m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = 0,300 \text{ kg} \times 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 0,100 \text{ kg} \times (-4 \frac{\text{m}}{\text{s}}) = 0,2 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ P_f &= m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = 0,300 \text{ kg} \times (-1,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}) + 0,100 \text{ kg} \times 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,2 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} P'_i &= m_1 v'_{1i} + m_2 v'_{2i} = m_1 v'_{1f} + m_2 v'_{2f} = P'_f \\ P'_i &= m_1 v'_{1i} + m_2 v'_{2i} = 0,300 \text{ kg} \times 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 0,100 \text{ kg} \times (0 \frac{\text{m}}{\text{s}}) = 1,8 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ P'_f &= m_1 v'_{1f} + m_2 v'_{2f} = 0,300 \text{ kg} \times 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 0,100 \text{ kg} \times 9 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1,8 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned} \right\}$$

7.2.2 El principio de la relatividad de Einstein

El siglo XIX fue una era de la óptica y del electromagnetismo. Thomas Young demostró en 1801 que la luz es una onda y a mitad de siglo se desarrollaron técnicas para medir la velocidad de la luz. Faraday descubrió la inducción electromagnética en 1831, que llevaron a Maxwell en 1864 a la conclusión de que la luz es una onda electromagnética.

Si la luz es una onda, ¿cuál es el medio en que viaja?. Esta fue quizás la cuestión científica más importante de la segunda mitad del siglo XIX. Se asumió que viajaba en un medio llamado éter. Los experimentos para medir la velocidad de la luz se consideraron que esta viajaba a través del éter. ¿Pero qué es el éter?, ¿cuáles son sus propiedades?, podemos recoger una jarra llena de éter para estudiarlo?. A pesar de la importancia de estas cuestiones, los esfuerzos experimentales para detectar el éter o medir sus propiedades siguieron llegando con las manos vacías.

La teoría de Maxwell del electromagnetismo no sirvió de nada para salir de esta situación. Lo más importante de la teoría de Maxwell fue la predicción de que las ondas de luz viajan con velocidad

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3,0 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 300 \frac{\text{m}}{\mu\text{s}}$$

Esta es una predicción muy específica pero con poco margen de maniobra. La dificultad con esta predicción específica fue la implicación que las leyes de Maxwell del electromagnetismo son válidas sólo en el sistema de referencia del éter. Después de todo la velocidad de la luz será mayor o menor que c en un sistema de referencia moviéndose a través del éter, como ocurre con la velocidad del sonido que es diferente a alguien que se mueva a través del aire.

Cuando terminó el siglo XIX parecía que la teoría de Maxwell no obedecía el principio clásico de relatividad. El hecho es que nadie ha sido capaz de detectar el éter lo que significa que no se podrá identificar el único sistema de referencia en el que trabajan las ecuaciones de Maxwell.

En este estado de confusión Albert Einstein dejó su marca en el mundo. Las ondas de luz presentan una dificultad lógica. Una onda electromagnética se sostiene por el hecho de que un campo magnético cambiante induce un campo eléctrico y un campo eléctrico cambiante induce un campo magnético. Pero para alguno que se mueva con la onda, *los campos no pueden cambiar*. ¿Cómo puede ser una onda electromagnética bajo estas circunstancias?.

Después de algunos años de pensamiento acerca de la conexión entre electromagnetismo y sistemas de referencia llevó a Einstein a la conclusión que todas las leyes de la física, no las leyes de la mecánica, obedecerán el principio de relatividad. En otras palabras, el principio de relatividad es una declaración fundamental acerca de la naturaleza del universo físico. Así podemos quitar la restricción en el principio de Galileo de relatividad y establecer un principio más general

El principio de la relatividad: *Todas las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales.*

La velocidad de la luz es constante

Si las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo son leyes de la Física, de acuerdo al principio de relatividad, las ecuaciones de Maxwell deben cumplirse en cada sistema de referencia inercial. Al principio esto parece ser una declaración sin importancia, equivalente a decir que la ley de conservación del momento lineal es verdadera en todo sistema inercial. Pero siguiendo la lógica:

1. Las ecuaciones de Maxwell son verdaderas en todos los sistemas de referencia inerciales.
2. Las ecuaciones de Maxwell predicen que las ondas electromagnéticas, incluyendo la luz, viajan a la velocidad $c = 3,00 \cdot 10^8$ m/s.
3. Por tanto, **la luz viaja a la velocidad c en todos los sistemas de referencia inerciales.**

Las implicaciones de esta conclusión. Todos los experimentadores, sin tener en cuenta de cómo ellos se mueven unos con respecto a cada otro, encuentran que todas las ondas de luz, sin tener en cuenta la fuente, viajan en su sistema de referencia con la misma velocidad c .

Así en la década de los años 1930, los físicos R.J. Kennedy y E.M. Thorndike utilizaron la propia Tierra como un laboratorio. La velocidad de la Tierra cuando se mueve alrededor del Sol describiendo un círculo es aproximadamente de 30.000 m/s. La velocidad relativa en enero difiere en 60.000 m/s de su velocidad en julio, cuando la Tierra se mueve en dirección opuesta. Utilizaron un interferómetro sensible y estable para demostrar que los valores numéricos de la velocidad de la luz en enero y julio difiere en menos de 2 m/s.

Experimentos más recientes han usado partículas elementales inestables, llamadas mesones π , que se desintegran en fotones de luz de alta energía. Los mesones π , creados en el acelerador de partículas, se mueven en el laboratorio al 99,975% de la velocidad de la luz, siendo su velocidad $v = 0,99975 \cdot c$, cuando ellos emiten fotones a la velocidad c en el sistema de referencia mesón. Por ello, en el sistema laboratorio esperamos que los fotones se muevan con velocidad $c + v = 1,99975 \cdot c$. Sin embargo, la medida de la velocidad de los fotones en el laboratorio fue de $3 \cdot 10^8$ m/s.

En resumen, cada experimento que ha intentado medir la velocidad de la luz en diferentes sistemas de referencia se ha encontrado que la luz viaja a $3 \cdot 10^8$ m/s en cada sistema de referencia inercial, independientemente de cómo se esté moviendo el sistema de referencia con respecto a los otros.

Lo que realmente ocurre es que la luz viaja a $3 \cdot 10^8$ m/s en cada sistema de referencia inercial, sin tener en cuenta cómo los sistemas de referencia se están moviendo con respecto a cada otro. Esto no es un truco. **Solo queda un camino de escapar de las contradicciones lógicas.**

La definición de velocidad es $v = \Delta x / \Delta t$, que es la relación de un cambio de posición y el intervalo de tiempo en el que el viaje ocurre. Si medimos la velocidad de una bicicleta desde un sistema en reposo O y desde un sistema en movimiento O' es distinta.

Para ello, tomamos dos puntos de referencia para medir los cambios de posición. La velocidad de la bicicleta medida desde un sistema en reposo O es $v_O = \Delta x / \Delta t$, siendo Δx la distancia entre los dos puntos de referencia. Sin embargo, la velocidad de la bicicleta medida desde un sistema O' que se está moviendo en el sentido de la bicicleta es $v_{O'} = \Delta x' / \Delta t$. El hecho es que para el sistema móvil el cambio de posición es menor que para el sistema fijo $\Delta x' < \Delta x$. La diferencia se debe al cambio de posición que ha experimentado también el sistema móvil O' respecto del sistema fijo O, $\Delta x_O = \Delta x_{O'} + \Delta x_{O'O}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{i(O)} = x'_{i(O')} + x_{i(O'O)} \\ x_{f(O)} = x'_{f(O')} + x_{f(O'O)} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \Delta x_O = x_{f(O)} - x_{i(O)} = (x'_{f(O')} + x_{f(O'O)}) - (x'_{i(O')} + x_{i(O'O)}) \\ \Delta x_O = (x'_{f(O')} - x'_{i(O')}) + (x_{f(O'O)} - x_{i(O'O)}) \\ \Delta x_O = \Delta x_{O'} + \Delta x_{O'O} \end{array} \right.$$

Esto nos lleva a que la velocidad de la bicicleta medida desde el sistema fijo O sea distinta que la velocidad medida desde el sistema móvil: $v_O \neq v_{O'}$.

Nosotros siempre asumimos que el tiempo es simplemente tiempo, que él fluye y se usa en todos los sistemas de referencia. Por ejemplo, para medir la velocidad de la bicicleta entre dos puntos de referencia suponemos que colocamos dos relojes grandes que podemos ver, uno en cada punto de referencia. ¿No seremos capaces de ponernos de acuerdo en el intervalo de tiempo que la luz necesita para moverse entre los dos puntos de referencia?.

Quizás no. Se demuestra que $\Delta x' \neq \Delta x$. Se verifica experimentalmente que para ondas de luz $v' = v$.

Algo debe estar mal con los supuestos que hemos hecho sobre la naturaleza del tiempo. El principio de relatividad nos dice que nuestra única salida es volver a examinar nuestra comprensión del tiempo.

7.2.3 Eventos y mediciones

Para cuestionar alguno de nuestros conceptos básicos como el espacio y el tiempo se requiere extremo cuidado. Nuestro objetivo es describir el movimiento de una partícula de una forma clara y precisa, haciendo el mínimo de supuestos.

Eventos

La entidad fundamental de la relatividad se llama un evento. Un evento es una actividad física que tiene lugar en un punto definido en el espacio y en un instante definido de tiempo.

Un petardo explotando es un evento, una colisión entre dos partículas es un evento. Una onda de luz golpeando un detector es un evento.

Los eventos pueden ser observados y medidos por experimentadores en distintos sistemas de referencia. Si observamos la explosión de un petardo en el extremo de la calle. Nosotros cuantificamos dónde y cuándo

ha ocurrido un evento con cuatro números: las coordenadas (x,y,z) y el instante de tiempo t . Estos cuatro números son llamados las coordenadas espacio-tiempo del evento.

Las coordenadas espaciales de un evento medidas en sistemas de referencia S y S' pueden ser diferentes. Ahora parece que el instante de tiempo registrado en S y S' también puede ser diferente. Así las coordenadas espacio-tiempo de un evento medidas por experimentadores en sistema de referencia S son (x,y,z,t) y las coordenadas espacio-tiempo del mismo evento medidas por experimentadores en sistema S' son (x',y',z',t') .

El movimiento de una partícula puede describirse como una secuencia de dos o más eventos. Nosotros medimos la velocidad de una bicicleta y luego de una onda de luz comparando el objeto pasando el primer punto de referencia (primer evento) y el objeto pasando el segundo punto de referencia (segundo evento).

Mediciones

Los eventos es lo que realmente ocurre, pero debemos determinar las coordenadas espacio-tiempo del evento. Este es el problema de la medición.

Definimos un sistema de referencia para el sistema de coordenadas en el cual los experimentadores pueden hacer mediciones de la posición y del tiempo.

Un evento es una serie única de coordenadas espacio-tiempo en cada sistema de referencia.

Sincronización de relojes

Es importante que todos los relojes en un sistema de referencia estén sincronizados, significando que todos los relojes en el sistema de referencia tienen la misma lectura en cualquier instante de tiempo.

Para sincronizar los relojes designamos un reloj en el origen y los demás sabemos su distancia al origen, por lo que podemos calcular el tiempo que tarda la onda de luz en viajar desde el origen a cada reloj. Sabemos que la luz tarda $1,0 \mu\text{s}$ en viajar a un reloj a 300 m desde el origen, ya que la velocidad de la luz es de $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 300 \text{ m}/\mu\text{s}$.

Eventos y observaciones

El tiempo en el que ocurre un evento es t . Las ondas de luz se toman un tiempo para viajar. Experimentador observa un evento, como la explosión de un cartucho, sólo un tiempo después cuando las ondas de luz alcanzan sus ojos. Pero nuestro interés está en el propio evento, no en la observación del experimentador del propio evento.

Si suponemos que al tiempo $t = 0$ explota el petardo en $x = 300 \text{ m}$. El flas de luz desde el petardo alcanzará al experimentador en el origen en un tiempo de $t_1 = 1,0 \mu\text{s}$. El sonido de la explosión alcanzará al experimentador al tiempo $t_2 = 0,88 \text{ s}$. Ninguno de estos tiempos es el tiempo del evento de la explosión, aunque el experimentador puede trabajar hacia atrás desde estos tiempos, usando las velocidades conocidas de las ondas para determinar el t_{evento} . En este ejemplo las coordenadas espacio-tiempo del evento (la explosión) son $(300\text{m}; 0\text{m}; 0\text{m}; 0\text{s})$.

Simultaneidad

Dos eventos 1 y 2 tienen lugar en diferentes posiciones x_1 y x_2 , pero en el mismo tiempo $t_1 = t_2$, medido en algún sistema de referencia, se dice que son simultáneos en aquel sistema de referencia. La simultaneidad se determina para cuando los eventos ocurren en realidad, no cuando son vistos u observados. En general, los eventos simultáneos no son vistos a la misma vez porque hay diferencia en el viaje de la luz desde los eventos a un experimentador.

Ejemplo: Un experimentador se encuentra en el origen en el sistema de referencia S, mirando en la dirección positiva del eje X. En el tiempo $t = 3,0 \mu\text{s}$ observa que un petardo 1 explota en $x = 600 \text{ m}$. Un tiempo después, a $t = 5,0 \mu\text{s}$ observa que un petardo 2 explota en $x = 1.200 \text{ m}$. ¿Son simultáneas las dos explosiones?, si no, ¿qué petardo explota antes?

El experimentador ve dos explosiones diferentes, pero las percepciones de los eventos no son los eventos en sí. ¿Cuándo ocurren realmente las explosiones?

Usando el hecho que la luz viaja a $300 \text{ m}/\mu\text{s}$ es fácil ver que el primer petardo explotó en el tiempo $t_1 = 1 \mu\text{s}$ y el petardo segundo también explotó en el tiempo $t_2 = 1 \mu\text{s}$. Por lo que los eventos son simultáneos.

7.2.4 La relatividad de la simultaneidad

Una de las conclusiones más desconcertantes de la relatividad es que **dos eventos que ocurren simultáneamente en el sistema de referencia S no son simultáneos en cualquier sistema de referencia S' que está en movimiento relativo a S**. Esto es llamado la **relatividad de la simultaneidad**.

Considera un vagón de ferrocarril viajando hacia la derecha con una velocidad v mucho menor que la velocidad de la luz. Un petardo está atado a cada extremo final del vagón, por encima del suelo. Cada petardo tiene potencia suficiente para que cuando explote haga una marca quemada en el suelo en la posición de la explosión.

Una persona está en el suelo mirando el paso del vagón. Y **otra persona está encima del vagón exactamente en el centro del mismo** y con una caja especial en sus pies. Esta caja tiene dos detectores de luz, cada uno mirando cada sentido y una señal de luz en la parte superior. La caja trabaja de la siguiente forma:

1. Si un haz de luz se recibe en el detector de la derecha antes que un haz de luz sea recibido en el de la izquierda, entonces la luz de la parte superior se enciende verde.
2. Si un haz de luz se recibe en el detector de la izquierda antes que un haz de luz sea recibido en el de la derecha, o si dos haces llegan simultáneamente, la luz de la parte superior se enciende roja.

Los petardos explotan cuando el vagón pasa por la persona que está en el suelo, y éste ve los dos haces de luz desde las explosiones simultáneamente. Mide las distancias de las dos marcas y encuentra que él estaba exactamente a la mitad de la distancia entre las dos marcas. Como la luz viaja igual distancia en igual tiempo concluye que las dos explosiones fueron simultáneas en su sistema de referencia, el sistema de referencia del suelo.

Por lo que, como estaba a mitad de camino entre los dos extremos del vagón, cuando ocurrió la explosión la persona que está encima del vagón pasaba frontalmente a la persona del suelo.

La explicación es que la luz viaja a velocidad c en todos los sistemas de referencia inerciales, así que aunque los petardos se están moviendo, las ondas de luz son esferas centradas sobre las marcas quemadas. La persona que está en el suelo determina que las ondas de luz que vienen desde la derecha llegan hasta la persona que está en el vagón y la caja antes que las ondas de luz que vienen desde la izquierda. Por lo que **para la persona que está en el suelo la señal de luz en la caja será verde**.

Cómo se ven las cosas en el sistema de referencia de la persona que está en el vagón moviéndose hacia la derecha a una velocidad v relativa al suelo. Desde el vagón la persona ve al que está en el suelo que se mueve a la izquierda con velocidad v . Como la luz viaja a velocidad c en todos los sistemas de referencia inerciales, las ondas de luz son esferas centradas sobre los extremos del vagón. Si las explosiones son simultáneas, como la persona del suelo ha determinado, las dos ondas de luz alcanzarán a la persona del vagón y a la caja simultáneamente. Así, de acuerdo con **la persona del vagón la señal de luz en la parte superior de la caja será roja**.

Luego hay algo que está mal y por qué. ¿Qué sabemos con absoluta certeza?

1. La persona del suelo detecta los haces de luz simultáneamente.
2. La persona del suelo está a medio camino entre los petardos cuando ellos explotan.
3. La luz desde las dos explosiones viajó hacia la persona del suelo a igual velocidad.

La conclusión que las explosiones fueron simultáneas en el sistema de referencia de la persona que está en el suelo es inatacable. La luz es verde.

Sin embargo, la persona que está en el vagón hace una suposición. Suposición perfectamente normal que vemos obvia y que no habremos notado, pero es una suposición. Supone que las explosiones son simultáneas.

La persona del suelo encuentra que son simultáneas, de hecho así lo hizo. Si llamamos S el sistema de referencia de la persona del suelo, la explosión sobre la derecha evento R y la explosión sobre la izquierda evento L. La persona del suelo encontró $t_R = t_L$.

Pero la persona encima del vagón utilizó una serie de relojes diferentes, los relojes en el sistema S', para medir los tiempos t'_R y t'_L en los que ocurrieron las explosiones.

El hecho de que en el sistema S sea $t_R = t_L$ no nos permite concluir que en el sistema S' sea $t'_R = t'_L$.

De hecho, en el sistema S' de la persona en el vagón, el petardo derecho debe explotar antes que el petardo izquierdo. Para la persona del vagón la persona del suelo se mueve hacia la izquierda a velocidad $-v$. En el sistema S' el petardo de la derecha explotó antes porque alcanza a la persona del vagón antes. Y las ondas de luz de las dos explosiones alcanzan a la persona del suelo simultáneamente, pero la onda de la explosión del petardo izquierdo aún no ha alcanzado a la persona del vagón. Por lo que en el sistema S' la onda desde la derecha alcanza a la persona del vagón y la caja en primer lugar y la luz es verde.

Como hemos visto una de las conclusiones más desconcertantes de la relatividad es que **dos eventos que ocurren simultáneamente en el sistema de referencia S no son simultáneos en cualquier sistema de referencia S' que está en movimiento relativo a S**. Esto es llamado la **relatividad de la simultaneidad**.

Los dos petardos realmente explotan en el mismo instante de tiempo en el sistema de referencia S de la persona del suelo. Sin embargo, en el sistema S', de la persona del vagón, el petardo de la derecha realmente explota primero. No es asunto de cuándo ven los haces de luz. Nuestra conclusión se refiere al tiempo en el que las explosiones realmente ocurren.

La paradoja de la persona que está en el suelo y de la que está encima del vagón contiene la esencia de la relatividad, es una cuidadosa reflexión que vale la pena.

En primer lugar, revisar la lógica hasta que esté seguro de que hay una paradoja, una imposibilidad lógica. Luego de convencerse de que la única manera de resolver la paradoja es la de abandonar el supuesto de que las explosiones son simultáneas en el sistema de referencia de la persona del vagón.

Si se entiende la paradoja y su resolución, que ha dado un gran paso hacia la comprensión de lo que tiene que ver con la relatividad.

7.2.5 La dilatación del tiempo

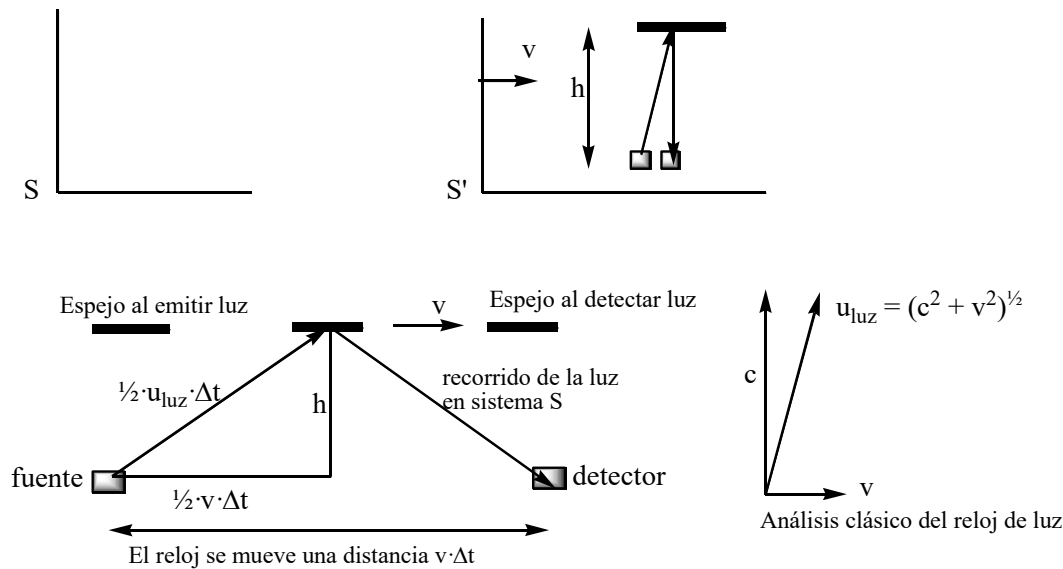
El principio de relatividad nos ha llevado a la conclusión lógica que el tiempo no es el mismo para dos sistemas de referencia en movimiento relativo uno respecto del otro.

El análisis hasta ahora ha sido principalmente cualitativo. Por lo que vamos a desarrollar algunas herramientas cuantitativas que nos permitirán comparar mediciones en un sistema de referencia con las mediciones en otro sistema de referencia.

Consideremos un reloj especial llamado un reloj de luz. El reloj de luz está en una caja de altura h con una fuente de luz que emite un pulso muy corto de luz que viaja hacia el espejo y refleja la luz hacia un detector al lado de la fuente. El reloj se adelanta un "tic" cada vez que el detector recibe un pulso de luz, e inmediatamente, sin demora, hace que la fuente de luz emita el siguiente pulso.

Nuestro objetivo es comparar dos mediciones del intervalo entre dos tics del reloj: uno tomado por un experimentador colocado al lado del reloj y el otro por un experimentador moviéndose con respecto al reloj. Especificando, el reloj está en reposo en el sistema de referencia S' y le llamaremos **el sistema en reposo del reloj**. El sistema S' se mueve hacia la derecha con velocidad v relativa al sistema de referencia S .

La relatividad nos requiere medir eventos, así definimos evento 1 a la emisión del pulso de luz y evento 2 a la detección del pulso de luz. Los experimentadores en los dos sistemas de referencia son capaces de medir dónde y cuándo estos eventos ocurren en su sistema. En sistema S , el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ es in tic del reloj. Similarmente, un tic en sistema S' es $\Delta t' = t'_2 - t'_1$.



Para asegurarnos que tenemos un conocimiento claro de los resultados de la relatividad, primero hacemos un análisis clásico. **En sistema S'** el reloj está en reposo, la luz viaja en línea recta hacia arriba y hacia abajo, una distancia total $2 \cdot h$ a la velocidad c . El intervalo de tiempo es $\Delta t' = 2 \cdot h/c$.

Lo que ocurre visto desde el sistema S con el reloj de luz: el reloj se está moviendo hacia la derecha a velocidad v en S , por lo que en el intervalo de tiempo en el que el pulso de luz se mueve desde la fuente al espejo es $\frac{1}{2} \cdot \Delta t$, y el espejo se mueve una distancia $\frac{1}{2} \cdot v \cdot \Delta t$. La distancia que ha viajado la luz durante este intervalo es $\frac{1}{2} \cdot u_{luz} \cdot \Delta t$, siendo u_{luz} la velocidad de la luz en el sistema S y la velocidad de la luz en el sistema S' es $u_{luz} = (c^2 + v^2)^{1/2}$. Esto es el análisis clásico en el que la velocidad de la luz es independiente del movimiento del sistema de referencia relativo a la fuente de luz.

Aplicando el teorema de Pitágoras

$$h^2 + \left(\frac{1}{2}v\Delta t\right)^2 = \left(\frac{1}{2}u_{\text{luz}}\Delta t\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{c^2 + v^2}\Delta t\right)^2 = \left(\frac{1}{2}c\Delta t\right)^2 + \left(\frac{1}{2}v\Delta t\right)^2$$

$$h^2 = \left(\frac{1}{2}c\Delta t\right)^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2}c\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{2 \cdot h}{c}$$

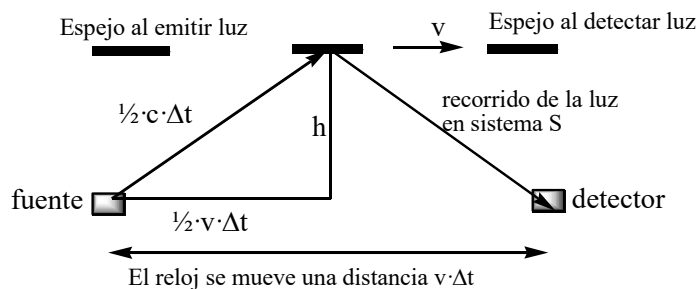
Por lo que un análisis clásico encuentra que los tic del reloj ocurren a la misma vez en los dos sistemas S y S'. Esto no es una sorpresa porque en la física clásica hay un solo tipo de tiempo, todos los experimentadores miden el mismo independientemente de su movimiento.

El principio de relatividad cambia sólo una cosa, pero este cambio tiene profundas consecuencias. De acuerdo con el principio de la relatividad, la luz viaja a la misma velocidad en todos los sistemas de referencia inercial. En el sistema S', el sistema en reposo del reloj, la luz simplemente viaja en línea recta hacia arriba y hacia abajo. El tiempo de un tic es

$$\Delta t' = \frac{2 \cdot h}{c}$$

Esto es idéntico al análisis clásico.

Análisis del reloj de luz en el que la velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas de referencia



Ahora si hacemos el análisis desde el sistema S, la diferencia es que ahora la luz viaja a lo largo de la hipotenusa a velocidad c :

$$h^2 + \left(\frac{1}{2}v\Delta t\right)^2 = \left(\frac{1}{2}c\Delta t\right)^2 \Rightarrow h^2 + \frac{1}{2}v^2\Delta t^2 = \frac{1}{2}c^2\Delta t^2 \Rightarrow \Delta t^2 \frac{1}{2}(c^2 - v^2) = h^2$$

$$\Delta t^2 = \frac{2^2 h^2}{c^2 - v^2} = \frac{2^2 \frac{h^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \Delta t = \frac{2 \frac{h}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

El intervalo de tiempo entre dos tics en el sistema S no es el mismo que en el sistema S'.

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Es útil definir $\beta = v/c$, la velocidad como una fracción de la velocidad de la luz. Por ejemplo, un sistema de referencia moviéndose con velocidad $v = 2,4 \cdot 10^8$ m/s tiene $\beta = 0,80$.

Tiempo propio

El sistema S' tiene una diferencia importante. Es el único sistema de referencia inercial en el que el reloj está en reposo. Por consiguiente, es el único sistema de referencia inercial en el que el tiempo de los dos

eventos (la emisión de la luz y la detección de la luz) son medidos **por el mismo reloj**. El pulso de luz en el sistema en reposo del reloj, parte y termina **en la misma posición** y puede medirse por un reloj.

En el sistema S la emisión de la luz y la detección tiene lugar en diferentes posiciones y deben medirse por relojes diferentes.

El intervalo de tiempo entre dos eventos que ocurren en la misma posición se llama tiempo propio $\Delta\tau$. Sólo un sistema de referencia inercial mide el tiempo propio, y lo hace con un solo reloj que está presente en los dos eventos.

Un sistema de referencia inercial moviéndose con velocidad $v = \beta c$ relativa al sistema tiempo propio debe usar dos relojes para medir el intervalo de tiempo porque los dos eventos ocurren en diferentes posiciones. El intervalo de tiempo en este sistema es

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} \geq \Delta\tau$$

El intervalo de tiempo es mayor y se llama **dilatación del tiempo**.

Para una mejor descripción de la dilatación del tiempo se establece que **el intervalo de tiempo entre dos tics es el más corto en el sistema de referencia en el que el reloj está en reposo**. El intervalo de tiempo entre dos tics es mayor cuando se mide en cualquier sistema de referencia en el que el reloj se está moviendo.

Ejemplo.- Saturno está a $1,43 \cdot 10^{12}$ m desde el Sol. Un cohete viaja desde el Sol a Saturno a una velocidad constante de $v = 0,9 \cdot c$ relativa al sistema solar. Qué tiempo mide un experimentador desde la Tierra, y qué tiempo mide un astronauta sobre el cohete.

Solución: El sistema solar es el sistema S y el cohete es el sistema S' que viaja con velocidad $v = 0,9 \cdot c$ relativa a S. Los problemas de la relatividad se deben de establecer en términos de eventos. Sea el evento 1 "el cohete y el Sol coinciden" (el experimentador sobre la Tierra ve que el cohete pasa el Sol; el astronauta sobre el cohete ve que el Sol pasa al cohete) y el evento 2 "el cohete y Saturno coinciden".

Los dos eventos son vistos desde los dos sistemas de referencia. En el sistema S' los dos eventos tienen lugar en la misma posición, la posición del cohete, y consecuentemente pueden ser medidos por un solo reloj.

El intervalo de tiempo medido en el sistema de referencia del sistema solar, el cual incluye la Tierra, es

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{1,43 \cdot 10^{12} \text{ m}}{0,9 \times 3,0 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 5.300 \text{ s}$$

En el sistema S' los dos eventos ocurren en la misma posición y pueden ser medidos por un solo reloj, el reloj en el origen. Por lo que el tiempo medido por el astronauta es el tiempo propio $\Delta\tau$ entre los dos eventos

$$\Delta\tau = \sqrt{1-\beta^2} \cdot \Delta t = \sqrt{1-0,9^2} \times 5.300 \text{ s} = 2.310 \text{ s}$$

El intervalo de tiempo entre estos eventos, medido por el astronauta, es menor que el intervalo de tiempo medido por los experimentadores sobre la Tierra.

Los intervalos de tiempo Δt y $\Delta\tau$ son diferentes porque el tiempo es diferente en dos sistemas de referencia que uno se mueve relativo al otro.

Evidencia experimental

Hay una evidencia experimental para la idea loca de que relojes en movimiento relativo uno del otro dan tiempo diferente.

En 1971 se envió un reloj atómico en un avión alrededor del mundo mientras un reloj idéntico permaneció en el laboratorio. Es un experimento difícil porque la velocidad a la que viajaba el reloj era muy inferior a c . El resultado es que el reloj viajero cuando retornó estaba 200 ns por detrás del reloj que había permanecido quieto, lo que fue exactamente lo predicho por la relatividad.

Sobre las partículas inestables muones se han hecho estudios muy detallados. Estas partículas se crean en la parte superior de la atmósfera, a unos 60 km, cuando los rayos cósmicos de alta energía colisionan con las moléculas del aire. Es bien conocido, de estudios de laboratorio, que los muones en reposo se desintegran con una semi-vida de $1,5 \mu\text{s}$. Esto es, la mitad de los muones se desintegran en ese tiempo de $1,5 \mu\text{s}$, la mitad de los que quedan se vuelven a desintegrar en los siguientes $1,5 \mu\text{s}$ y así sucesivamente.

La desintegración se puede usar como un reloj.

Los muones que viajan a través de la atmósfera desde arriba lo hacen a una velocidad próxima a la de la luz. El tiempo necesario para alcanzar el suelo es: $\Delta t = \Delta x/c = (60.000 \text{ m})/(3 \cdot 10^8 \text{ m/s}) = 200 \mu\text{s}$. Esto es $200 \mu\text{s}/1,5 \mu\text{s} = 133$ veces superior a la semi-vida, por lo que la fracción de muones que alcanza el suelo será $(\frac{1}{2})^{133} = 10^{-40}$. Es decir, sólo 1 de cada 10^{40} muones alcanza el suelo. Sin embargo, los hechos experimentales encuentran que 1 de cada 10 muones alcanza el suelo.

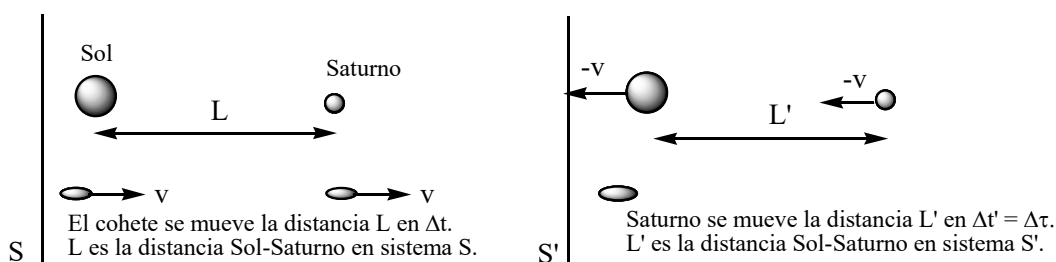
La discrepancia es debida a la dilatación del tiempo. Los dos eventos "muón es creado" y "muón llega al suelo" tienen lugar en dos posiciones diferentes en el sistema de referencia Tierra. Sin embargo, estos dos eventos ocurren en la misma posición en el sistema de referencia muón (el muón es como el cohete). Así el reloj interno de los muones mide el tiempo propio. El intervalo de tiempo dilatado es $\Delta t = 200 \mu\text{s}$ en el sistema de referencia Tierra corresponde a un tiempo propio $\Delta \tau = 5 \mu\text{s}$ en el sistema de referencia muón.

Es decir, en el sistema de referencia muón, los muones tardan solamente $\Delta \tau = 5 \mu\text{s}$ desde la creación en la parte alta de la atmósfera hasta el suelo. Esto es $5 \mu\text{s}/1,5 \mu\text{s} = 3,3$ veces superior a la semi-vida, por lo que la fracción de muones que alcanza el suelo será $(\frac{1}{2})^{3,3} = 0,1$; o 1 de cada 10. No podríamos detectar muones en el suelo si no es por la dilatación del tiempo.

7.2.6 La contracción de la longitud

Hemos visto que la relatividad requiere repensar nuestra idea del tiempo. Ahora vamos a volver nuestra atención a los conceptos de espacio y distancia.

Si consideramos el cohete que viajaba del Sol a Saturno vimos que el cohete viajaba a velocidad v a través del sistema solar en el sistema de referencia S . Definimos $L = \Delta x = x_{\text{Saturno}} - x_{\text{Sol}}$ como la distancia entre el Sol y Saturno en el sistema S , o la longitud del espacio entre dos puntos. La velocidad del cohete es $v = L/\Delta t$, donde Δt es el tiempo medido en el sistema S por el viaje desde el Sol a Saturno.



En el sistema S' el cohete está en reposo y el Sol y Saturno se mueven a la izquierda a la velocidad $v = L'/\Delta t'$, siendo $\Delta t'$ el tiempo medido en sistema S' para Saturno en viajar la distancia L'.

La velocidad v es la velocidad relativa entre S y S' y es la misma para experimentadores en los dos sistemas de referencia. Por tanto:

$$v = \frac{L}{\Delta t} = \frac{L'}{\Delta t'}$$

El intervalo de tiempo $\Delta t'$ medido en S' es el tiempo propio porque los dos eventos ocurren en la misma posición en el sistema S' y pueden medirse por un único reloj. Podemos usar el resultado de la dilatación del tiempo para relacionar $\Delta \tau$ medido por el astronauta con Δt medido por el científico en la Tierra:

$$\Delta \tau = \sqrt{1-\beta^2} \cdot \Delta t$$

$$v = \frac{L}{\Delta t} = \frac{L'}{\Delta \tau} = \frac{L'}{\sqrt{1-\beta^2} \cdot \Delta t} \Rightarrow L = \frac{L'}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow L' = \sqrt{1-\beta^2} \cdot L$$

Sorprendentemente encontramos que **la distancia entre dos objetos en el sistema de referencia S' no es la misma distancia entre los mismos dos objetos en el sistema de referencia S.**

Desde el sistema S, en el que la distancia es L, tiene una característica importante. Es el único sistema de referencia inercial en el que los objetos están en reposo. Los experimentadores en el sistema S pueden tomar todo el tiempo que necesiten para medir L porque los dos objetos no van a ninguna parte. La distancia L entre dos objetos o dos puntos en el espacio medidos en el sistema de referencia en el que los objetos están en reposo se llama **longitud propia** ℓ . Sólo un sistema de referencia inercial puede medir la longitud propia.

$$L' = \sqrt{1-\beta^2} \cdot \ell \leq \ell$$

Esta contracción de la distancia entre dos objetos, medida por un experimentador moviéndose con respecto a los dos objetos, se llama **contracción de longitud**. Aunque se deriva la contracción de longitud por la distancia entre dos objetos distintos, ello se aplica igualmente bien a la longitud de cualquier objeto físico que se extiende entre dos puntos a lo largo de los ejes X y X'. La longitud de un objeto es mayor en el sistema de referencia en el que el objeto está en reposo. La longitud del objeto es menor (la longitud se contrae) cuando se mide en cualquier sistema de referencia en movimiento relativo al objeto.

Ejemplo.- La distancia desde el Sol a Saturno.

Un cohete viajando desde el Sol a Saturno a lo largo de una línea y a velocidad constante de $0,9 \cdot c$ relativa al sistema solar. La distancia Sol-Saturno es de $1,43 \cdot 10^{12}$ m. ¿Cuál es la distancia entre el Sol y Saturno en el sistema de referencia del cohete?.

Consideramos que el Sol y Saturno están en reposo en el sistema de referencia S, ello aproximadamente. Por lo que la distancia dada es la longitud propia ℓ .

$$L' = \sqrt{1-\beta^2} \cdot \ell = \sqrt{1-0,9^2} \times 1,43 \cdot 10^{12} \text{ m} = 0,62 \cdot 10^{12} \text{ m}$$

La distancia del Sol a Saturno medida por los astronautas es menor que la distancia medida por los experimentadores sobre la Tierra. L' y ℓ son diferentes porque el espacio es diferente en los dos sistemas de referencia con movimiento relativo uno respecto del otro.

La conclusión es que el espacio es diferente en sistemas de referencia en movimiento relativo uno respecto del otro y ello es una consecuencia directa del hecho de que el tiempo es diferente.

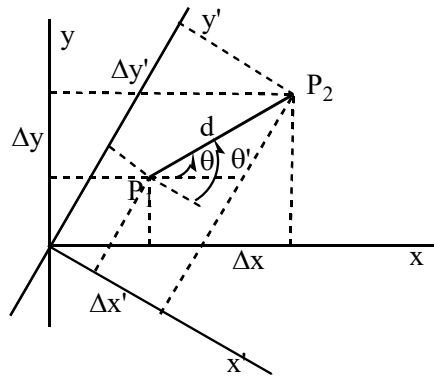
Experimentadores en los dos sistemas de referencia miden la velocidad relativa v , llevando a

$$v = \frac{L}{\Delta t} = \frac{L'}{\Delta t'}$$

Hemos visto que $\Delta t' < \Delta t$ debido a la dilatación del tiempo. Por lo que L' tiene que ser menor que L . Esta es la única forma en la que los experimentadores en los dos sistemas de referencia pueden reconciliar sus medidas.

$$v = \frac{L}{\Delta t} = \frac{1,43 \cdot 10^{12} \text{ m}}{5.300 \text{ s}} = 2,7 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,9 \cdot c \Rightarrow v = \frac{L'}{\Delta t'} = \frac{0,62 \cdot 10^{12} \text{ m}}{2.310 \text{ s}} = 2,7 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,9 \cdot c$$

El intervalo espacio-tiempo



$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta y = y_2 - y_1 = d \cdot \text{sen } \theta \\ \Delta x = x_2 - x_1 = d \cdot \text{cos } \theta \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta y' = y'_2 - y'_1 = d \cdot \text{sen } \theta' \\ \Delta x' = x'_2 - x'_1 = d \cdot \text{cos } \theta' \end{array} \right\}$$

$\Delta x \neq \Delta x'$
 $\Delta y \neq \Delta y'$

Si olvidamos la relatividad y pasamos a analizar la geometría. Considera dos sistemas de coordenadas idénticos $OXY, OX'Y'$. Estando uno rotado respecto del otro.

Vamos a ver que la distancia d entre dos puntos es independiente de las coordenadas. Sean los puntos $P_1(x_1; y_1)$ y $P_2(x_2; y_2)$ en el sistema OXY , o bien de coordenadas $P_1(x'_1; y'_1), P_2(x'_2; y'_2)$ en el sistema rotado $OX'Y'$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta y = y_2 - y_1 = d \cdot \text{sen } \theta \\ \Delta x = x_2 - x_1 = d \cdot \text{cos } \theta \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta x \neq \Delta x' \\ \Delta y \neq \Delta y' \end{array} \right\}$$

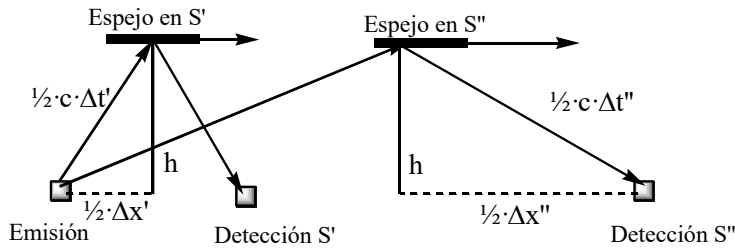
$$d^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2$$

$$d^2 = (d \cdot \text{cos } \theta)^2 + (d \cdot \text{sen } \theta)^2 = (d \cdot \text{cos } \theta')^2 + (d \cdot \text{sen } \theta')^2$$

La distancia d entre los puntos P_1 y P_2 es independiente de las coordenadas. La cantidad llamada una invariante en geometría es: $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$. Ello porque tiene el mismo valor en cualquier sistema de coordenadas cartesianas.

Volviendo a la relatividad, ¿hay alguna invariante en las coordenadas espacio-tiempo, alguna cantidad que tenga el mismo valor en todos los sistemas de referencia inerciales?.

Para ello volvemos al reloj de luz en dos sistemas S' y S'' . La velocidad de la luz es la misma en los dos sistemas, aunque los dos se muevan uno respecto del otro y con respecto al reloj.



$$h^2 = \left(\frac{1}{2} c \Delta t'\right)^2 - \left(\frac{1}{2} \Delta x'\right)^2 = \left(\frac{1}{2} c \Delta t''\right)^2 - \left(\frac{1}{2} \Delta x''\right)^2$$

$$c^2 (\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = c^2 (\Delta t'')^2 - (\Delta x'')^2$$

$$s^2 = c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

Definimos el **intervalo espacio-tiempo s** entre dos eventos: $s^2 = c^2 \cdot (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$. El **intervalo espacio-tiempo s** tiene el mismo valor en todos los sistemas de referencia inerciales. Es decir, el intervalo espacio-tiempo entre dos eventos es una invariante. Es un valor en el que todos los experimentadores, en todos los sistemas de referencia, pueden ponerse de acuerdo.

En la teoría de la relatividad parece que todo es relativo, pero esto no es así. Los intervalos de tiempo y los intervalos de espacio pueden ser relativos, como ocurre en geometría con los intervalos Δx y Δy , pero algunas cosas no son relativas. En particular el intervalo espacio-tiempo s entre dos eventos no es relativo. Ello es un número bien definido, y medido por los experimentadores en cada sistema de referencia inercial.

7.2.7 Las transformaciones de Lorentz

La transformación de Galileo $x' = x - v \cdot t$ de la relatividad clásica nos permite calcular la posición x' de un evento en el sistema S' si conocemos su posición x en el sistema S . En la relatividad clásica se asume que $t = t'$.

¿Existe una transformación similar en la relatividad que nos permita calcular las coordenadas espacio-tiempo de un evento ($x';t'$) en el sistema S' si conocemos sus valores ($x;t$) en el sistema S ? Tal transformación necesitará satisfacer tres condiciones:

1. Estar de acuerdo con las transformaciones Galileanas en el límite de baja velocidad $v \ll c$.
2. Transformar no sólo las coordenadas espaciales sino también las coordenadas tiempo.
3. Asegurar que la velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas de referencia.

Consideremos los sistemas de referencia S y S' , en los que el movimiento es paralelo a los ejes x y x' , y definimos $t = 0$ y $t' = 0$ como el instante cuando los orígenes de S y S' coinciden.

El requisito para que una nueva transformación esté de acuerdo con las transformaciones Galileanas cuando $v \ll c$ sugiere que se busque una transformación de la forma:

$$x' = \gamma(x - vt) \Leftrightarrow x = \gamma(x' + vt')$$

Donde γ es una función de la velocidad adimensional que satisface $\gamma \rightarrow 1$ cuando $v \rightarrow 0$.

Para determinar γ , consideremos los **dos eventos**:

1. Evento1: Un destello de luz se emite desde el origen de ambos sistemas de referencia ($x = x' = 0$) en el instante en que coinciden ($t = t' = 0$).

2. Evento 2: La luz alcanza el detector de luz. Las coordenadas espacio-tiempo de este evento son $(x;t)$ en sistema S y $(x';t')$ en sistema S'.

La luz viaja a velocidad c en los dos sistemas de referencia, por lo que las posiciones del evento 2 son $x = c \cdot t$ en S y $x' = c \cdot t'$ en S'. Sustituyendo estas expresiones para x y x' obtenemos:

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt) \Rightarrow ct' = \gamma(ct - vt) = \gamma(c - v)t \\x &= \gamma(x' + vt') \Rightarrow ct = \gamma(ct' + vt') = \gamma(c + v)t'\end{aligned}$$

Despejando t' en la primera y sustituyendo en la segunda

$$\begin{aligned}t' &= \frac{\gamma(c - v)t}{c} \Rightarrow ct = \gamma(c + v)t' = \gamma(c + v) \frac{\gamma(c - v)t}{c} = \gamma^2 (c^2 - v^2) \frac{t}{c} \\ \gamma^2 &= \frac{c^2}{c^2 - v^2} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{1 - \beta^2} \Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}}\end{aligned}$$

Podemos comprobar que $\gamma \rightarrow 1$ cuando $v \rightarrow 0$, como esperamos.

La transformación entre t y t' se obtendrá sustituyendo x' en la ecuación de x y despejando t' :

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt) \left\{ \gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} \right\} \\x &= \gamma(x' + vt') = \gamma[\gamma(x - vt) + vt'] = \gamma^2 x - \gamma^2 vt + \gamma vt' \\t' &= \frac{x}{\gamma v} - \frac{\gamma^2 x}{\gamma v} + \frac{\gamma^2 vt}{\gamma v} = \gamma t + \frac{x}{v} \left(\frac{1}{\gamma} - \gamma \right) = \gamma t + \frac{x}{v} \left(-\frac{v^2}{c^2} \gamma \right) = \gamma t - \gamma \frac{vx}{c^2} = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \\ \left\{ \frac{1}{\gamma} - \gamma \right. &= \frac{1 - \gamma^2}{\gamma} = \frac{1 - \frac{c^2}{c^2 - v^2}}{\frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}} = \frac{\frac{-v^2}{c^2 - v^2}}{\frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}} = -\frac{v^2}{c} \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}} = -\frac{v^2}{c^2} \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} = -\frac{v^2}{c^2} \gamma \left. \right\}\end{aligned}$$

La serie total de ecuaciones son llamadas **las transformaciones de Lorentz**:

$$\boxed{\begin{array}{l}x' = \gamma(x - vt) \\y' = y \\z' = z \\t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right)\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{l}x = \gamma(x' + vt') \\y = y' \\z = z' \\t = \gamma \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right)\end{array}}$$

Las transformaciones de Lorentz transforman las coordenadas espacio-tiempo de un evento.

Las transformaciones de Lorentz de la velocidad

Consideremos un objeto que se está moviendo en los dos sistemas de referencia S y S', y por simplicidad se mueve paralelamente a los ejes x y x' . Los experimentadores en el sistema S determinan que la velocidad del objeto es u mientras que los del sistema S' determinan que la velocidad es u' . Siendo v la velocidad del sistema S' relativa a S y la velocidad del sistema S relativa a S' es $-v$.

La transformación de la velocidad Galileana es $u' = u - v$; se obtiene realizando la primera derivada de la transformación de la posición $x' = x - x_{S'S} = x - v \cdot t$.

Si hacemos lo mismo con las transformaciones de Lorentz:

$$u' = \frac{dx'}{dt} = \frac{d(\gamma(x - vt))}{d(\gamma(t - \frac{v}{c^2}x))} = \frac{\gamma(dx - vdt)}{\gamma(dt - \frac{v}{c^2}dx)} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} = \frac{u - v}{1 - \frac{v}{c^2} u}$$

$$v \ll c \Rightarrow u' = u - v$$

$$\boxed{u' = \frac{u - v}{1 - \frac{v}{c^2} u}} \Leftrightarrow \boxed{u = \frac{u' + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'}}$$

7.2.8 Momento lineal relativista

En la mecánica Newtoniana el momento total de un sistema es una magnitud que se conserva y se obtiene el principio de conservación del momento lineal (momentum), que es cierto en todos los sistemas de referencia inerciales si las velocidades de la partícula en los distintos sistemas de referencia se relacionan por las transformaciones de la velocidad Galileanas.

El problema es que las transformaciones de Galileanas no son válidas con el principio de la relatividad. Es una aproximación razonable cuando todas las velocidades son mucho menores que c , pero las transformaciones Galileanas fallan cuando las velocidades se aproximan a c . Y tampoco se cumple si las velocidades de la partícula en el sistema S' se relacionan mediante las transformaciones de Lorentz con las velocidades de la partícula en el sistema S .

Por lo que hay dos posibilidades con estos resultados:

1. Que el principio de conservación del momento lineal no es una ley de la Física. Es cierto para velocidades bajas respecto a la velocidad de la luz.
2. Que el principio de conservación del momento lineal es realmente una ley de la Física, pero la expresión $p = m \cdot u$ no es la expresión correcta para calcular el momento lineal cuando la velocidad de la partícula se aproxima a c .

El momento lineal clásico, para un movimiento unidimensional es $p = m \cdot u = m \cdot (\Delta x / \Delta t)$. Siendo Δt el tiempo necesario para moverse la distancia Δx . ¿Pero es correcto usar ese Δt ? Lo que parecía claro dentro de un sistema Newtoniano ahora no ya que hemos aprendido que experimentadores en distintos sistemas de referencia discrepan acerca del tiempo necesario.

Una posibilidad es usar el tiempo medido por la partícula, es decir, el tiempo propio $\Delta \tau$, porque la partícula está en reposo en su propio sistema de referencia y necesita sólo un reloj. Con este pensamiento, redefinimos el momento lineal de una partícula de masa m moviéndose con velocidad u como

$$p = m \frac{\Delta x}{\Delta \tau} = m \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \cdot \Delta t} = \frac{mu}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{mu}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma_{\text{partícula}} mu = \gamma_p mu$$

Esta expresión se reduce a la clásica si la velocidad de la partícula $u \ll c$.

La ley de conservación del momento lineal (momentum) es válida en todos los sistemas de referencia inerciales si el momento lineal de cada partícula se calcula con la ecuación anterior.

La prueba es larga y se omite.

El factor que multiplica a $m \cdot u$ se llama γ_p que es parecido al factor de las transformaciones de Lorentz para x y t , ya que tiene una diferencia muy importante. La v de las transformaciones de Lorentz es la velocidad de un sistema de referencia. La u en la ecuación anterior es la velocidad de una partícula moviéndose en un sistema de referencia.

7.2.9 Energía relativista

La energía es nuestro tema en este capítulo sobre relatividad. El espacio, el tiempo, la velocidad y el momento lineal han cambiado por la relatividad.

En la mecánica Newtoniana la energía cinética de una partícula $E_c = \frac{1}{2} \cdot m u^2$ se puede escribir en términos de su momento lineal $p = m \cdot u$ como $E_c = p^2 / (2 \cdot m)$. También esperamos que en la relatividad la energía se conserve, por lo que es razonable partir de una cantidad que hemos encontrado que es la misma en todos los sistemas de referencia inerciales: el intervalo espacio-tiempo s .

Sea una partícula de masa m que se mueve a través de una distancia Δx durante un intervalo de tiempo Δt , medido en sistema de referencia S . El intervalo espacio-tiempo es

$$s^2 = c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = \text{cte}$$

Podemos transformar esta expresión en otra que contenga el momento lineal, para ello la multiplicamos por $(m/\Delta\tau)^2$, donde $\Delta\tau$ es el tiempo propio medido por la partícula:

$$\left[c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 \right] \times \left(\frac{m}{\Delta\tau} \right)^2 = \text{cte} \Rightarrow (mc)^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta\tau} \right)^2 - \left(\frac{m\Delta x}{\Delta\tau} \right)^2 = (mc)^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta\tau} \right)^2 - p^2 = \text{cte}$$

Hemos usado $p = m \cdot (\Delta x / \Delta\tau)$. Ahora Δt , que es el intervalo de tiempo en el sistema S , se relaciona con el tiempo propio por $\Delta t = \gamma_p \Delta\tau$

$$\Delta t = \gamma_p \Delta\tau \left\{ (mc)^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta\tau} \right)^2 - \left(\frac{m\Delta x}{\Delta\tau} \right)^2 = (mc)^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta\tau} \right)^2 - p^2 = \text{cte} \right\}$$

$$(\gamma_p mc)^2 - p^2 = \text{cte} \xrightarrow{\times c^2} \Rightarrow \boxed{(\gamma_p mc^2)^2 - (pc)^2 = \text{cte}}$$

Al ser invariante significa que tiene el mismo valor en todos los sistemas de referencia inercial. Podemos determinar la constante evaluándola en el sistema de referencia en el que la partícula esté en reposo. En este sistema, donde $p = 0$ y $\gamma_p = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} (\gamma_p mc^2)^2 - (pc)^2 &\xrightarrow[p=0]{\gamma_p=1} (mc^2)^2 \\ (\gamma_p mc^2)^2 - (pc)^2 &= (mc^2)^2 \end{aligned}$$

Vamos a reflexionar lo obtenido antes de seguir con la siguiente etapa. El intervalo espacio-tiempo s tiene el mismo valor en todos los sistemas de referencia inerciales. En otras palabras

$$s^2 = c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = c^2 (\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = \text{cte}$$

Como la ecuación $(\gamma_p mc^2)^2 - (pc)^2 = (mc^2)^2$ se obtuvo desde la definición del intervalo espacio-tiempo, entonces la cantidad $m \cdot c^2$ es también una invariante teniendo el mismo valor en todos los sistemas de

referencia inerciales. Es decir, si experimentadores en los sistemas S y S' toman medidas de esta partícula de masa m, ellos encontrarán que

$$(\gamma_p mc^2)^2 - (pc)^2 = (\gamma'_p mc^2)^2 - (p'_c)^2$$

Los experimentadores en diferentes sistemas de referencia miden diferentes valores para el momento lineal, pero los experimentadores en todos los sistemas de referencia miden que el momento lineal se conserva.

En las ecuaciones anteriores se ve que la cantidad $\gamma_p mc^2$ es también una propiedad importante de la partícula, una propiedad que cambia con p para satisfacer: $(\gamma_p mc^2)^2 - (pc)^2 = (mc^2)^2$. Pero ¿cuál es esa propiedad?.

En primer lugar γ_p es adimensional y al ser $m \cdot c^2$ parecido a $\frac{1}{2}m \cdot v^2$ es una energía, y $\gamma_p mc^2$ es una energía. Ahora comprobamos cómo se comporta a velocidades bajas:

$$\left\{ \sqrt{1-\beta^2} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right\} \quad \left\{ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right\}$$

$$\gamma_p mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} mc^2 \approx \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2}\right) mc^2 = mc^2 + \frac{1}{2} mu^2$$

El segundo término $\frac{1}{2} \cdot m \cdot u^2$ es la expresión de la energía cinética a velocidad baja. Es una energía asociada con el movimiento. Pero el primer término sugiere que el concepto de energía es más complejo que lo que originalmente pensamos. **Nos indica que hay una energía inherente asociada con la propia masa.**

Con aquello como posibilidad, sujeto a la verificación experimental, definimos **la energía total de una partícula:**

$$E = \gamma_p mc^2 = mc^2 + \frac{1}{2} mu^2 = E_0 + E_c$$

Siendo $E_0 = m \cdot c^2$ la energía en reposo. La expresión para la energía cinética relativista es

$$E = \gamma_p mc^2 = mc^2 + \frac{1}{2} mu^2 = E_0 + E_c$$

$$E_c = E - E_0 = \gamma_p mc^2 - mc^2 = (\gamma_p - 1) mc^2$$

Por lo que se obtiene

$$(\gamma_p mc^2)^2 - (pc)^2 = (mc^2)^2$$

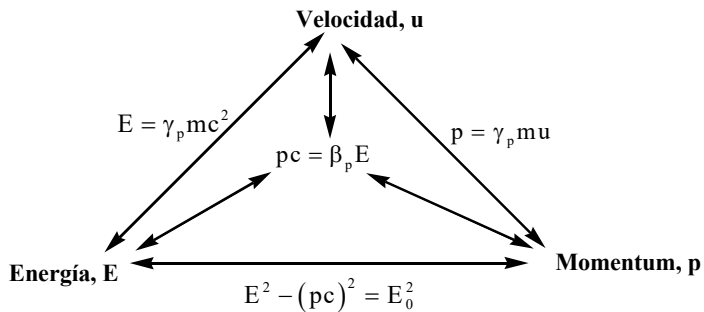
$$E^2 - (pc)^2 = E_0^2$$

La cantidad E_0 es una invariante con el mismo valor $m \cdot c^2$ en todos los sistemas de referencia inerciales.

También podemos escribir:

$$pc = (\gamma_p mu) c = \frac{u}{c} (\gamma_p mc^2) = \beta_p E$$

En la siguiente figura se puede ver el triángulo "velocidad-energía-momentum" que nos sirve para recordar las relaciones entre las tres magnitudes:



Equivalencia masa-energía

Ahora vamos a explorar el significado de la famosa ecuación de Einstein $E = m \cdot c^2$.

Si consideramos dos bolas de arcilla que se aproximan, las bolas tienen la misma masa, la misma energía cinética y se chocan en una colisión perfectamente inelástica para formar una gran bola de arcilla en reposo.

En la mecánica Newtoniana consideramos que la energía cinética ($2 \cdot E_c$) se disipa para transformarse en la misma cantidad de energía térmica, aumentando la temperatura de las bolas que se unieron de arcilla.

Por la ecuación $E = E_0 + E_c$ no dice nada de la energía térmica. La energía total antes de la colisión es $E_i = 2mc^2 + 2 \cdot E_c$, el factor 2 aparece porque hay dos masas. La energía total después de la colisión, cuando la bola está en reposo, será $2mc^2$, pero este valor no conserva la energía total.

Sin embargo, hay evidencia experimental de que la energía se conserva, por lo que debe haber un fallo en el razonamiento. El establecer que la energía se conserva es:

$$E_f = Mc^2 = E_i = 2mc^2 + 2E_c \Rightarrow M = 2m + \frac{2E_c}{c^2}$$

En otras palabras, la masa no se conserva. La masa de la bola después de la colisión es mayor que la masa de las bolas antes de la colisión. Por lo que la energía total se conserva si la energía cinética se transforma en una cantidad de masa equivalente.

Se ha demostrado experimentalmente en un acelerador de partículas. Si un electrón adquiere una velocidad próxima a la de la luz $u \approx c$ y se hace chocar contra un material, los electrones de alta energía colisionan con un átomo del material, y ello puede arrancar uno de los electrones del átomo. Por lo que esperamos que dos electrones salgan del material: el electrón incidente y el expulsado. Pero emergen del material cuatro partículas: tres electrones y un positrón



Aparentemente un electrón y un positrón se han creado de la nada. La masa antes de la colisión era de $2 \cdot m_e$ y después $4 \cdot m_e$. La carga se conserva.

$$E_f = 4m_e c^2 + E_{c(f)} = E_i = 2m_e c^2 + E_{c(i)} \Rightarrow E_{c(i)} - E_{c(f)} = 2m_e c^2$$

Si medimos las energías antes y después de la colisión, encontramos que la disminución en la energía cinética es igual a la energía equivalente de las dos partículas que se han creado. **Las partículas se han creado a partir de energía.**

Las partículas se pueden crear desde la energía y las partículas se pueden transformar en energía. Cuando una partícula y su antipartícula se encuentran ellas se aniquilan. La masa desaparece y la energía equivalente de la masa se transforma en dos fotones de luz de alta energía. La conservación del momentum requiere dos fotones en lugar de uno, y los dos fotones han de tener la misma energía y son emitidos hacia atrás.

Si el electrón y el positrón son bastante lentos, tal que $E_e \ll m \cdot c^2$, la conservación de la energía:

$$E_f = 2 \cdot E_{\text{fotón}} = E_i \approx 2 \cdot m_e \cdot c^2$$

$$E_{\text{fotón}} = h\nu = h \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{E_{\text{fotón}}} = \frac{hc}{m_e \cdot c^2} \approx 0,0024 \text{ nm}$$

Es una longitud de onda de rayo gamma. Con la ventaja del telescopio de rayos gamma sobre los satélites se ha observado que viene esta radiación del centro de las galaxias, evidenciando que hay muchos positrones en el Universo.

La aniquilación electrón-positrón es la base del procedimiento médico conocido como tomografía electrón-positrón, o escáner PET.

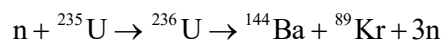
Conservación de la Energía

La creación a aniquilación de partículas con masa es un proceso estrictamente prohibido en la mecánica Newtoniana. Aún así, la energía total, la energía cinética y la energía equivalente a la masa, se conserva.

Ley de conservación de la energía total: La energía $E = \sum E_i$ de un sistema aislado se conserva, donde $E_i = (\gamma_p)_i m_i c^2$ es la energía total de la partícula i .

Masa y energía no son la misma cosa, pero son equivalentes en el sentido de que la masa se puede transformar en energía y la energía se puede transformar en masa siempre que la masa total se conserve.

Probablemente la aplicación mejor conocida es la conservación de la energía en la fisión nuclear. El isótopo de Uranio ^{235}U , que no existe en la naturaleza. Se puede crear cuando un núcleo de ^{235}U absorbe un neutrón. El ^{235}U rápidamente se fragmenta en dos núcleos más pequeños y algunos neutrones, es un proceso conocido como fisión nuclear



Las masas de los isótopos son conocidas muy bien mediante el espectrómetro. Se determina que se produce una pérdida de masa de $3,07 \cdot 10^{-28} \text{ kg}$. La masa se ha convertido en energía cinética, haciendo que los dos núcleos y los tres neutrones sean expulsados a velocidades muy altas. La energía cinética calculada es $\Delta E_c = m_{\text{perdida}} \cdot c^2 = 2,8 \cdot 10^{-11} \text{ J}$.

Esta es la energía desprendida por una fisión, si la calculamos por mol hemos de multiplicar por el número de Avogadro N_A .

7.3 Dificultades de la teoría clásica: radiación térmica y efecto fotoeléctrico

7.3.1 La radiación térmica

Los problemas más importantes en la Física son la naturaleza fundamental de la materia y la evolución del universo.

Uno de los fenómenos más desconcertantes estudiados a fines del siglo XIX fue la distribución de longitudes de onda, o distribución espectral, de la radiación emitida por objetos a altas temperaturas.

La radiación emitida por un atizador calentado al rojo o una fogata depende de muchas variables. Pero en 1900 se estudió la radiación emitida por un "radiador ideal", es decir, un radiador cuya radiación emitida depende sólo de la temperatura del radiador.

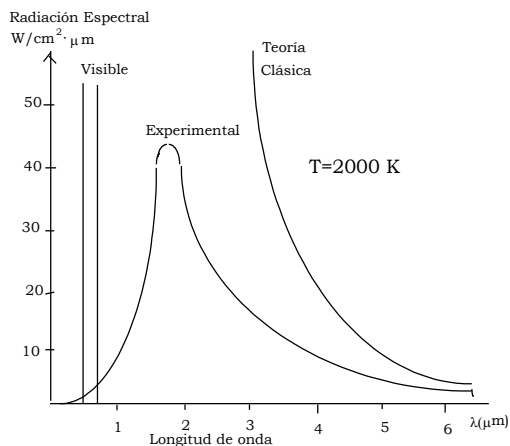
En el laboratorio podemos hacer un radiador ideal realizando una cavidad dentro de un cuerpo y calentando las paredes de la cavidad a una temperatura uniforme. Taladramos un agujero pequeño a través de la pared de la cavidad y una muestra de la radiación, del interior de la cavidad, se escapará hacia el laboratorio, donde se podrá estudiar.

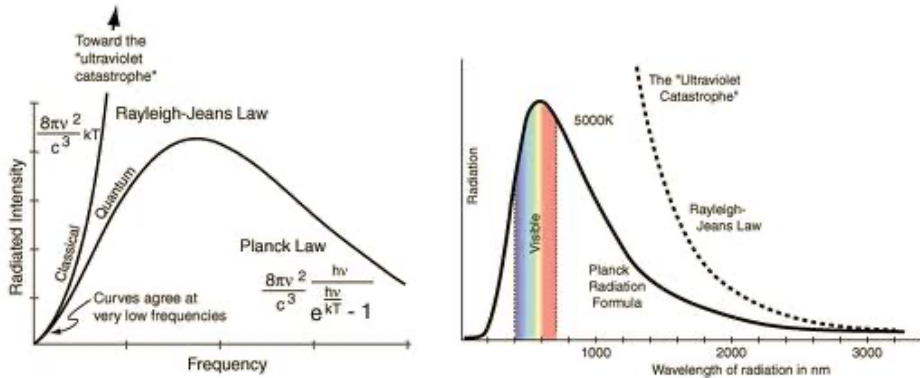
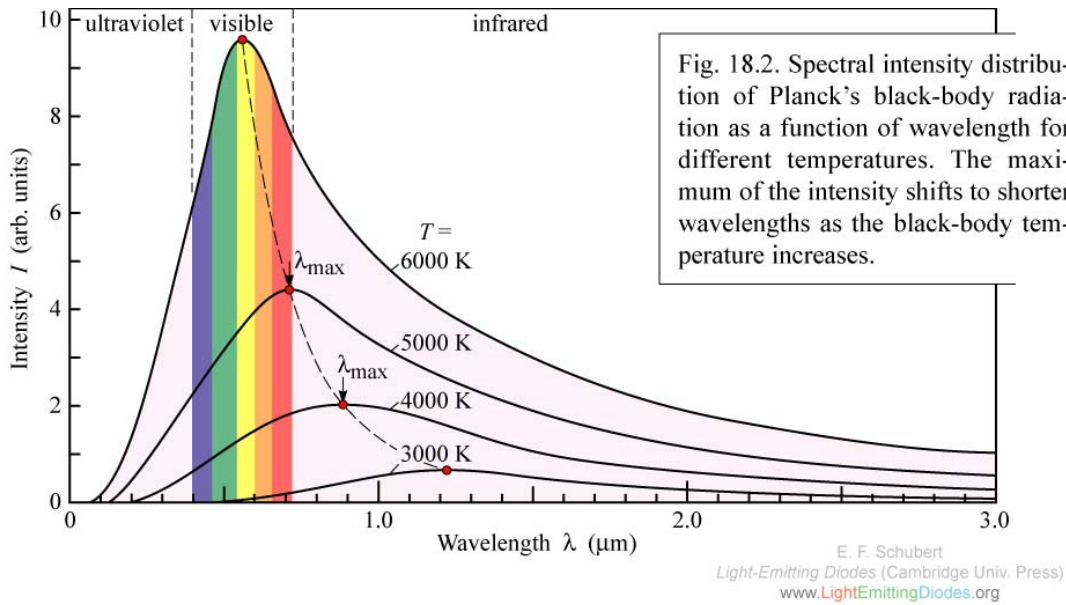
La cavidad se consigue con un tubo de wolframio que se calienta hasta que se ponga incandescente por el paso de una corriente, se hace el taladro de 1 mm de diámetro. Se observa que la radiación de la cavidad es más brillante que la radiación de otra pared externa de la cavidad, aunque la temperatura de las paredes internas y externas son más o menos iguales.

Los experimentos demuestran que la radiación procedente de esa cavidad tienen un espectro muy sencillo que depende solamente de la temperatura de las paredes.

Un **cuerpo negro** es un sistema que absorbe toda la radiación que incide sobre él; y puede aproximarse por una cavidad con una abertura muy pequeña. Las características de la radiación emitida y absorbida por las paredes de la cavidad en equilibrio térmico dependen solamente de la temperatura de las paredes. La propiedad de la radiación de la cavidad que queremos medir se llama su **brillo espectral** $S(\lambda)$ definido de tal forma que $S(\lambda)d\lambda$ nos da la potencia radiada por unidad de área de la apertura de la cavidad que se encuentra en el intervalo de longitud de onda de $\lambda \rightarrow \lambda + d\lambda$

La curva continua, de la gráfica, nos indica el brillo espectral para una cavidad cuyas paredes están a 2000 K.





La predicción de la teoría clásica para la variación del brillo espectral con la longitud de onda, a una temperatura dada, es conocida como la ley de radiación clásica:

$$S(\lambda) = \frac{2\pi ckT}{\lambda^4}$$

Aquí c es la velocidad de la luz y k es la constante de Boltzmann:

$$k = \frac{R}{N_A} = \frac{8,314 \frac{J}{mol \cdot K}}{6,022 \cdot 10^{23} \frac{1}{mol}} = 1,3806 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$$

La ecuación anterior comparada con la experimental nos indica que se cumple a longitudes de onda altas.

En **1900**, el físico alemán **Max Planck** propuso una fórmula para el brillo espectral que coincidía con los resultados experimentales perfectamente en todas las longitudes de onda y para todas las temperaturas. Ley de la radiación de Planck:

$$S(\lambda) = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1}$$

Para obtener esta ecuación **Planck introduce la constante h, llamada constante de Planck, y cuyo valor es $6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$.**

La aceptación de la ecuación anterior de la ley de radiación de Planck implica dos suposiciones muy importantes, que suponen una ruptura con la Física clásica.

1. En primer lugar, supone que **la energía de la radiación de la cavidad está cuantizada**. Es decir, la energía de la radiación existe en forma de múltiplos de la constante h por la frecuencia de la radiación:

$$E = h \cdot \frac{c}{\lambda} = h \cdot \nu.$$
2. En segundo lugar, supone que **la energía de los átomos que forman las paredes de la cavidad está cuantizada**. Es decir, “los átomos que forman las paredes de la cavidad pueden existir sólo en estados que correspondan a valores específicos de energía; los estados con energías intermedias están prohibidos”.

Por tanto, para obtener la ley de Planck hemos de aceptar **el principio de cuantización de la energía**, para la radiación en la cavidad y para los átomos en las paredes de la cavidad.

La ley de radiación de Planck se transforma en la ley de radiación clásica que se cumple bien para los experimentos con longitudes de onda larga.

$$S(\lambda) = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{hc}{\lambda kT} \rightarrow 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \\ e^x - 1 = x \end{array} \right\} \\ S(\lambda) = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \cdot \frac{\lambda kT}{hc} = \frac{2\pi c kT}{\lambda^4} \end{array} \right.$$

7.3.2 El efecto fotoeléctrico

Quizás es irónico que en el famoso experimento de Hertz, en 1887, en el cual produjo y detectó en el laboratorio **ondas electromagnéticas**, confirmando, por consiguiente, la teoría de Maxwell, se descubriera **el efecto fotoeléctrico**.

Hertz usaba un descargador de arco en un circuito resonante para generar las ondas y otro circuito similar para detectarlas. Notó accidentalmente que cuando la luz proveniente del generador se bloqueaba y no llegaba al receptor, el arco receptor tenía que hacerse más corto para que se produjeran las chispas. La luz de cualquier chispa que llegaba a los terminales del arco, facilitaba el paso de las chispas.

Hertz no continuó esta investigación más allá, pero muchos otros sí lo hicieron. **Se encontró que cuando una superficie limpia era expuesta a la luz se emitían partículas negativas.**

Hertz observó que un electroscopio cargado negativamente se descarga si incide sobre él luz ultravioleta. Estas observaciones llamaron la atención de J.J. Thomson y dedujo que la luz ultravioleta era la causante de que el electroscopio emita cargas negativas y vuelva a ser neutro. En 1899 usando técnicas similares a las del descubrimiento del electrón, Thomson demostró que las cargas emitidas eran exactamente las mismas que los electrones, por su relación carga-masa, y presumiblemente eran electrones.

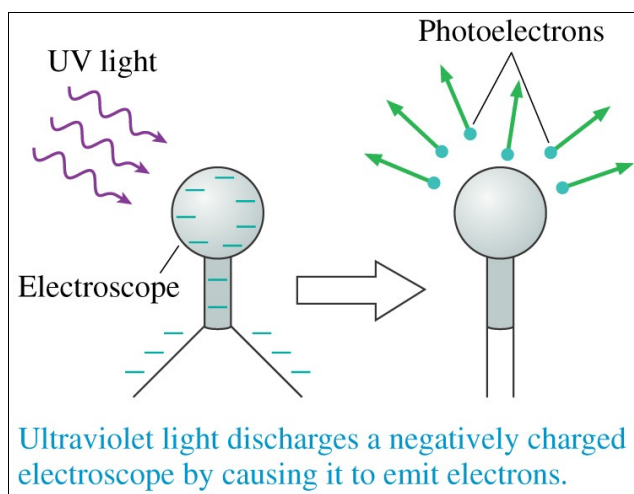
La emisión de electrones desde una sustancia debida a que la luz incide sobre su superficie se llamó **el efecto fotoeléctrico**. Los electrones emitidos se llaman **fotoelectrones para indicar su origen**, pero son idénticos a todos los electrones.

Aunque este descubrimiento no parecía tener mucha importancia fue un descubrimiento esencial para sacar nuevas ideas. Nuestros objetivos son entender por qué la física clásica era incapaz de explicar en detalle este experimento y reconocer el nuevo concepto introducido por Einstein.

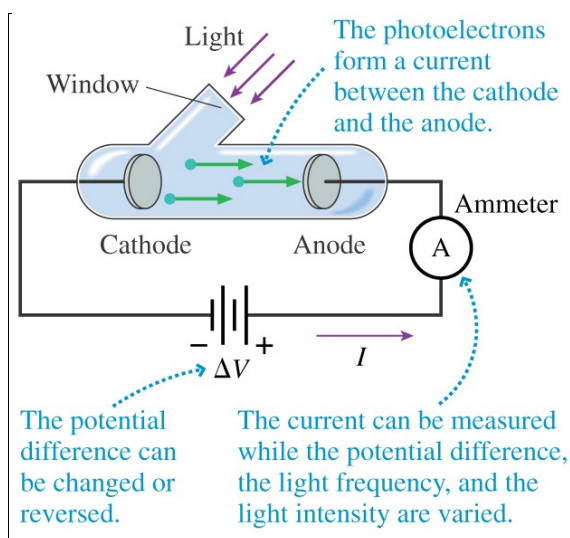
7.3.2.1 Características del efecto fotoeléctrico:

Las características específicas del descubrimiento las realizó en 1900 Phillip Lenard, que era estudiante de Hertz. Lenard construyó un tubo de vidrio, como el de la figura, con dos electrodos y una ventana. Hizo el vacío para que los electrones puedan ir de un electrodo a otro, y que la luz ilumine el cátodo.

Lenard encontró que si una luz ultravioleta ilumina el cátodo se observa que una corriente eléctrica iba en sentido contrario a las agujas del reloj a través del amperímetro. Por lo que tiene que existir una corriente de electrones del cátodo al ánodo, a la misma velocidad (electrones por segundo) que la del alambre, y no hay corriente si los electrodos no reciben luz.

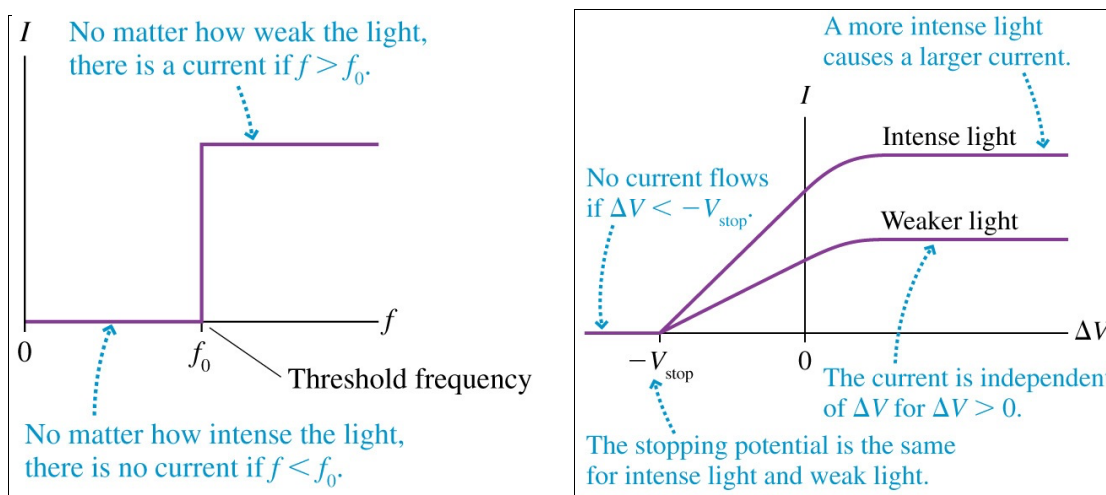


Lenard usó una batería para establecer una diferencia de potencial ajustable entre los electrodos. Y entonces estudió cómo varía la corriente I con los cambios tanto en la diferencia de potencial como en la longitud de onda de la luz y en su intensidad.



Lenard hizo las siguientes observaciones:

1. La corriente I es directamente proporcional a la intensidad de la luz, si la intensidad de la luz se dobla la intensidad de corriente I también se dobla.
2. Cuando se aplica la luz la corriente I aparece sin retraso. Experimentos recientes demuestran que la corriente comienza a menos de 1 ns después de que la luz ilumine el cátodo.
3. Los fotoelectrones son emitidos sólo si la frecuencia de la luz ν excede la frecuencia umbral ν_0 .
4. El valor de la frecuencia umbral ν_0 depende del tipo de metal del que esté hecho el cátodo.
5. Si la diferencia de potencial, $\Delta V = V_{\text{ánodo}} - V_{\text{cátodo}}$, es positiva (ánodo positivo respecto del cátodo), la corriente no cambia cuando se incremente ΔV . Si ΔV se hace negativo (ánodo negativo con respecto al cátodo), por invertir la batería, la corriente decrece hasta llegar a un voltaje $\Delta V = -V_{\text{stop}}$ en el que la corriente se hace cero. El valor de V_{stop} se llama potencial de parada.
6. El valor del potencial de parada V_{stop} es el mismo para luz débil y para luz intensa. Una luz intensa causa mayor corriente, pero en los dos casos cesa cuando $\Delta V = -V_{\text{stop}}$.



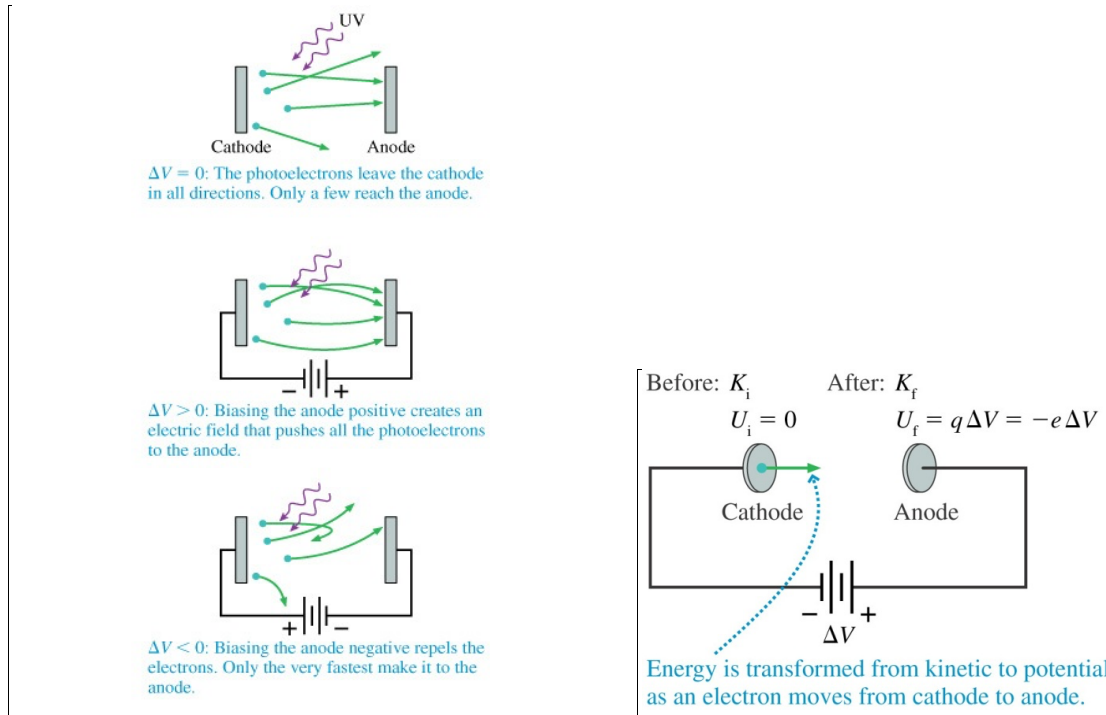
7.3.2.2 Interpretación clásica del efecto fotoeléctrico

La mera existencia del efecto fotoeléctrico no se suele asumir como una dificultad para la física clásica. Se sabe que en los metales los electrones son los transportadores de carga y se mueven libremente por el interior como en un mar de partículas cargadas negativamente. Los electrones están enlazados dentro del metal y a la temperatura ambiente no se desparan fuera del electrodo. Pero una pieza de metal calentado a una temperatura alta emite electrones en un proceso llamado emisión térmica. Los electrones que chocan en una pantalla de televisión parten de una emisión térmica de electrones desde un filamento caliente de wolframio.

La energía mínima E_0 para arrancar un electrón del metal se llama **función trabajo del metal**, en la práctica la emisión térmica de electrones requiere temperaturas por encima de $1.500\text{ }^\circ\text{C}$, y hay solamente unos pocos elementos (wolframio) para los que la emisión térmica puede ser importante antes de que el metal funda.

Al calentar el metal se incrementa la temperatura de los electrones y toda la masa de la red cristalina de iones positivos. Supongamos que solamente aumentamos la temperatura de los electrones y no la de la red cristalina, un camino posible es con una onda de luz iluminando la superficie del metal. Como las ondas electromagnéticas son absorbidas por los electrones de conducción, y no por los iones positivos, la onda de luz calienta sólo los electrones. Aunque indirectamente la energía de los electrones es transferida a la red cristalina, vía colisiones, pero si la luz es suficientemente intensa la temperatura de los electrones puede ser

significativamente superior que la temperatura del metal. Así en 1900 se comprobó que una luz intensa puede causar la emisión térmica de electrones sin fundir el metal.



7.3.2.3 El potencial de frenada

Los fotoelectrones salen del cátodo con energía cinética. Un electrón dentro del metal con energía $E_{\text{electrón}}$ pierde energía ΔE cuando se escapa por lo que sale como fotoelectrón con energía cinética

$$E_{\text{c(fotoelectrón)}} = E_{\text{electrón}} - \Delta E$$

La energía función trabajo E_0 es la energía mínima necesaria para arrancar un electrón, por lo que el máximo de energía cinética posible del fotoelectrón es

$$E_{\text{c(máx)(fotoelectrón)}} = E_{\text{electrón}} - E_0$$

Los fotoelectrones después de salir del cátodo se mueven en todas direcciones, algunos alcanzan el ánodo, creando una corriente medible, pero muchos no lo alcanzan. Siendo los datos:

1. Un ánodo positivo atrae todos los fotoelectrones del ánodo. Una vez que todos los fotoelectrones alcancen el ánodo, si se incrementa ΔV no provoca que aumente la intensidad de corriente I .
2. Un ánodo negativo repele los electrones. Sin embargo, un fotoelectrón que salga del cátodo con suficiente energía cinética puede alcanzar el ánodo. Un ánodo con voltaje negativo ligeramente hace que retrocedan los electrones más lentos. La corriente continua decrece cuando el voltaje del ánodo se incrementa negativamente, hasta llegar al potencial de parada, con el que todos los electrones retroceden y cesa la corriente.

Podemos usar la conservación de la energía para analizar los fotoelectrones. Sea el cátodo el punto de energía potencial cero $U_i = 0$. Un electrón emitido desde el cátodo con energía cinética inicial K_i tiene una energía total inicial $E_i = K_i + U_i = K_i + 0 = K_i$.

Cuando los electrones alcanzan el ánodo, que está a un potencial $\Delta V = V_{\text{ánodo}} - V_{\text{cátodo}}$, respecto del cátodo, tiene una energía potencial $U = q \cdot \Delta V = -e \cdot \Delta V$ y la energía total final es

$$E_f = K_f + U_f = K_f - e \cdot \Delta V$$

De la conservación de la energía $E_f = E_i$ la energía cinética final del electrón $K_f = K_i + e \cdot \Delta V$.

El electrón aumenta su energía cinética si $\Delta V > 0$ y retrocede si ΔV es negativo, pero alcanzará el ánodo ($K_f > 0$) si K_i es grande suficientemente.

Un electrón con energía cinética inicial K_i se parará ($K_f = 0$) al alcanzar el ánodo si la diferencia de potencial es $\Delta V = -K_i/e$. La diferencia de potencial que parará los electrones más rápidos, aquellos con $K = K_{\text{máx}}$ y así parará la corriente

$$\Delta V_{\text{stop(electrones rápidos)}} = -K_{\text{máx}}/e.$$

Por definición la diferencia de potencial que causa el cese de la corriente es $\Delta V = -V_{\text{stop}}$, siendo V_{stop} el potencial de frenada

$$V_{\text{stop(electrones rápidos)}} = K_{\text{máx}}/e.$$

El potencial de frenada nos dice la energía cinética máxima de los fotoelectrones.

Problema del efecto fotoeléctrico clásico: Un experimento de efecto fotoeléctrico se realiza con un cátodo de aluminio, que tiene una función trabajo de 4,28 eV. Un electrón dentro del cátodo tiene una velocidad de $1,5 \cdot 10^6$ m/s. Si la diferencia de potencial entre el ánodo y el cátodo es de -2,00 V, ¿cuál es la mayor velocidad posible con la que este electrón puede llegar al ánodo?.

Consideramos que se conserva la energía. Si el electrón logra escapar como fotoelectrón su energía cinética máxima posible cuando sale del cátodo es: $E_{c(\text{máx})(\text{fotoelectrón})} = E_{\text{electrón}} - E_0$. Siendo la energía cinética cuando llega al ánodo

$$E_{\text{electrón}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \times 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \times (1,5 \cdot 10^6 \text{ m/s})^2 = 1,025 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 6,41 \text{ eV}$$

$$E_{c(\text{máx})(\text{fotoelectrón})} = E_{\text{electrón}} - E_0 = 6,41 \text{ eV} - 4,28 \text{ eV} = 2,13 \text{ eV}$$

$$E_i = K_i + U_i = K_i + 0 = K_i = 2,13 \text{ eV}$$

$$E_f = K_f + U_f = K_f - e \cdot \Delta V$$

$$E_f = E_i ; \text{ luego } K_f = K_i + e \cdot \Delta V = 2,13 \text{ eV} + (-2,00 \text{ eV}) = 0,13 \text{ eV} = 2,1 \cdot 10^{-20} \text{ J}$$

$$V_f = 2,1 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

7.3.2.4 Límites de la interpretación clásica

Un análisis clásico basado en la emisión térmica de electrones desde un metal proporciona posibles explicaciones de las cinco primeras observaciones anteriores de Lenard. Pero nada de estas explicaciones sugiere que existirá una frecuencia umbral. Si una débil intensidad a una frecuencia por encima de ν_0 (f_0) generará una corriente, y una intensidad fuerte a una frecuencia por debajo de ν_0 (f_0) será imposible de conseguirlo. No se explica por qué ese pequeño cambio en la frecuencia es tan importante. Pero Lenard encontró que hay una frecuencia umbral muy importante ν_0 (f_0).

Por otra parte, si los electrones se debiesen a una emisión térmica, debe transcurrir un tiempo para que la luz aumente la temperatura del electrón suficientemente para que este pueda escapar. Sin embargo si la

frecuencia de la luz es superior a la frecuencia umbral la corriente parte instantáneamente tanto para una luz débil como para una luz intensa.

Además, es de esperar que una luz intensa caliente los electrones a alta temperatura, haciendo que se incremente la energía cinética máxima de los fotoelectrones y así se incrementará el potencial de parada V_{stop} . Pero Lenard encontró que el potencial de parada es el mismo para la luz fuerte y la débil.

Aunque la presencia de fotoelectrones no es sorprendente la física clásica no pudo explicar el comportamiento observado de los fotoelectrones. La frecuencia umbral y la corriente instantánea se ven como anomalías.

7.3.2.5 Explicación de Einstein

En 1905 Einstein publicó tres artículos sobre tres hechos diferentes.

1. Uno fue el primero sobre la teoría de la relatividad.
2. Otro para explicar el movimiento Browniano. En 1827 Robert Brown observó con un microscopio pequeños granos de polen suspendidos en el agua, viendo que en lugar de flotar estos se mueven con movimientos cortos alrededor de una posición. Einstein utilizando la mecánica estadística proporcionó una explicación convincente de que esos movimientos se deben a las colisiones al azar de los granos de polen con las moléculas de agua. Y además proporcionó una evidencia de la existencia de los átomos y moléculas.
3. El tercero sobre la naturaleza de la luz, en el que ahora estamos interesados. Ofreció una idea simple pero audaz para explicar los datos de Lenard sobre el efecto fotoeléctrico.

Ya en 1900 Max Planck había obtenido que los átomos oscilan pero no de una forma libre ya que no pueden tener cualquier energía, la energía de un átomo vibrando con frecuencia $\nu(f)$ tiene una energía específica $E = 0, h\nu, 2h\nu, \dots$. Es decir la energía de vibración está cuantizada y Planck determinó el valor de la constante $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} = 4,14 \cdot 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{s}$

Einstein fue el primero que consideró los resultados de Planck y sugirió que la cuantización es real, diciendo que **la radiación electromagnética está cuantizada**. Es decir, la luz no es realmente una onda continua sino que llega en pequeños paquetes de energía. Einstein llamó a cada paquete de energía un quantum de luz, y postuló que la energía de un quantum de luz es directamente proporcional a la frecuencia de la luz. **Cada quantum de luz tiene una energía $E = h\nu$.**

La idea de quantum de luz es como las gotas de lluvia, aunque veamos el agua de lluvia como un continuo está formada de gotas de agua. Las gotas de lluvia es análogo a los quantum de luz. La diferencia entre lluvia intensa y débil es la velocidad con la que llegan las gotas.

Similarmente, un gran número de quanta de luz llegan cada segundo cuando la luz es intensa, y si la luz es débil solamente unos pocos quanta por segundo. De la misma forma que las gotas de lluvia tienen distinto tamaño, las de mayor masa tienen más energía cinética, los quanta de luz de alta frecuencia tienen más energía.

Postulados de Einstein:

Estableció tres postulados sobre los quanta de luz y su interacción con la materia:

1. La luz de frecuencia $\nu(f)$ consiste en discretos quanta, cada uno de energía $E = h\nu$. Cada fotón viaja a la velocidad de la luz c .

2. Quanta de luz son emitidos o absorbidos sobre una base. Una sustancia puede emitir uno, o dos o tres quanta, pero no fracciones (1,5). Similarmente, un electrón en un metal no puede absorber la mitad de un quantum, sólo números enteros.
3. Un quantum de luz, cuando es absorbido por un metal, entrega toda su energía a **un** electrón.

Vamos a analizar cómo se aplican los postulados de Einstein al efecto fotoeléctrico. Se considera que la luz brillante sobre un metal es un torrente de quanta de luz, cada uno de energía $E = h\nu$. Cada quantum es absorbido por un electrón dando al electrón una energía $E_{\text{electrón}} = h\nu$. Esto nos lleva a las siguientes **conclusiones**:

1. Un electrón que ha absorbido un quantum de luz tiene una energía $E_{\text{electrón}} = h\nu$ (la energía térmica del electrón a temperatura ambiente es mucho menor que $h\nu$). Este electrón puede escapar del metal como fotoelectrón si $E_{\text{electrón}} = h\nu \geq E_0$. Por lo que **hay una frecuencia umbral $\nu_0 = E_0/h$** para la expulsión de los fotoelectrones. Si la frecuencia es menor que la frecuencia umbral $\nu < \nu_0$, aunque sea por poca cantidad, ninguno de los electrones tendrá suficiente energía para escapar de la materia aunque la luz sea muy intensa. Pero aunque la luz sea muy débil si su frecuencia es mayor o igual que la frecuencia umbral $\nu \geq \nu_0$, dará a unos pocos electrones suficiente energía para escapar porque **cada quantum de luz entrega toda su energía a un electrón**. Esto es exactamente lo observado por Lenard.
2. Una luz más intensa entrega a la superficie un gran número de quanta de luz. Estos quanta sacan un gran número de fotoelectrones y originan una corriente mayor, que es exactamente lo observado.
3. Hay una distribución de energías cinéticas, porque diferentes fotoelectrones requieren diferentes cantidades de energía para escapar, pero el máximo de energía cinética es: $E_{c(\text{máx})(\text{fotoelectrón})} = K_{\text{máx}} = E_{\text{electrón}} - E_0$. El potencial de parada es una medida de la energía cinética máxima. La teoría de Einstein predice que el potencial de parada está relacionado con la frecuencia de la luz: $V_{\text{stop}(\text{electrones-rápidos})} = \frac{K_{\text{máx}}}{e} = \frac{h\nu - E_0}{e}$. El potencial de parada no depende de la intensidad de la luz. Luz intensa y luz débil tienen el mismo potencial de parada, como observó Lenard pero no pudo ser explicado.

Si cada quantum de luz transfiere su energía $h\nu$ exactamente a un electrón, este electrón inmediatamente tiene energía suficiente para escapar. La corriente empezará instantáneamente, sin retrasos, como observó Lenard.

Una predicción

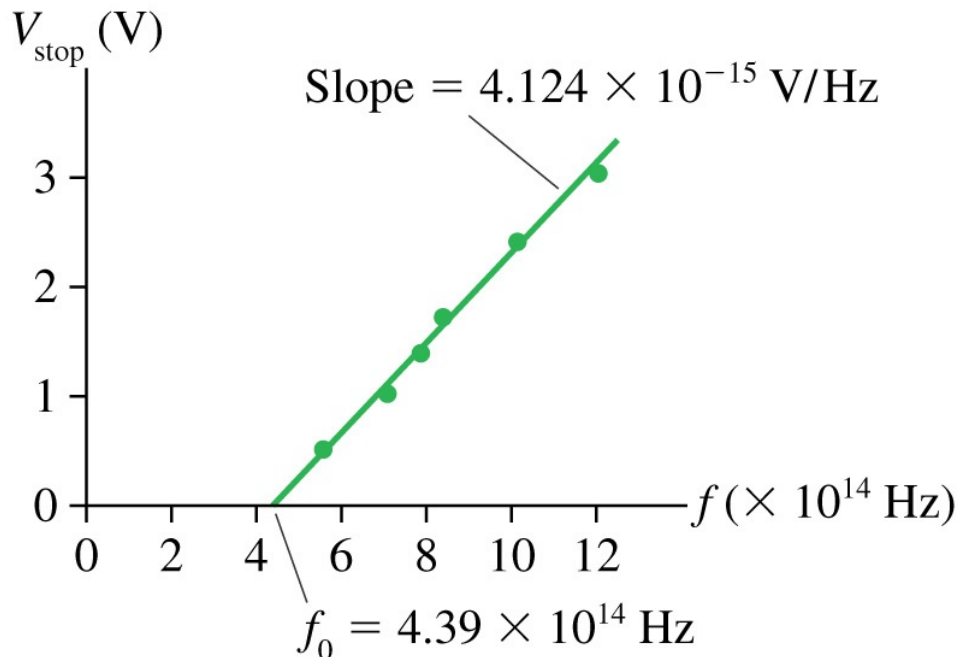
Las hipótesis de Einstein explican todas las observaciones de Lenard y además hacen una nueva predicción.

En base a la ecuación: $V_{\text{stop}(\text{electrones-rápidos})} = \frac{K_{\text{máx}}}{e} = \frac{h\nu - E_0}{e}$, el potencial de parada se incrementa linealmente en función de la frecuencia de la luz ν . Si reescribimos la ecuación

$$V_{\text{stop}(\text{electrones})} = \frac{K_{\text{máx}}}{e} = \frac{h\nu - E_0}{e} = \frac{h\nu - h\nu_0}{e} = \frac{h\nu}{e} - \frac{h\nu_0}{e} = \frac{h}{e}(\nu - \nu_0)$$

La representación gráfica del potencial de frenada frente a la frecuencia se inicia en la frecuencia umbral ν_0 y aumenta linealmente con una pendiente h/e . De hecho la pendiente nos proporciona un camino de hallar h .

Lenard no midió el potencial de frenada para diferentes frecuencias, así que Einstein ofreció esto como una predicción no probada de sus postulados. Y Robert Millikan asumió el reto y obtuvo los datos para un cátodo de cesio, que son los de la figura:



Como podemos ver la predicción de Einstein de la relación lineal entre el potencial de frenada y la frecuencia fueron totalmente confirmados.

De los datos experimentales del efecto fotoeléctrico tenemos que:

$$eV_0 = E_{c(\text{máxima})}$$

Aplicando la ecuación de Einstein:

$$eV_0 = E_{c(\text{máxima})} = hf - W \Rightarrow V_0 = \frac{hf}{e} - \frac{W}{e} = \frac{hf}{e} - \frac{hf_0}{e}$$

- La teoría fotónica de Einstein predice una relación lineal entre el potencial de parada V_0 y la frecuencia f , en completa concordancia con los datos experimentales.
- La pendiente de la recta experimental en la figura será la relación entre la constante de Planck y la carga del electrón, h/e .
- El valor de la pendiente $h/e = (ab/bc) = [(2,35-0,72)\text{V}]/[(10-6)\cdot 10^{14}\text{Hz}] = 4,1\cdot 10^{-15}\text{V}\cdot\text{s}$.
- El valor de $h = e \times 4,1\cdot 10^{-15}\text{V}\cdot\text{s} = 1,6\cdot 10^{-19}\text{C} \times 4,1\cdot 10^{-15}\text{V}\cdot\text{s} = 6,6\cdot 10^{-34}\text{J}\cdot\text{s}$.
- Encontramos que el valor de h es igual a $6,6\cdot 10^{-34}\text{J}\cdot\text{s}$ que está de acuerdo con el obtenido por Planck en la radiación térmica.

7.3.2.6 Fotones

Einstein recibió el premio nobel en 1921 por su descubrimiento de la ley del efecto fotoeléctrico. Aunque Planck lo recibió en 1918 en reconocimiento por el descubrimiento del quanta de energía, fue Einstein quien demostró convincentemente que la energía está cuantizada y que la luz, aunque exhibe la interferencia, viaja como paquetes de energía tipo partículas. Estas unidades fundamentales de energía de luz se le llamaron posteriormente **fotones**.

¿Qué son los fotones?. Aunque se comportan como partículas no encajan con la idea clásica de partícula. Una partícula clásica cuando se enfrenta al experimento de Young de la doble rendija, pasaría a través de una rendija o de la otra, y sobre la pantalla veríamos dos puntos brillantes en lugar de las figuras de interferencia detrás de una doble rendija.

Podemos detectar los fotones, medir sus propiedades y hacer uso práctico de ellos, pero la naturaleza última del fotón es un misterio.

La velocidad del fotón

Si consideramos la luz como un chorro de fotones (como la lluvia está formada por un chorro de gotas de agua), la energía total de una luz monocromática de frecuencia ν de N fotones es $E = N \cdot h \cdot \nu$.

La potencia de la luz o la velocidad (julios/s) a la que la energía de la luz sale

$$P = \frac{dE_{\text{luz}}}{dt} = \frac{dN}{dt} h\nu = R h\nu$$

Siendo $R = dN/dt$ la velocidad con la que los fotones llegan o el número de fotones por segundo.

Ejemplo.- Un chorro de luz de un láser helio-neon ($\lambda = 633 \text{ nm}$) de una potencia de 1 mW se desparrama sobre una pantalla. ¿Cuántos fotones chocan con la pantalla cada segundo?

Solución:

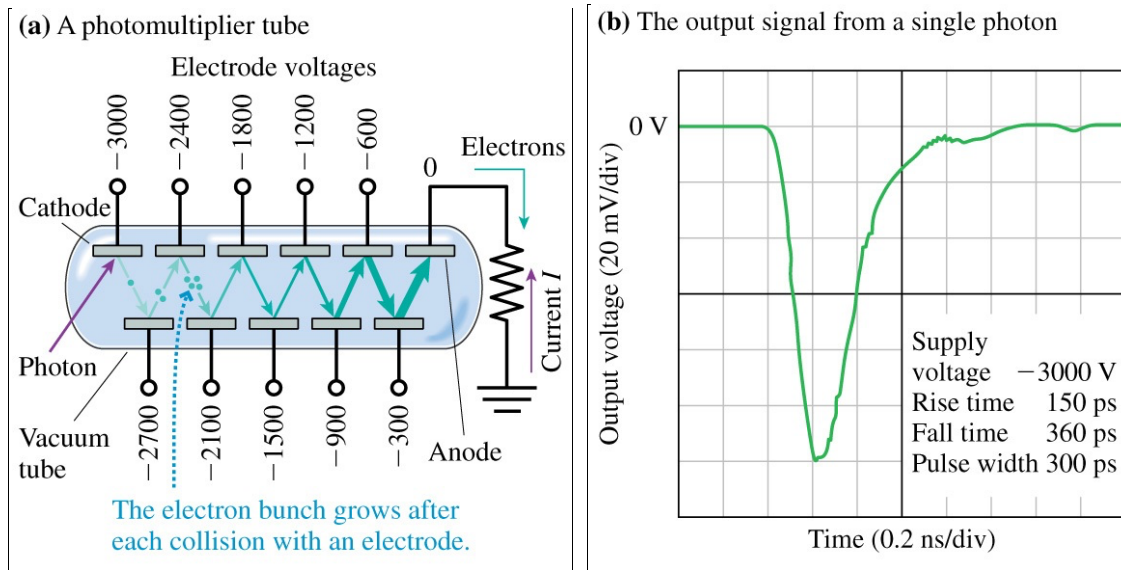
$$R = \frac{dN}{dt} = \frac{P}{h\nu} = \frac{0,001 \text{ W}}{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \times \frac{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{633 \cdot 10^{-9} \text{ m}}} = 3,18 \cdot 10^{15} \frac{\text{fotones}}{\text{s}}$$

Foto-detectores

Los modernos fotodetectores se basan en el efecto fotoeléctrico. Si los niveles de luz son muy bajos se puede detectar fotón a fotón con el aparato llamado tubo fotomultiplicador-

El fotomultiplicador está formado por un cátodo, un ánodo y un número de electrodos intermedios dentro de un tubo de vidrio al vacío.

El cátodo está recubierto de un material de función trabajo bajo, permitiendo responder a luz de longitud de onda visible. El cátodo tiene un voltaje más negativo que el ánodo, de voltaje cero.



Un fotón de luz sobre el cátodo expulsa un fotoelectrón del cátodo. El campo eléctrico entre el cátodo y el primer electrodo intermedio acelera ese electrón con una diferencia de potencial de 300 V y colisiona con el electrodo a velocidad alta. Cuando el electrón colisiona con la superficie metálica puede arrancarle dos o tres electrones que son acelerados hacia el segundo electrodo intermedio donde vuelven a arrancar más electrones. Estos son acelerados al tercer electrodo intermedio y vuelven a arrancar más electrones, y así sucesivamente. Esta reacción en cadena produce una multiplicación de electrones que se mueven del cátodo al ánodo.

Un único fotón en el cátodo puede hacer que un millón de electrones lleguen al ánodo. Estos electrones que llegan al ánodo fluyen a través de una resistencia. Como son transportadores de carga negativa la intensidad de corriente I viaja en sentido contrario, esto crea un voltaje negativo cruzando la resistencia.

En la figura se observa un pulso generado por un fotón, el pulso es de unos $120 \text{ mV} = 0,12 \text{ V}$.

7.4 Dualidad onda-corpúsculo. Hipótesis de De Broglie

Introducción histórica: En la historia de la Física se comprueba que los físicos raramente se equivocan cuando consideran la simetría de la naturaleza. Por ejemplo, hemos estudiado que un campo magnético variable produce un campo eléctrico, esto llevó a considerar que un campo eléctrico variable produciría un campo magnético. Esto se comprobó posteriormente. Otro ejemplo, el electrón tiene una antipartícula, es decir, una partícula de la misma masa pero de carga opuesta. Se pensó que el protón deberá tener una antipartícula. Se construyó un acelerador protónico de 5 GeV en la universidad de California (Berkeley) para encontrar el antiprotón hasta que se encontró.

Hipótesis de De Broglie: En 1924 Luis de Broglie consideró el problema sobre el hecho de que la luz parece tener una naturaleza dual onda-partícula mientras la materia (en aquel tiempo) se consideraba enteramente como partícula. Esta consideración dual no es contraria con el hecho de que la luz y la materia son formas de energía, que cada una se puede transformar en la otra y que ambas están gobernadas por la simetría espacio-tiempo de la teoría de la relatividad.

Luis de Broglie comenzó a pensar que la materia también tendrá una naturaleza dual y que las partículas tales como los electrones tendrán propiedades ondulatorias.

Si queremos describir el movimiento de una partícula como una onda, la primera tarea es contestar a la siguiente pregunta: ¿cuál es su longitud de onda?. **Luis de Broglie sugirió que la relación $\lambda = \frac{h}{p}$ aplicada a la luz también se aplicaría a la materia. Por tanto, la longitud de onda de una partícula de momento p viene dada por $\lambda = \frac{h}{p}$.**

Una longitud de onda calculada mediante la ecuación anterior se llama longitud de onda de De Broglie. De la ecuación anterior, obtenemos el papel central que juega la constante de Planck, $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ Js que conecta los aspectos ondulatorios y de partícula de la luz y de la materia. Al ser la constante de Planck muy pequeña esta doble naturaleza onda-corpúsculo se pone de manifiesto en partículas muy pequeñas.

Einstein propuso que **la energía de un cuanto de luz (fotón) es $E = hf$** . En la cual f es la frecuencia de la luz y h es la constante de Planck, introducida unos pocos años antes y que tiene un valor de $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Js = $4,14 \cdot 10^{-15}$ eV·s. **Los fotones llevan energía y momento lineal.**

Para hallar el momento de un fotón que se mueve a alta velocidad utiliza la

Esta expresión $(E_t)^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$ nos da la relación relativista entre el momento lineal, p , y la energía total de la partícula, de masa m , sea de un electrón o de un protón.

La ecuación anterior la podemos aplicar a un **fotón** cuya masa es cero, $m_{\text{fotón}}=0$, y por tanto para un fotón viajando a la velocidad de la luz $E = p \cdot c$. Sustituyendo la energía por $E = hf = pc$, deducimos que $hf = pc$, y despejando el momento lineal $p = hf/c$. Como la velocidad de la luz es igual a $c = \lambda f$, obtenemos que el momento de un fotón y la longitud de onda de la luz se relacionan por

$$\begin{cases} E_{\text{fotón}} = pc \\ E_{\text{fotón}} = hf \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} pc = hf \\ c = \lambda f \end{cases} \Rightarrow p = \frac{h}{\lambda}$$

Con esta última expresión obtenemos que los modelos ondulatorios y de fotón están íntimamente relacionados. La energía E de un fotón se relaciona con la frecuencia f de la onda por $E=hf$. De igual forma, el momento p del fotón se relaciona con la longitud de onda de la onda. En cada caso, el factor de proporcionalidad es la constante de Planck h .

Las relaciones anteriores nos permiten mirar el espectro electromagnético de una forma distinta. Hasta ahora hemos expuesto el espectro electromagnético como una serie o cadena de longitudes de onda o, de igual forma, de frecuencias. Ahora podemos considerarlo también como una cadena de energías fotónicas o de momentos fotónicos.

Con el modelo fotónico de la luz se pueden resolver los problemas que planteaba el efecto fotoeléctrico. Por ejemplo, el problema de la intensidad en el modelo fotónico se explica sencillamente. Si doblamos la intensidad de luz simplemente doblamos el número de fotones pero no cambiamos la energía de los fotones individuales que viene dada por la expresión $E=hf$. Por lo que la energía cinética que un electrón puede alcanzar debido a la colisión del fotón permanece constante.

Respecto al problema de la frecuencia, el modelo fotónico lo explica sencillamente. Así la conducción de los electrones en el interior del metal se debe a un campo eléctrico, por lo que el arranque de un electrón necesita un mínimo de energía, W , llamada función trabajo del material. Si la energía del fotón excede de la función trabajo, es decir si $hf > W$, el efecto fotoeléctrico puede ocurrir. Si esto no es así el efecto no tendrá lugar.

7.4.1 Análisis del fenómeno dualidad onda-corpúsculo: Partículas y campos

Nuestra experiencia sensorial, nos lleva a considerar que los objetos que tocamos, tienen una forma y un tamaño bien definidos, por lo que están bien localizados en el espacio. Por tanto, tendemos a extrapolar y consideramos que las partículas fundamentales de la materia (electrones, protones, etc.) tienen forma y tamaño y las imaginamos como pequeñas esferas con un radio determinado, con una masa y carga. *Los experimentos nos demuestran que nuestra extrapolación sensorial de los constituyentes básicos de la materia es errónea.* El comportamiento dinámico de los átomos y de las partículas subatómicas requiere que asociemos a cada partícula un campo (un **campo de materia**), de la misma forma que asociamos un fotón (que puede considerarse equivalente a una partícula) con un campo electromagnético.

Ondas de materia: verificación experimental

Para probar que en un experimento estamos tratando con una onda lo que debemos hacer es medir su longitud de onda. Esto es lo que hizo Thomas Young en 1801 cuando estableció la naturaleza ondulatoria de la luz visible; y lo que hizo en 1912 Max von Laue para establecer la naturaleza ondulatoria de los rayos X.

Para medir una longitud de onda necesitamos dos o más centros de difracción (agujeros, rendijas, o átomos) separados por una distancia que sea del mismo tamaño que la longitud de onda que estamos buscando para medir.

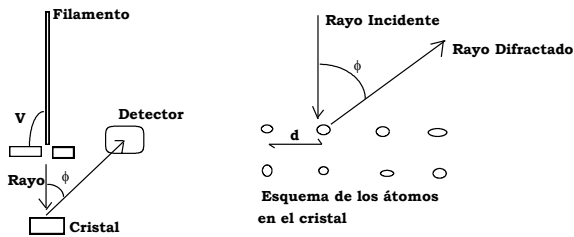
Si aplicamos la ecuación $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_c}}$ a un electrón con una energía cinética de 120 eV encontramos

que la longitud de onda asociada al electrón de masa $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{kg}$ será de 112 pm, que es del orden de la distancia que separa a los átomos.

Sin embargo, si aplicamos la ecuación anterior a una pelota de masa 150 g con una velocidad de 35 m/s encontramos que la longitud de onda asociada a la pelota será de $1,26 \cdot 10^{-34} \text{m}$, que para detectarla necesitamos un par de rendijas a una distancia de este orden. Lo que nos indica el por qué no se observa que la pelota se comporte como una onda.

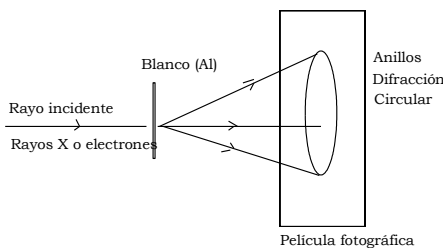
El experimento de Davisson-Germer: Los físicos *Davisson* y *Germer* crearon un aparato para demostrar la naturaleza ondulatoria de los electrones. Los electrones son emitidos desde un filamento a temperatura alta, son acelerados por una diferencia de potencial ajustable. La energía cinética de los electrones que se dirigen hacia un cristal de Ni es igual al producto $e \cdot V$. Después de que se reflejen en el cristal de Ni se registran en un detector, que puede girar para obtener diferentes posiciones angulares. El “rayo” reflejado, desde la superficie del cristal, entra en el detector y se registra como una corriente I.

Los distintos experimentos se hacen a diferentes valores de diferencia de potencial V y la lectura de la corriente I por el detector se hace colocándolo a ángulos distintos. Se comprueba que para $V=54$ voltios se observa un fuerte rayo difractado a 50° . Si el potencial acelerador se incrementa o decrece un poco, la intensidad del rayo difractado disminuye. El rayo difractado se forma por reflexión de Bragg del electrón como onda de materia desde una familia determinada de planos atómicos dentro del cristal: $d \sin \phi = m \lambda$ ($m = 0, 1, 2, \dots$). Para el cristal de Davisson y Germer d que es la distancia interatómica 215 pm. Para $m=1$ que corresponde a un pico de difracción de primer orden nos lleva a una longitud de onda de 165 pm: $215 \text{ pm} \times \sin 50^\circ = 165 \text{ pm}$.



El valor esperado de la longitud de onda de De Broglie para un electrón de energía 54 eV es de 167 pm, que está en correspondencia con el valor medido. Por lo que se confirma la predicción de De Broglie.

El experimento de G.P. Thomson: En 1927 *G.P. Thomson* trabajando independientemente de Davisson y Germer confirmó la ecuación de Luis de Broglie usando un método algo diferente. Dirigió un rayo monoenergético de rayos X o electrones a través de una hoja metálica (A) muy fina, que hacía de blanco. El blanco no era un cristal, como en el experimento de Davisson y Germer, pero estaba hecho de un gran número de pequeños cristallitos orientados al azar. Con esta distribución habrá siempre, por casualidad, un cierto número de cristales orientados en un determinado ángulo para producir un rayo difractado.



Si una placa fotográfica se sitúa perpendicularmente al rayo incidente se observa una mancha central rodeada por anillos de difracción. Haciendo el experimento con electrones de una determinada longitud de onda, para una energía de 15 eV, se obtiene la misma figura de difracción que si utilizamos rayos X de la misma longitud de onda. Las medidas y el análisis de las dos figuras de difracción confirman la hipótesis de De Broglie en cada detalle.

G. P. Thomson compartió el premio Nobel en 1937 con Davisson por los experimentos de difracción de los electrones y su padre J.J. Thomson recibió el premio Nobel en 1906 por su descubrimiento del electrón y por la medida de su relación carga/masa.

Aplicaciones de las ondas de materia: Hoy en día la naturaleza ondulatoria de la materia está aceptada, y los estudios de difracción implicando rayos de electrones y neutrones se usan rutinariamente para estudiar la estructura atómica de los sólidos y de los líquidos. Así en los laboratorios de análisis químico, físico y metalúrgico poseen aparatos comerciales de difracción de electrones. Las ondas de materia son complementarias a los rayos X para estudiar la estructura atómica de los sólidos. Los electrones, por ejemplo, son menos penetrantes que los rayos X y son útiles para estudiar los rasgos en la superficie. Por el contrario, los rayos X interactúan, en gran parte, con los electrones de un blanco que utilizemos, y por esta razón no se utilizan para localizar los átomos ligeros, particularmente hidrógeno. Los neutrones, sin embargo, interactúan en gran parte con los núcleos y pueden usarse mejor que los rayos X para los átomos ligeros. Por ejemplo, con una difracción de neutrones sobre benceno sólido se pudo comprobar la estructura del anillo bencénico hexagonal y los seis átomos de hidrógeno acoplados a él.

La función de onda: Cuando Thomas Young midió la longitud de onda en 1801 no tenía ni idea sobre la naturaleza del rayo de luz solar que cae sobre las dos rendijas en su aparato de interferencia. No fue hasta

finales del siglo cuando Maxwell postuló que la luz es una configuración en movimiento de campos eléctrico y magnético.

Estamos exactamente en la misma situación en esta etapa de nuestra introducción a las ondas de materia. Podemos medir la longitud de onda asociada con un electrón o un neutrón pero hasta ahora no conocemos cual es la naturaleza de lo ondulatorio. Es decir, no conocemos que cantidad en una onda de materia corresponde al campo eléctrico en una onda electromagnética, al desplazamiento transversal en una onda viajando a lo largo de una cuerda estirada, o a la variación de la presión local en una onda de sonido viajando por medio de un tubo lleno de aire.

Usaremos el término **función de onda** para la cantidad cuya variación con la posición y el tiempo representa el aspecto ondulatorio de una partícula en movimiento y le asignamos el símbolo Ψ . Posteriormente, interpretaremos la función de onda físicamente de una forma análoga con la luz: “Onda de materia es a partícula como onda de luz es a fotón”.

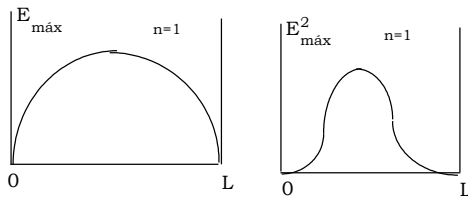
En primer lugar desarrollaremos un teorema útil que se aplica a todo tipo de ondas. Cuando analizamos las ondas sobre cuerdas, vimos que se puede enviar una onda viajera, de cualquier longitud de onda, a través de una cuerda estirada de longitud infinita. Sin embargo, si lo hacemos en una cuerda de longitud finita, sólo las ondas estacionarias se pueden conseguir y estas tienen una serie discreta de longitudes de onda. Esta experiencia general con las ondas se puede resumir: *“Una onda en el espacio, localizada en una zona concreta, tiene como resultado que solo puede tener una serie discreta de longitudes de onda, y por tanto una serie discreta de frecuencias. Es decir, la localización nos conduce a la cuantización”*

Este teorema sirve no sólo para ondas en cuerdas sino para ondas de todos tipos, incluyendo ondas electromagnéticas y, como veremos, ondas de materia. Una onda estacionaria se produce cuando una cuerda se restringe a una longitud L con los extremos fijos, siendo la longitud de onda $\lambda = 2L/n$, para $n = 1, 2, 3, \dots$, en el que el número entero n define el modo de oscilación. Tales números enteros se llaman números cuánticos. Las frecuencias que corresponden a estas longitudes de onda están también cuantizadas y vienen dadas por $f = v/\lambda = v/(2L) \cdot n$, en la que v es la velocidad de la onda.

Ondas de luz y fotones: Podemos considerar las ondas electromagnéticas estacionarias exactamente como las producidas en una cuerda estirada. Las ondas electromagnéticas estacionarias se consiguen atrapando una radiación entre dos espejos paralelos que sean totalmente reflectantes. En la región visible o próxima a la visible las ondas estacionarias se consideran en la cavidad de un gas láser. También se consideran ondas estacionarias en la región de microondas del espectro usando como espejos paralelos hojas de cobre.

A partir de ahora, por conveniencia, consideraremos solo el modo de oscilación que tiene la mayor longitud de onda y, por tanto, la menor frecuencia, que corresponde a la onda con $n=1$. La representación en el eje de abscisas, eje x , de la longitud L (distancia entre los espejos) y en el de ordenadas de la amplitud de la onda $E_{\text{máxima}}$ de nuestra onda electromagnética estacionaria como una función de la posición, para este modo. Vemos que exactamente la mitad de una onda está encajada entre los espejos, los cuales están en O y en L , por lo que la longitud de onda λ es $2L$.

En otra figura se representa $(E_{\text{máx}})^2$ para el mismo modo de oscilación, y como la densidad de energía u , es igual a $u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$, la gráfica representa la densidad de energía en la onda electromagnética estacionaria.



Luz atrapada entre dos espejos paralelos planos separados por L
 A la izquierda amplitud frente posición para $n=1$
 A la derecha el cuadrado de la amplitud que es proporcional a la densidad de fotones.

Podemos considerar que la densidad de energía en cualquier punto se debe a fotones que están localizados en aquel punto, y cada fotón llevando la misma energía hf . Por tanto, puede concluirse que el cuadrado de la amplitud de onda, en cualquier punto, en una onda electromagnética estacionaria es proporcional a la densidad de fotones en aquel punto. Esta conclusión se puede testar explorando la región entre los espejos con una sonda fotónica. Encontraremos un máximo de densidad de fotones en la mitad del camino entre los espejos y una densidad aproximadamente cero delante de los espejos.

Si la energía total en las ondas estacionarias se muestra tan baja que corresponde a la energía de un único fotón, podemos decir: “*la probabilidad de detectar un fotón en cualquier punto es proporcional al cuadrado de la amplitud que la onda electromagnética tiene en aquel lugar*”.

Hay que hacer notar que nuestro conocimiento de la posición de un fotón es de naturaleza estadística. Es decir, no podemos saber exactamente donde está un fotón en un momento dado; podemos hablar sólo de la probabilidad relativa de que un fotón esté en una cierta región del espacio. Como veremos, esta limitación estadística es fundamental para la luz y para la materia, para los fotones y para las partículas.

Ondas de materia y electrones: Para considerar la relación entre ondas de materia y partículas, usamos el electrón como prototipo y nos sirven de guía para nuestra analogía entre luz y ondas de materia.

¿Cómo podríamos considerar una onda de materia estacionaria usando un electrón?. Recordando el teorema localización-cuantización desarrollado en el apartado función de onda, queremos encontrar una situación en la que un electrón esté confinado en una región del espacio, debido a fuerzas eléctricas, que sería como un electrón atrapado. Las ondas de materia asociadas con el electrón se comportarán como una serie de ondas de materia estacionarias, con una frecuencia específica.

Los átomos son justamente un sistema con electrones atrapados. De hecho, muchos de los electrones en los átomos que constituyen nuestro planeta y la vida que hay han sido atrapados antes de la formación del sistema solar.

Para nuestro propósito, consideremos un electrón atrapado en un sistema unidimensional, en el que el electrón solamente se puede mover en el eje x , entre dos paredes rígidas separadas una distancia L . La energía potencial $U(x)$ será cero dentro de la zona en que está atrapado L , y alcanzará rápidamente un valor infinitamente grande en $x=0$ y $x=L$. La zona de atrapamiento se le suele llamar un pozo de potencial.

Para un electrón atrapado en su estado $n=1$, representamos la gráfica de su función de onda y del cuadrado de la función de onda.

Razonando por analogía con las ondas de luz y los fotones, concluimos que: “*La probabilidad de encontrar el electrón en cualquier lugar es proporcional al cuadrado de la amplitud que la onda de materia tiene en aquel lugar*”.

En particular, la probabilidad de encontrar el electrón en el intervalo entre x y $x+dx$, es proporcional a la cantidad $\Psi^2(x)dx$.

Para nuestros propósitos, el cuadrado de la función de onda, que llamamos densidad de probabilidad, es más importante que la propia función de onda porque el cuadrado nos dice donde es probable que se encuentre el electrón. La probabilidad de que el electrón esté en alguna parte del pozo infinito es la unidad $\int \Psi^2(x) dx = 1$. La integral es simplemente el área bajo la curva y como es numéricamente igual a uno se dice que está normalizada.

Energías de los estados posibles: Hemos considerado que la energía potencial del electrón atrapado es constante dentro del pozo infinito y su valor es cero. Por tanto, la energía electrónica total es igual a su energía cinética, si $n = 1, 2, \dots$ tenemos

$$E = E_c = \frac{p^2}{2m} \quad \left\{ p = \frac{h}{\lambda} = \frac{hn}{2L} \right\} \quad E = E_c = \frac{p^2}{2m} = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$$

La energía en el punto cero: Un resultado importante es que en el pozo de potencial infinito el electrón no puede estar en reposo. Esto se debe a que su energía menor es su energía en el estado fundamental que corresponde a $n=1$, luego $E_1 = h^2/(8mL^2)$. Este resultado nos indica que los electrones no puede tener energía cero por lo que el electrón no puede ser estacionario, ni siquiera en el cero absoluto de temperatura.

El átomo de hidrógeno: Vamos a extender el análisis de un electrón atrapado en un pozo infinito a un caso más realista de un electrón atrapado en un átomo. Para ello elegimos el átomo de hidrógeno.

El átomo de hidrógeno tiene un sólo electrón unido a su núcleo (un sólo protón) por la fuerza atractiva eléctrica. La energía de los estados posibles del átomo de hidrógeno

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} K_e \frac{Ze^2}{r} - K_e \frac{Ze^2}{r} = -\frac{1}{2} K_e \frac{(Ze^2)^2 m_e}{n^2 \hbar^2}$$

El átomo de hidrógeno, como el electrón en un pozo infinito, también tiene una energía en el punto cero, correspondiente a $n=1$. La densidad de probabilidad para el estado fundamental del átomo de hidrógeno viene dada por $\Psi^2(r) = \frac{1}{\pi r_B^3} e^{-2r/r_B}$ siendo r_B el radio de Bohr de valor $r_B = 5,292 \cdot 10^{-11} \text{ m} = 52,92 \text{ pm}$. El

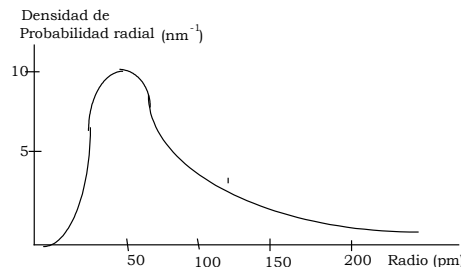
significado físico de la ecuación anterior es que $\Psi^2(r) dV$ es proporcional a la probabilidad de que el electrón se encuentre en un elemento específico infinitesimal de volumen. Supongamos que queremos evaluar $\Psi^2(r) dV$, como la densidad de probabilidad $\Psi^2(r)$ depende sólo de r , elegimos como elemento dV el volumen entre dos capas de esferas concéntricas cuyos radios son r y $r + dr$. Es decir, definimos un elemento de volumen $dV = 4\pi r^2 dr$.

Ahora definimos la **densidad de probabilidad radial** $P(r)$ de tal forma que $P(r) \cdot dr$ nos exprese la probabilidad de encontrar el electrón en el elemento de volumen definido por

$$P(r) dr = \Psi^2(r) dV = \frac{1}{\pi r_B^3} e^{\left(\frac{-2r}{r_B}\right)} 4\pi r^2 dr = \frac{4r^2}{r_B^3} e^{\left(\frac{-2r}{r_B}\right)} dr$$

En la teoría semiclásica de Bohr, el electrón en su estado fundamental describe una órbita circular de radio r_B . En la mecánica ondulatoria se descarta esta representación y se considera el átomo de hidrógeno como un pequeño núcleo rodeado por una nube de probabilidad cuyo valor $P(r)$ en cualquier punto viene dado por

$$P(r) = \frac{4r^2}{r_B^3} e^{\left(\frac{-2r}{r_B}\right)}$$



Se puede demostrar que $\int P(r)dr = 1$ el área bajo la curva es la unidad, lo que asegura que el electrón en el átomo de hidrógeno está ligado en alguna parte. En la teoría semiclásica de Bohr el electrón en su estado fundamental gira en una órbita circular de radio r_B . En mecánica ondulatoria descartamos esta representación fotográfica. Consideramos el átomo de hidrógeno como un pequeño núcleo rodeado por una nube de

probabilidad cuyo valor $P(r)$ en algún punto está dado por $P(r) = \frac{4r^2}{r_B^3} e^{\left(\frac{-2r}{r_B}\right)}$. No debemos preguntar “¿Está el electrón próximo a este punto?”. Aunque “¿cuáles son los puntos de ventaja de que el electrón esté próximo a este punto?”. Esta información probabilística es todo lo que podemos conocer acerca del electrón y además, también es todo lo que alguna vez necesitaremos conocer.

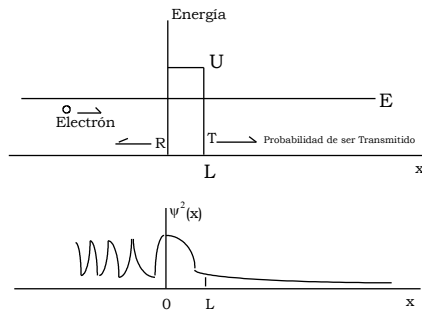
Como se demuestra en la gráfica la densidad de probabilidad radial tiene un valor máximo en el radio clásico de Bohr. Los puntos que indican que el electrón estará más alejado del núcleo tienen el valor del 68% del tiempo y los más próximos el 32% restante del tiempo.

No es fácil empezar a analizar las partículas subatómicas de esta forma probabilística y estadística. La dificultad es nuestro impulso natural a considerar un electrón como una minúscula partícula o como un grano de gelatina, estando en un determinado lugar en un determinado tiempo y siguiendo una trayectoria bien definida. Los electrones y otras partículas subatómicas simplemente no se comportan de esta forma. En la sección siguiente trataremos de ayudar a disipar esta penetrante falacia de “grano de gelatina” (jelly bean fallacy) como se le suele llamar.

Efecto túnel: En la siguiente figura se representa una barrera de energía, llamada barrera de potencial (potencial se refiere a energía potencial), de altura U y anchura L . Un electrón de energía E se aproxima a la barrera por la izquierda.

Clásicamente como $E < U$ el electrón se Reflejará desde la barrera y retrocederá desde la dirección de la que viene. En mecánica cuántica, hay una probabilidad finita de que el electrón aparezca sobre la otra parte de la barrera y continúe su movimiento sobre la derecha.

Es como si un grano de gelatina se deslizase sobre una superficie sin rozamiento, en un plano inclinado, cuesta arriba sin la energía suficiente para subir y caer. Sin embargo, los electrones que no son granos de gelatina y como tales atraviesan la barrera por un túnel como realmente sucede.



Barrera de Energía de altura U y anchura L , y E la energía del electrón
Densidad de probabilidad para la onda de materia del electrón

Si representamos el electrón como una onda de materia, en la figura se demuestra la curva de densidad de probabilidad apropiada. A la izquierda de la barrera, hay una onda de materia moviéndose hacia la derecha y una onda de materia reflejada moviéndose hacia la izquierda. Estas dos ondas interfieren produciendo la figura de interferencia que vemos en la región $x < 0$. Dentro de la barrera la densidad de probabilidad decrece exponencialmente. Sobre la otra parte de la barrera $x > L$ tenemos solo una onda de materia viajando hacia la derecha con una pequeña amplitud pero constante. El coeficiente de transmisión es igual a

$$T = e^{-2kL} \left\{ k = \sqrt{8\pi^2 m (U - E) h^{-2}} \right\}$$

El valor de T depende de E , de U y de L .

Como ejemplo de efecto túnel, considera un alambre pelado de cobre que ha sido cortado y los dos extremos unidos dando vueltas. El alambre conducirá la electricidad a pesar del hecho de que los dos alambres pueden estar cubiertos con una capa delgada de óxido de cobre, que es aislante. Los electrones simplemente penetran por efecto túnel a través de esta pequeña capa de barrera aislante.

Otros ejemplos de efecto túnel es el diodo túnel en el que el flujo de electrones a través del aparato se puede parar o no controlando la altura de la barrera, lo que se puede hacer en 5 ps.

7.4.2 Principio de incertidumbre de Heisenberg

El camino erróneo de pensar como “grano de gelatina” es, sin embargo, una extensión natural de nuestra experiencia con los objetos como una pelota, que podemos ver y tocar. Pero este modelo no sirve para trabajar en el nivel subatómico. Si un electrón fuera algo parecido a un grano de gelatina, podríamos, en principio, medir su posición y su momento en cualquier instante, con una precisión ilimitada. Pero ello no se puede hacer.

No se está considerando dificultades prácticas de medida ya que asumimos instrumentos de medida ideales. Tampoco es que los electrones tengan un momento y una posición infinitamente precisa sino que, por alguna razón, la naturaleza no nos permite encontrarlos o determinarlos. **Lo que estamos tratando con esto es una limitación fundamental sobre el concepto de “partícula”.**

El **principio de incertidumbre de Heisenberg** nos proporciona una medida cuantitativa de esta limitación. Supongamos que queremos medir la posición y el momento lineal de un electrón que está restringido a moverse a lo largo del eje X . Sea Δx la incertidumbre en la medida de su posición y sea Δp_x la incertidumbre en la medida de su momento lineal. El principio de incertidumbre de Heisenberg establece que $\Delta \vec{p}_x \cdot \Delta \vec{x} \geq \hbar$. El símbolo \geq reconoce el hecho de que, en la práctica, nunca llegaremos al límite cuántico. Es decir, si diseñamos un experimento para determinar la posición de un electrón tan exactamente como sea posible (haciendo que Δx sea lo menor posible), encontramos que no somos capaces de medir su momento lineal muy bien (Δp_x será grande). Si tratamos en el experimento de mejorar la precisión del

momento medido, la precisión de la posición medida se deteriorará. Y no hay nada que podamos hacer sobre ello para mejorar los datos. *El producto de las dos incertidumbres debe permanecer fijo*, y este producto fijo es la constante de Planck. Como el momento lineal y la posición son vectores, una relación como la anterior también existirá para los ejes Y y Z.

El principio de incertidumbre se ve extraño solo si se permanece pegado al concepto falso de “grano de gelatina” y pensamos en el electrón como un pequeño punto. Richard Feynman escribió en 1985: “Quisiera colocar el principio de incertidumbre en su lugar histórico: Cuando las ideas revolucionarias de la Física cuántica salieron a la luz pública, la gente tendía a considerarlas desde sus antiguas ideas, esto es, el grano de gelatina. Pero llegado un cierto punto las ideas antiguas comenzaron a fallar, así que una advertencia se desarrolló y que dice, en efecto, “Sus antiguas ideas no son buenas.....Si ha eliminado todas las antiguas ideas y hace uso de las nuevas no hay necesidad para un principio de incertidumbre”.

Lo que Feynman decía era que: “pensando en términos de ondas de materia. Tire la noción del electrón como un pequeño punto. Cuando piense en electrones, hágalo estadísticamente, y siendo guiado por la densidad de probabilidad de la onda de materia”.

Otra formulación del principio de Heisenberg: Otra forma de formular este principio es en términos de energía y tiempo, que son magnitudes escalares $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$

Nos dice que si trata de medir la energía de una partícula, midiéndola en un intervalo de tiempo Δt , su medida de la energía tendrá una incertidumbre dada por una cantidad ΔE dada por $\frac{\hbar}{\Delta t}$. Para mejorar la precisión de la medida de la energía nos llevará más tiempo.

Otra forma de entender la ecuación anterior es: podemos violar la ley de conservación de la energía por “pedir prestada” una cantidad de energía ΔE siempre que “devuelva” la energía prestada dentro de un intervalo de tiempo Δt dado por $\frac{\hbar}{\Delta E}$.

Si aplicamos esta idea al efecto túnel sería: de acuerdo con las reglas clásicas el electrón sólo saltará la barrera si tiene una energía adicional $U-E$. El principio de incertidumbre nos explica que el electrón puede “pedir prestada” esta cantidad de energía si él “la devuelve” en el tiempo que al electrón le llevaría viajar una distancia igual a la anchura de la barrera. Así el electrón se encontraría sobre la otra parte de la barrera, los balances de energía están de nuevo en equilibrio, y nadie se dará cuenta!.

Problemas de «Introducción a la Física moderna»

- 1) Determina la energía de un fotón para: a) ondas de radio de 1.500 kHz; b) luz verde de longitud de onda 500 nm; c) Rayos-X de 0,06 nm. Considera el medio de propagación el vacío. [a) $9,9 \cdot 10^{-28}$ J; b) $3,6 \cdot 10^{-19}$ J; c) $3,3 \cdot 10^{-15}$ J]
- 2) Una estación de radio emite con una longitud de onda de 25 m. Calcula: a) la frecuencia de las ondas electromagnéticas emitidas; b) la energía de los fotones; c) el número de fotones emitidos por segundo si la potencia de la emisora es de 6 kW. [a) $11,99 \cdot 10^6$ Hz; b) $7,95 \cdot 10^{-27}$ J; c) $7,55 \cdot 10^{29}$]
- 3) Un haz de luz de 400 nm incide sobre una placa de Ce, cuyo trabajo de extracción es de 1,8 eV. Calcular: a) energía máxima de los fotoelectrones; b) número de fotones emitidos por segundo y unidad de superficie para un haz de $0,001$ W/m². [a) $2,08 \cdot 10^{-19}$ J; b) $4,8 \cdot 10^{15}$ fotones]
- 4) Una radiación de $1,5 \cdot 10^{-6}$ m incide sobre una superficie metálica y produce la emisión de fotoelectrones con una velocidad de $0,1 \cdot 10^6$ m/s. Calcular: a) trabajo de extracción del metal; b) frecuencia umbral de foto emisión. [a) $1,28 \cdot 10^{-19}$ J; b) $1,9 \cdot 10^{14}$ Hz ó $1,55 \cdot 10^{-6}$ m]
- 5) Calcula la longitud de onda asociada a: a) el electrón acelerado por una diferencia de potencial de 100 V; b) el electrón de energía cinética de 1 eV; c) la bala de 10 g que se mueve a 500 m/s; d) el automóvil de 1000 kg con velocidad de 100 m/s. [a) $1,23 \cdot 10^{-10}$ m; b) $1,23 \cdot 10^{-9}$ m; c) $6,6 \cdot 10^{-39}$ m]
- 6) Calcula la incertidumbre en la posición en los siguientes casos: a) electrón cuya velocidad, de 7.000 km/s, se ha medido con una incertidumbre del 0,003%; b) partícula de 50 g que se desplaza a una velocidad de 300 m/s, medida con la misma incertidumbre que en el caso anterior. [a) $5,51 \cdot 10^{-7}$ m; b) $2,34 \cdot 10^{-31}$ m]
- 7) Una superficie de Ni, cuyo trabajo de extracción es 5,0 eV, se irradia con luz ultravioleta de longitud de onda 200 nm. Calcule: a) la diferencia de potencial que debe aplicarse entre el Ni y un cátodo para detener totalmente los electrones emitidos; b) la energía con que estos alcanzan el ánodo si la diferencia de potencial aplicada se reduce a 1/4 del valor anterior. [a) 3,10 V; b) $6,9 \cdot 10^{-20}$ J]
- 8) Al iluminar una superficie metálica con una longitud de onda 200 nm, el potencial de frenado de los fotoelectrones es de 2 V, mientras que si la longitud de onda es 240 nm, el potencial de frenado se reduce a 1 V. Obtenga: a) el trabajo de extracción del metal; b) el valor que resulta para la constante de Planck, h, a partir de esta experiencia. Datos: $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C; $c = 3 \cdot 10^8$ m·s⁻¹. [a) $W_{\text{extracción}} = 4$ eV; b) $h = 6,64 \cdot 10^{-34}$ J·s]
- 9) Calcula la función trabajo del sodio a partir de los datos siguientes: $f_0 = 4,3 \cdot 10^{14}$ Hz; $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J·s. [$2,9 \cdot 10^{-19}$ J = 1,8 eV]
- 10) En un experimento fotoeléctrico en el que se utiliza una superficie de sodio, al iluminar la superficie metálica con una longitud de onda $\lambda_1 = 300$ nm y el potencial de frenado de los fotoelectrones es de 1,85 V, mientras que si la longitud de onda es 400 nm, el potencial de frenado es de 0,820 V. A partir de estos datos calcula: a) el valor que resulta para la constante de Planck h; b) el trabajo de extracción del metal sodio; c) la longitud de onda para el sodio. [a) $6,59 \cdot 10^{-34}$ J·s; b) 2,27 eV; c) 544 nm]
- 11) El potencial de frenado para los fotoelectrones emitidos desde una superficie iluminada por luz de longitud de onda 491 nm es de 0,710 V. Cuando la luz incidente se cambia a un nuevo valor el potencial de frenado es de 1,43 V. a) ¿Cuál es la nueva longitud de onda?. b) ¿Cuál es la función trabajo de esa superficie?. [a) 382 nm; b) 1,82 eV]

- 12) Un satélite en órbita alrededor de la Tierra se puede cargar, en parte, debido a la pérdida de electrones causada por el efecto fotoeléctrico inducido por la luz del Sol sobre la superficie externa. Supongamos que el satélite está recubierto con platino, que es un metal que tiene un trabajo de extracción muy alto: 5,32 eV. Determina la mayor longitud de onda de los fotones que pueden arrancar fotoelectrones del platino. [233 nm]
- 13) La función trabajo del wolframio es de 4,50 eV. Calcula la velocidad de los fotoelectrones más rápidos emitidos cuando fotones de energía 5,80 eV inciden sobre una lámina de wolframio. [676 km/s]
- 14) Un electrón de energía cinética 12 eV se puede demostrar que tiene una velocidad de $2,06 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Si consideramos que podemos medir su velocidad con una precisión del 1,50%. Determina la incertidumbre con la que simultáneamente podemos medir la posición del electrón. Dato: $\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ [3,77 nm que es unas 71 veces en $r_B = 52,9 \text{ pm}$]
- 15) La longitud de onda umbral de una célula fotoeléctrica de sodio es $5,83 \cdot 10^{-7} \text{ m}$. Calcule: a) la diferencia de potencial con la que debe acelerarse un electrón para que su energía cinética sea igual al trabajo de extracción del sodio; b) la longitud de onda asociada a dicho electrón, tras ser acelerado. Datos: $q_e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$; $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$. [a) 2,13 V; b) 0,841 nm]
- 16) Al iluminar una superficie de wolframio con luz monocromática ultravioleta de longitud de onda $1,88 \cdot 10^{-7} \text{ m}$, se obtienen fotoelectrones con energía cinética máxima E_m . Si se ilumina la misma superficie con luz de longitud de onda $1,77 \cdot 10^{-7} \text{ m}$, la energía cinética máxima de los fotoelectrones es el triple de la anterior. Si conoces c y h calcula: a) la energía cinética máxima de los fotoelectrones en las dos situaciones anteriores; b) el trabajo de extracción del wolframio. [a) $3,21 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 2 \text{ eV}$ y 6 eV ; b) $7,37 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 4,6 \text{ eV}$]
- 17) Al absorber un fotón se produce en un átomo de transición electrónica entre dos niveles separados por una energía $12 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. a) Explique, energéticamente, el proceso de absorción del fotón por el átomo, ¿volverá espontáneamente el átomo a su estado inicial?. b) Si el mismo fotón incidiera en la superficie de un metal cuyo trabajo de extracción es de 3 eV, ¿se producirá emisión fotoeléctrica?. Datos: h y m_e .
- 18) Un electrón se acelera desde el reposo mediante una diferencia de potencial de 1000 V. Calcule: a) la energía cinética, la cantidad de movimiento y la longitud de onda de De Broglie del electrón acelerado; b) la frecuencia mínima de la radiación que debería incidir sobre un metal con trabajo de extracción de 3 eV, para obtener fotoelectrones de la misma energía cinética que los del apartado a).
- 19) Razone si la longitud de onda de De Broglie de los protones es mayor o menor que la de los electrones en los siguientes casos: a) ambos tienen la misma velocidad; b) ambos tienen la misma energía cinética.
- 20) a) Explique la conservación de la energía en el proceso de emisión de electrones por una superficie metálica al ser iluminada con luz adecuada. b) Razone qué cambios cabría esperar en la emisión fotoeléctrica de una superficie metálica: i) al aumentar la intensidad de la luz incidente; ii) al aumentar el tiempo de iluminación; iii) al disminuir la frecuencia de la luz.
- 21) Un haz de luz de longitud de onda 546 nm incide en una célula fotoeléctrica de cátodo de cesio, cuyo trabajo de extracción es de 2 eV: a) Explique las transformaciones energéticas en el proceso de fotoemisión y calcule la energía cinética máxima de los electrones emitidos. b) ¿Qué ocurriría si la longitud de onda de la radiación incidente en la célula fotoeléctrica fuera doble de la anterior?. Datos: $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$; $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

22) Al iluminar la superficie de un cierto metal con un haz de luz ultravioleta de frecuencia $f = 2 \cdot 10^{15}$ Hz, la energía cinética máxima de los fotoelectrones emitidos es de 2,5 eV. a) Determine el trabajo de extracción del metal. b) Explique qué ocurriría si la frecuencia de la luz incidente fuera: i) $2f$; ii) $f/2$. Datos: $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J s; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

23) Al incidir luz de longitud de onda $\lambda = 620$ nm sobre una fotocélula se emiten electrones con una energía cinética máxima de 0,14 eV. a) Calcule el trabajo de extracción y la frecuencia umbral de la fotocélula. b) ¿Qué diferencia cabría esperar en los resultados del apartado a) si la longitud de onda incidente fuera doble?. Datos: $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J s; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

24) a) De entre las siguientes opciones, elija la que crea correcta y explique por qué. La energía cinética máxima de los fotoelectrones emitidos por un metal depende de: i) la intensidad de la luz incidente; ii) la frecuencia de la luz incidente; iii) la velocidad de la luz. b) Razone si es cierta o falsa la siguiente afirmación: “En un experimento sobre el efecto fotoeléctrico los fotones con frecuencia menor que la frecuencia umbral no pueden arrancar electrones del metal”.

25) Comente las siguientes afirmaciones relativas al efecto fotoeléctrico: a) El trabajo de extracción de un metal depende de la frecuencia de la luz incidente. b) La energía cinética máxima de los electrones emitidos varía linealmente con la frecuencia de la luz incidente.

26) Un haz de luz de longitud de onda 477 nm incide sobre una célula fotoeléctrica de cátodo de potasio, cuya frecuencia umbral es $5,5 \cdot 10^{14}$ s⁻¹. a) Explique las transformaciones energéticas en el proceso de fotoemisión y calcule la energía cinética máxima de los electrones emitidos. b) Razone si se produciría efecto fotoeléctrico al incidir radiación infrarroja sobre la célula anterior. (La región infrarroja comprende longitudes de onda entre 10^{-3} m y $7,8 \cdot 10^{-5}$ m). Datos: $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J s; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

27) Razone si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones: a) La energía de los electrones emitidos por efecto fotoeléctrico no depende de la intensidad de la luz para una frecuencia dada. b) El efecto fotoeléctrico no tiene lugar en un cierto material al incidir sobre él luz azul, y sí al incidir luz naranja.

28) Una lámina metálica comienza a emitir electrones al incidir sobre ella radiación de longitud de onda $5 \cdot 10^{-7}$ m. a) Calcule con qué velocidad saldrán emitidos los electrones si la radiación que incide sobre la lámina tiene una longitud de onda de $4 \cdot 10^{-7}$ m. b) Razone, indicando las leyes en que se basa, qué sucedería si la frecuencia de la radiación incidente fuera de $4,5 \cdot 10^{14}$ s⁻¹. Datos: $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J s; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s; $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg.

29) Al estudiar experimentalmente el efecto fotoeléctrico en un metal se observa que la mínima frecuencia a la que se produce dicho efecto es de $1,03 \cdot 10^{15}$ Hz. a) Calcule el trabajo de extracción del metal y el potencial de frenado de los electrones emitidos si incide en la superficie del metal una radiación de frecuencia $1,8 \cdot 10^{15}$ Hz. b) ¿Se produciría efecto fotoeléctrico si la intensidad de la radiación incidente fuera el doble y su frecuencia la mitad que en el apartado anterior?. Razone la respuesta. Datos: $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J s; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

30) Se trata de medir el trabajo de extracción de un nuevo material. Para ello se provoca el efecto fotoeléctrico haciendo incidir una radiación monocromática sobre una muestra A de ese material y, al mismo tiempo, sobre otra muestra B de otro material cuyo trabajo de extracción es de 5 eV. Los potenciales de frenado son $V_A = 8$ V y $V_B = 12$ V, respectivamente. Calcule: a) La frecuencia de la radiación utilizada. b) El trabajo de extracción de A. Datos: $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J s; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

31) Un haz de luz de longitud de onda $546 \cdot 10^{-9}$ m penetra en una célula fotoeléctrica de cátodo de cesio, cuyo trabajo de extracción es de 2 eV: a) Explique las transformaciones energéticas en el

proceso de fotoemisión. b) Calcule la energía cinética máxima de los electrones emitidos. ¿Qué ocurriría si la longitud de onda incidente en la célula fotoeléctrica fuera el doble de la anterior?. Datos: $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J s; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

32) Si iluminamos la superficie de un cierto metal con un haz de luz ultravioleta de frecuencia $2,1 \cdot 10^{15}$ Hz, los fotoelectrones emitidos tienen una energía cinética máxima de 2,5 eV. a) Explique por qué la existencia de una frecuencia umbral para el efecto fotoeléctrico va en contra de la teoría ondulatoria de la luz. b) Calcule la función trabajo del metal y su frecuencia umbral. Datos: $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J s; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

33) Al incidir luz de longitud de onda 620 nm sobre la superficie de una fotocélula, se emiten electrones con una energía cinética máxima de 0,14 eV. Determine: a) El trabajo de extracción del metal y la frecuencia umbral. b) Si la fotocélula se iluminara con luz de longitud de onda doble que la anterior, ¿cuál sería la energía cinética máxima de los electrones emitidos?. Datos: $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J s; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

34) Analice las siguientes proposiciones razonando si son verdaderas o falsas: a) El trabajo de extracción de un metal depende de la frecuencia de la luz incidente. b) La energía cinética máxima de los electrones emitidos en el efecto fotoeléctrico varía linealmente con la frecuencia de la luz incidente.

35) El trabajo de extracción del aluminio es 4,2 eV. Sobre una superficie de aluminio incide radiación electromagnética de longitud de onda 200 nm. Calcule razonadamente: a) La energía cinética de los fotoelectrones emitidos y el potencial de frenado. b) La longitud de onda umbral para el aluminio. Datos: $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J s; $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ J; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

36) Al incidir luz de longitud de onda 620 nm en la superficie de una fotocélula, la energía cinética máxima de los fotoelectrones emitidos es 0,14 eV. a) Determine la función trabajo del metal y el potencial de frenado que anula la fotoemisión. b) Explique, con ayuda de una gráfica, cómo varía la energía cinética máxima de los fotoelectrones emitidos al variar la frecuencia de la luz incidente. Datos: $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J s; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

37) Al iluminar la superficie de un metal con luz de longitud de onda 280 nm, la emisión de fotoelectrones cesa para un potencial de frenado de 1,3 V. a) Determine la función trabajo del metal y la frecuencia umbral de emisión fotoeléctrica. b) Cuando la superficie del metal se ha oxidado, el potencial de frenado para la misma luz incidente es de 0,7 V. Razone cómo cambian, debido a la oxidación del metal: i) la energía cinética máxima de los fotoelectrones; ii) la frecuencia umbral de emisión; iii) la función trabajo. Datos: $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J s; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

38) a) Explique el proceso de emisión fotoeléctrica por una superficie metálica y las condiciones necesarias para que se produzca. b) Razone por qué la teoría clásica no puede explicar el efecto fotoeléctrico.

39) Cuando se ilumina un metal con un haz de luz monocromática se observa emisión fotoeléctrica. a) Explique, en términos energéticos, dicho proceso. b) Si se varía la intensidad del haz de luz que incide en el metal, manteniéndose constante su longitud de onda, ¿variará la velocidad máxima de los electrones emitidos? ¿Y el número de electrones emitidos en un segundo? Razone las respuestas.

40) Un haz de electrones se acelera con una diferencia de potencial de 30 kV. a) Determine la longitud de onda asociada a los electrones. b) Se utiliza la misma diferencia de potencial para acelerar electrones y protones. Razone si la longitud de onda asociada a los electrones es mayor, menor o igual a la de los protones. ¿Y si los electrones y los protones tuvieran la misma velocidad?. Datos: $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J s; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s; $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg.

- 41) Sobre una superficie de sodio metálico inciden simultáneamente dos radiaciones monocromáticas de longitudes de onda $\lambda_1 = 500 \text{ nm}$ y $\lambda_2 = 560 \text{ nm}$. El trabajo de extracción del sodio es $2,3 \text{ eV}$. a) Determine la frecuencia umbral de efecto fotoeléctrico y razone si habría emisión fotoeléctrica para las dos radiaciones indicadas. b) Explique las transformaciones energéticas en el proceso de fotoemisión y calcule la velocidad máxima de los electrones emitidos. Datos: $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$; $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$; $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.
- 42) Razone si la longitud de onda de De Broglie de los protones es mayor o menor que la de los electrones en los siguientes casos: a) ambos tienen la misma velocidad; b) ambos tienen la misma energía cinética.
- 43) Un fotón incide sobre un metal cuyo trabajo de extracción es 2 eV . La energía cinética máxima de los electrones emitidos por ese metal es $0,47 \text{ eV}$. a) Explique las transformaciones energéticas que tienen lugar en el proceso de fotoemisión y calcule la energía del fotón incidente y la frecuencia umbral de efecto fotoeléctrico del metal. b) Razone cuál sería la velocidad de los electrones emitidos si la energía del fotón incidente fuera 2 eV . Datos: $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$; $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.
- 44) Razone si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas: a) “Los electrones emitidos en el efecto fotoeléctrico se mueven con velocidades mayores a medida que aumenta la intensidad de la luz que incide sobre la superficie del metal”. b) “Cuando se ilumina la superficie de un metal con una radiación luminosa sólo se emiten electrones si la intensidad de luz es suficientemente grande”.
- 45) Al incidir un haz de luz de longitud de onda 625 nm sobre una superficie metálica, se emiten electrones con velocidades de hasta $4,6 \cdot 10^5 \text{ m/s}$. a) Calcule la frecuencia umbral del metal. b) Razone cómo cambiaría la velocidad máxima de salida de los electrones si aumentase la frecuencia de la luz ¿Y si disminuyera la intensidad del haz de luz?. Datos: $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$; $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$; $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.
- 46) a) Un haz de electrones se acelera bajo la acción de un campo eléctrico hasta una velocidad de $6 \cdot 10^5 \text{ m/s}$. Haciendo uso de la hipótesis de De Broglie calcule la longitud de onda asociada a los electrones. b) La masa del protón es aproximadamente 1800 veces la del electrón. Calcule la relación entre las longitudes de onda de De Broglie de protones y electrones suponiendo que se mueven con la misma energía cinética. Datos: $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$; $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.
- 47) Al iluminar potasio con luz amarilla de sodio de $\lambda = 589 \text{ nm}$ se liberan electrones con una energía cinética máxima de $0,577 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ y al iluminarlo con luz ultravioleta de una lámpara de mercurio de $\lambda = 2537 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, la energía cinética máxima de los electrones emitidos es $5,036 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. a) Explique el fenómeno descrito en términos energéticos y determine el valor de la constante de Planck. b) Calcule el valor del trabajo de extracción del potasio. Datos: $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.
- 48) Una lámina metálica comienza a emitir electrones al incidir sobre ella luz de longitud de onda menor que 500 nm . a) Analice los cambios energéticos que tienen lugar en el proceso de emisión y calcule con qué velocidad máxima saldrán emitidos los electrones si la luz que incide sobre la lámina tiene una longitud de onda de 200 nm . b) Razone qué sucedería si la frecuencia de la radiación incidente fuera de $5 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$. Datos: $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$; $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$; $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.
- 49) Iluminamos con luz de longitud de onda $\lambda = 300 \text{ nm}$ la superficie de un metal alcalino cuyo trabajo de extracción es de 2 eV . a) Explique qué ocurre y calcule la energía cinética máxima de los electrones emitidos. b) Calcule la longitud de onda de De Broglie asociada a dichos electrones. Datos: $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$; $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$; $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.