Problemas resueltos de «Vibraciones»

1) Una partícula sobre un muelle oscila con un período de 0,80 s y una amplitud de 0,10 m. Al tiempo t = 0, está a 5 cm de la posición de equilibrio y moviéndose hacia –A. Determina: a) la ecuación del movimiento oscilatorio; b) la posición y la dirección del movimiento en el instante de tiempo t = 2,0 s; c) la gráfica x-t y v-t. [a) $x = 0{,}10\cdot\cos(2{,}5\pi t + \tfrac{2}{3}\pi)$; b) x = +0,05 m; v = +0,68 m/s]

Solución:

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0) \quad \Rightarrow \quad v = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi_0)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\ \mathrm{rad}}{0{,}80\,\mathrm{s}} = 2{,}5\pi\,\tfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

$$x_{0(t=0)} = A\cos\phi_0 \quad \Rightarrow \phi_0 = \arccos\frac{x_0}{A} = \arccos\frac{-0{,}05\,\mathrm{m}}{0{,}10\,\mathrm{m}} = 120^\circ = 120^\circ\times\frac{\pi\ \mathrm{rad}}{180^\circ} = \frac{2}{3}\pi$$

$$v_{0(t=0)} = -A\omega\,\mathrm{sen}\,\phi_0 = -0{,}10\,\mathrm{m}\times 2{,}5\pi\,\tfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{2}{3}\pi\right) = -0{,}68\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0) = 0{,}10\cdot\cos\left(2{,}5\pi t + \tfrac{2}{3}\pi\right)$$

$$x_{t=2} = 0{,}10\cdot\cos\left(2{,}5\pi\,\tfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\times 2{,}0\,\mathrm{s} + \tfrac{2}{3}\pi\right) = 0{,}05\,\mathrm{m}$$

$$v_{t=2} = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi_0) = -0{,}10\,\mathrm{m}\times 2{,}5\pi\,\tfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\,\mathrm{sen}\left(2{,}5\pi\,\tfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\times 2{,}0\,\mathrm{s} + \tfrac{2}{3}\pi\right) = +0{,}68\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Representar la gráfica x/t siendo x = 0,10·cos (2,5π·t + 2π/3)

$x_{(t=0)}$ = -0,05 m

x = - A = -0,10 = 0,10·cos ϕ ⇒ cos ϕ = -1 ⇒ ϕ = (2n+1)π = 2,5π·t + 2π/3 ⇒ t = [(2n+1) – 2/3]/2,5

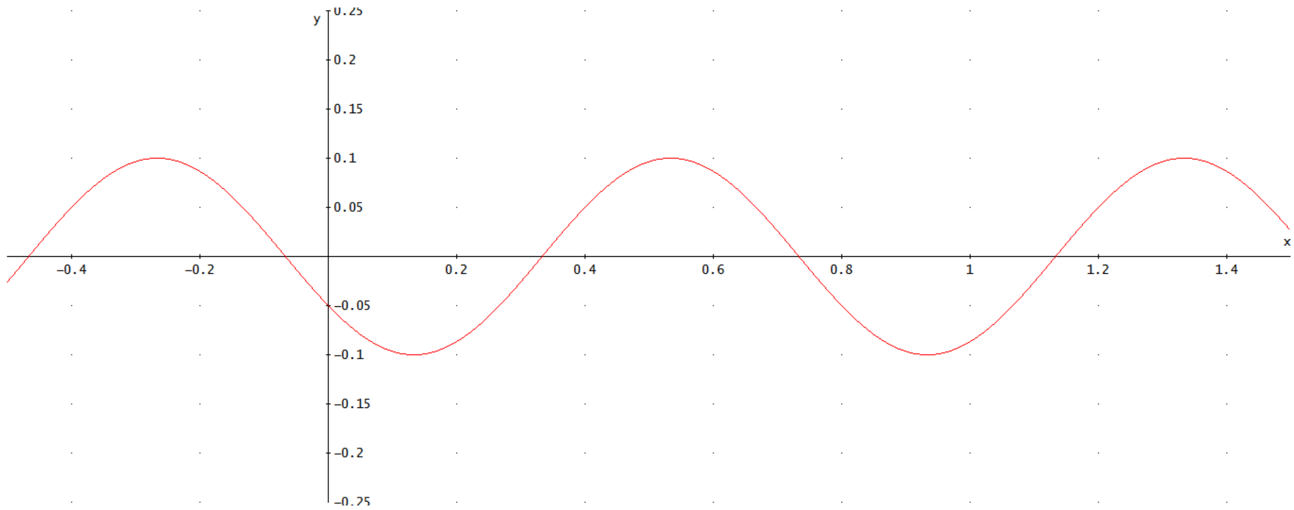
t_0 = 0,1333 s; t_1 = 0,9333 s; t_2 = …

x = 0 = 0,10·cos ϕ ⇒ cos ϕ = 0 ⇒ ϕ = (2n+1)π/2 = 2,5π·t + 2π/3 ⇒ t = [(2n+1)/2 – 2/3]/2,5

t_0 = -0,0666 s; t_1 = 0,333 s; t_2 = 0,7333 s …

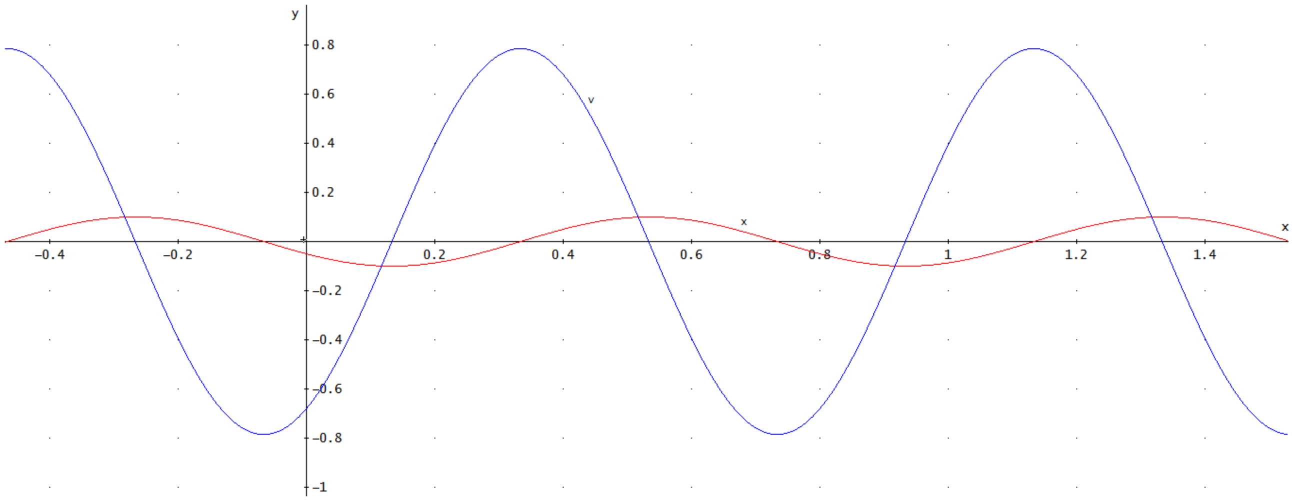
x = + A = 0,10 = 0,10·cos ϕ ⇒ cos ϕ = +1 ⇒ ϕ = 2nπ = 2,5π·t + 2π/3 ⇒ t = [2n – 2/3]/2,5

t_0 = -0,26666 s; t_1 = 0,5333 s; t_2 = 1,333 s …



Representar la gráfica v/t siendo v = -0,10·2,5π· sen (2,5π·t + 2π/3) = -0,7085· sen (2,5π·t + 2π/3)

$v_{(t=0)}$ = -0,25π·sen (2π/3) = -0,68 m/s



2) Una partícula, de masa 0,500 kg, oscila sobre un muelle y se observa que se encuentra en el punto x = 0,15 m en el tiempo inicial t = 0. Alcanza el desplazamiento máximo de 0,25 m en el tiempo t = 0,300 s. Determina: a) la ecuación del movimiento y dibuja la gráfica posición-tiempo; b) el instante, durante el primer ciclo, en que la masa pasa por el punto x = 0,20 m. [a) x = 0,25·cos (πt – 0,3π); b) 0,1·s; 0,5·s]

Solución:

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0) \quad \Rightarrow \quad v = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0)$$

$$x_{0(t=0)} = +0{,}15\,\text{m} = A\cos\phi_0 \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = \arccos\frac{x_0}{A} = \arccos\frac{0{,}15\,\text{m}}{0{,}25\,\text{m}} = \pm 53{,}13^{\circ}\times\frac{\pi\,\text{rad}}{180^{\circ}} = \pm 0{,}3\pi\,\text{rad}$$

$$\left.\begin{cases} v_{0(t=0)} = -A\omega\operatorname{sen}\phi_0 = -A\omega\operatorname{sen}(-0{,}3\pi) > 0 \\ v_{0(t=0)} = -A\omega\operatorname{sen}\phi_0 = -A\omega\operatorname{sen}(0{,}3\pi) < 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \phi_0 = -0{,}3\pi\,\text{rad} = 1{,}7\pi\,\text{rad}$$

$$\left.\begin{cases} x_{(t=0,3)} = +A = 0{,}25\,\text{m} \\ \cos(\omega t + \phi_0) = +1 \end{cases}\right\} \quad \omega t + \phi_0 = 2n\pi \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi - \phi_0}{t} = \frac{2\pi - 1{,}7\pi}{0{,}3\,\text{s}} = \pi\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\,\text{rad}}{\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 2\,\text{s}$$

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0) = 0{,}25\cos(\pi t - 0{,}3\pi) = 0{,}25\cos(\pi t + 1{,}7\pi)$$

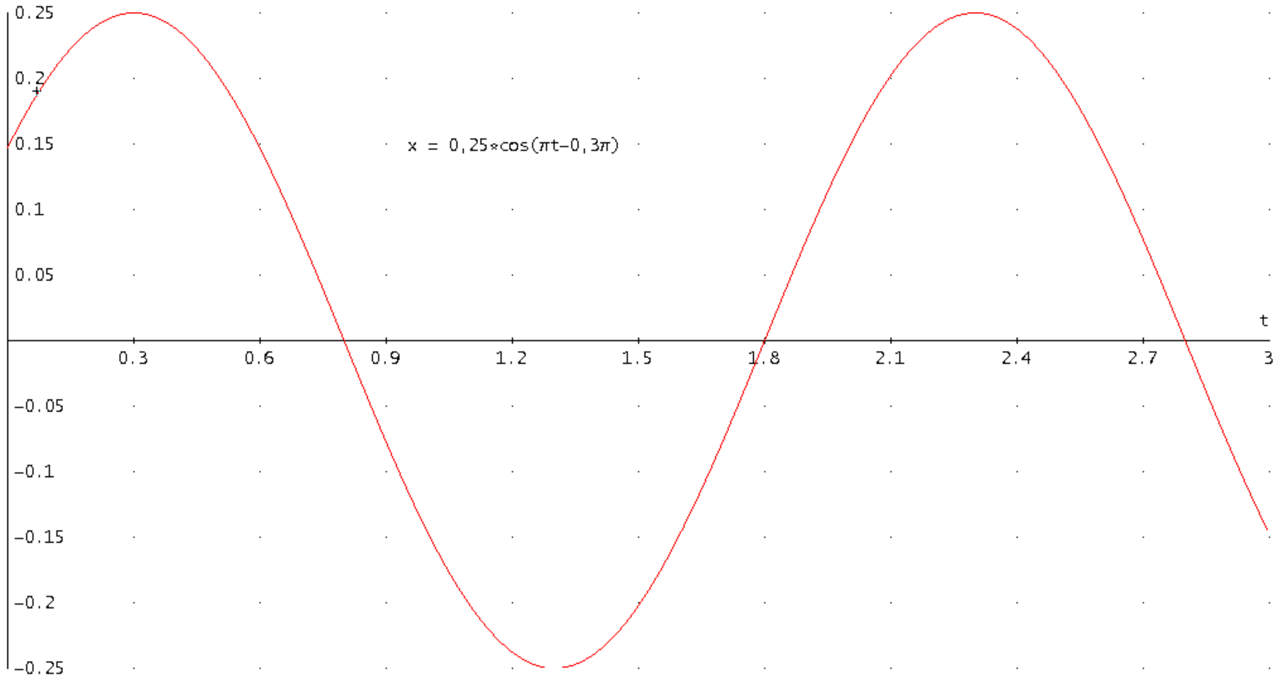
Los valores máximos y mínimos del movimiento oscilatorio se alcanzan al cabo de los siguientes tiempos:

$$x = 0{,}25\cos(\pi t - 0{,}3\pi) = 0{,}25\cos(\pi t + 1{,}7\pi)$$

$$x_{\text{máximo}} = +0{,}25 \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{cases} \cos(\pi t - 0{,}3\pi) = +1 \\ (\pi t - 0{,}3\pi) = 2n\pi \end{cases}\right\} \{t = 2n + 0{,}3\} \begin{cases} t_0 = 0{,}3\,\text{s} \\ t_1 = 2{,}3\,\text{s} \end{cases}$$

$$x_{\text{mínimo}} = -0{,}25 \quad \Rightarrow \left.\begin{cases} \cos(\pi t - 0{,}3\pi) = -1 \\ (\pi t - 0{,}3\pi) = (2n+1)\pi \end{cases}\right\} \{t = (2n+1) + 0{,}3\} \begin{cases} t_0 = 1{,}3\,\text{s} \\ t_1 = 3{,}3\,\text{s} \end{cases}$$

$$x_0 = 0 \quad \Rightarrow \left.\begin{cases} \cos(\pi t - 0{,}3\pi) = 0 \\ (\pi t - 0{,}3\pi) = (2n+1)\dfrac{\pi}{2} \end{cases}\right\} \left\{ t = \frac{(2n+1)}{2} + 0{,}3 \right\} \begin{cases} t_0 = 0{,}8\,\text{s} \\ t_1 = 1{,}8\,\text{s} \end{cases}$$



Por el punto x = 0,20 m pasa dos veces, antes de alcanzar el valor de la amplitud, antes de los 0,30 s, y un poco más tarde, en el punto simétrico respecto de la amplitud (x = 0,25 m; t = 0,30 s)

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0) = 0{,}25\cos(\pi t - 0{,}3\pi) = 0{,}25\cos(\pi t + 1{,}7\pi)$$

$$0{,}20 = 0{,}25\cos\phi \quad \{\phi = \omega t + \phi_0\}$$

$$\phi = \arccos\frac{0{,}20}{0{,}25} = \arccos 0{,}80 = \pm 36{,}86^\circ = \pm 0{,}2\pi \text{ rad} \quad \begin{cases} \phi = -0{,}2\pi \text{ rad} \\ \phi = +1{,}8\pi \text{ rad} \end{cases}$$

$$\phi_{1(x\to+A)} = +1{,}8\pi \text{ rad} = \pi t + 1{,}7\pi \quad \left\{ t = \frac{1{,}8\pi - 1{,}7\pi}{\pi} = 0{,}1\,\text{s} \right.$$

$$\phi_{2(x\to-A)} = +0{,}2\pi \text{ rad} = \pi t - 0{,}3\pi \quad \left\{ t = \frac{0{,}2\pi + 0{,}3\pi}{\pi} = 0{,}5\,\text{s} \right.$$

3) Una partícula de 0,5 kg que describe un movimiento armónico simple de frecuencia $\nu = 5/\pi$ Hz, tiene inicialmente una energía cinética de 0,2 J y una energía potencial de 0,8 J. Calcule: a) la posición y velocidad inicial, así como la amplitud de la oscilación y la velocidad máxima. b) Haga un análisis de las transformaciones de energía que tienen lugar en un ciclo completo. c) ¿Cuál sería el desplazamiento en el instante en que las energías cinética y potencial son iguales?. [a) $x_0 = \pm 0{,}17888$ m; $v_0 = \pm 0{,}8944$ m/s; A = 0,20 m; $v_{máxima} = 2{,}0$ m/s; c) x = 0,1414 m]

Solución:

$$E_{p(0)} = 0,8\,J = \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2$$

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi\cdot\tfrac{5}{\pi}\tfrac{rad}{s} = 10\,\tfrac{rad}{s}$$

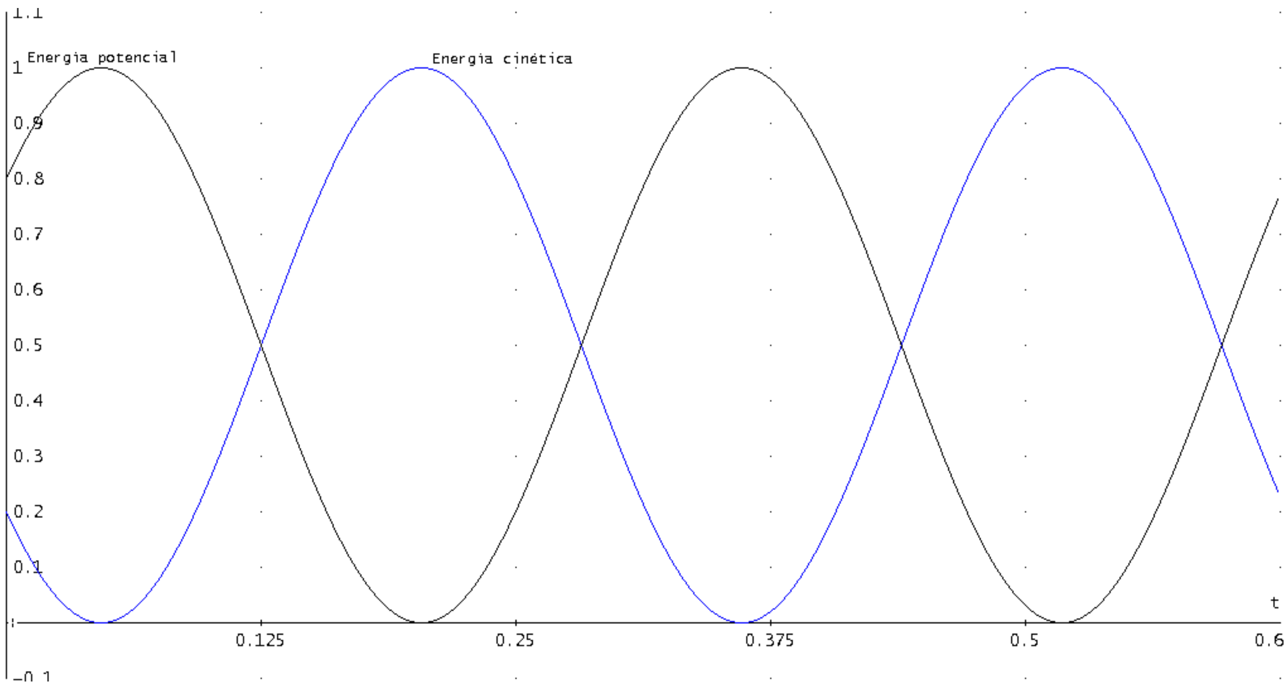
$$x_0 = \sqrt{\frac{2E_{p(0)}}{m\omega^2}} = \sqrt{\frac{2\times 0,8\,J}{0,5\,kg\times\left(10\,\tfrac{rad}{s}\right)^2}} = \pm 0,17888\,m$$

$$E_{c(0)} = 0,2\,J = \tfrac{1}{2}mv_0^2 \quad\Rightarrow\quad v_0 = \sqrt{\frac{2E_{c(0)}}{m}} = \pm 0,8944\,\tfrac{m}{s}$$

$$E_{total} = E_c + E_p = 0,2\,J + 0,8\,J = 1,0\,J = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \quad\Rightarrow\quad A = \sqrt{\frac{2E_t}{m\omega^2}} = \pm 0,20\,m$$

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \phi_0) \\ v = -\omega A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi_0) \end{cases} \quad v_{máx} = -\omega A = -10\,\tfrac{rad}{s}\times 0,20\,m = -2,0\,\tfrac{m}{s}$$

$$E_c = E_{p(m)} = 0,5\,J = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad\Rightarrow\quad x = \sqrt{\frac{2E_p}{m\omega^2}} = \pm 0,1414\,m$$



4) Un cuerpo realiza un movimiento vibratorio armónico simple. a) Escriba la ecuación del movimiento si la aceleración máxima es $5\cdot\pi^2$ cm/s^2, el período de las oscilaciones 2 s y la elongación del cuerpo al iniciarse el movimiento 2,5 cm y siendo la velocidad negativa. b) Represente gráficamente la elongación y la velocidad en función del tiempo y comente la gráfica. [a) x = 5·cos (π·t + π/3) cm; b) v = -5·π·sen (π·t + π/3) cm/s]

Solución:

$$x = A\cos(\omega t+\phi_0) \Rightarrow v = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t+\phi_0) \Rightarrow a = -A\omega^2\cos(\omega t+\phi_0) = -\omega^2 x$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\,s} = \pi\,\tfrac{rad}{s}$$

$$a_{máx} = 5\pi^2\,\tfrac{cm}{s^2} = -\omega^2 A \Rightarrow A = \frac{a_{máx}}{\omega^2} = \frac{5\pi^2\,\tfrac{cm}{s^2}}{\left(\pi\,\tfrac{rad}{s}\right)^2} = 5\,cm$$

$$x_{0(t=0)} = 2,5\,cm = A\cos\phi_0 \Rightarrow \phi_0 = \arccos\frac{x_{0(t=0)}}{A} = \arccos\frac{2,5\,cm}{5\,cm} = \pm 60º = 60º\times\frac{\pi\,rad}{180º} = \pm\tfrac{1}{3}\pi$$

$$v_{0(t=0)} = -A\omega\operatorname{sen}(\phi_0) = -A\omega\operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) < 0$$

$$x = 0,05\cdot\cos\left(\pi t+\tfrac{1}{3}\pi\right) \Rightarrow v = -0,05\cdot\pi\cdot\operatorname{sen}\left(\pi t+\tfrac{1}{3}\pi\right)$$

$$x = 0,05\cdot\cos\left(\pi t+\tfrac{1}{3}\pi\right) \quad \left\{\omega = \pi\,\tfrac{rad}{s}\right\} \quad T = 2\,s$$

$$x_{máximo} = +0,05 \Rightarrow \begin{Bmatrix} \cos\left(\pi t+\tfrac{1}{3}\pi\right) = +1 \\ \pi t+\tfrac{1}{3}\pi = 2n\pi \end{Bmatrix} \quad t = 2n-\tfrac{1}{3}\begin{cases} t_1 = \tfrac{5}{3}\,s \\ t_2 = \tfrac{11}{3}\,s = \left(\tfrac{5}{3}+2\right)s \end{cases}$$

$$x_{mínimo} = -0,05 \Rightarrow \begin{Bmatrix} \cos\left(\pi t+\tfrac{1}{3}\pi\right) = -1 \\ \pi t+\tfrac{1}{3}\pi = (2n+1)\pi \end{Bmatrix} \quad t = 2n+1-\tfrac{1}{3}\begin{cases} t_0 = \tfrac{2}{3}\,s \\ t_1 = \tfrac{8}{3}\,s = \left(\tfrac{2}{3}+2\right)s \end{cases}$$

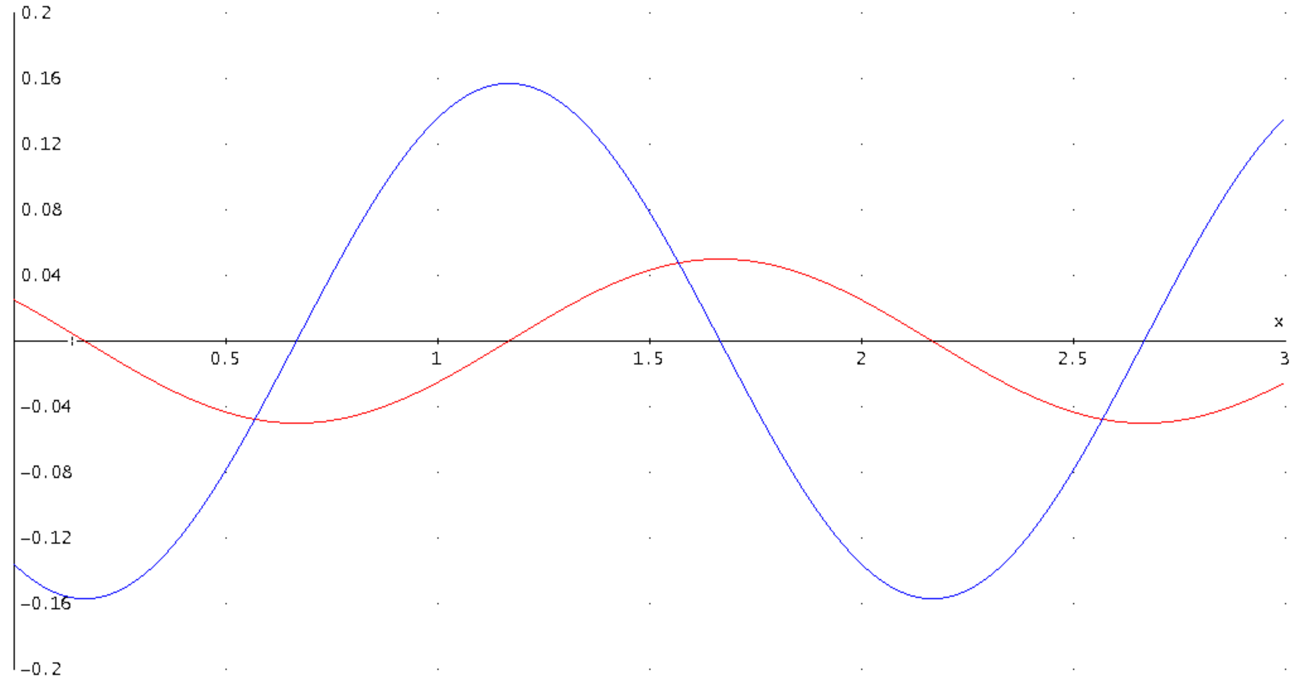
$$x = 0 = x_0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} \cos\left(\pi t+\tfrac{1}{3}\pi\right) = 0 \\ \pi t+\tfrac{1}{3}\pi = (2n+1)\dfrac{\pi}{2} \end{Bmatrix} \quad t = \frac{2n+1}{2}-\tfrac{1}{3}\begin{cases} t_0 = \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{6}\,s \\ t_1 = \tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{3} = \tfrac{7}{6} = \left(\tfrac{1}{6}+1\right)s \end{cases}$$

$$v = -0,05\cdot\pi\cdot\operatorname{sen}\left(\pi t+\tfrac{1}{3}\pi\right) \quad \left\{\omega = \pi\,\tfrac{rad}{s}\right\} \quad T = 2\,s$$

$$v = 0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} \operatorname{sen}\left(\pi t+\tfrac{1}{3}\pi\right) = 0 \\ \pi t+\tfrac{1}{3}\pi = n\pi \end{Bmatrix} \quad t = n-\tfrac{1}{3}\begin{cases} t_1 = \tfrac{2}{3}\,s \\ t_2 = \tfrac{5}{3} = \left(\tfrac{2}{3}+1\right)s \end{cases}$$

$$v_{máx} = +0,05\pi \Rightarrow \begin{Bmatrix} \operatorname{sen}\left(\pi t+\tfrac{1}{3}\pi\right) = -1 \\ \pi t+\tfrac{1}{3}\pi = \left(2n+\dfrac{3}{2}\right)\pi \end{Bmatrix} \quad t = 2n+\frac{3}{2}-\tfrac{1}{3}\begin{cases} t_0 = \tfrac{7}{6}\,s \\ t_1 = \left(2+\tfrac{7}{6}\right)s \end{cases}$$

$$v_{mín} = -0,05\pi \Rightarrow \begin{Bmatrix} \operatorname{sen}\left(\pi t+\tfrac{1}{3}\pi\right) = +1 \\ \pi t+\tfrac{1}{3}\pi = \left(2n+\dfrac{1}{2}\right)\pi \end{Bmatrix} \quad t = 2n+\frac{1}{2}-\tfrac{1}{3}\begin{cases} t_0 = \tfrac{1}{6}\,s \\ t_1 = \left(2+\tfrac{1}{6}\right)s \end{cases}$$



5) Una masa de 200 g cuelga de un muelle colocado verticalmente de k = 10 N/m. La masa se estira hacia abajo hasta un punto donde el muelle está a 30 cm de su longitud sin estirar y sin la masa. En esa posición estirada se suelta. Determina: a) la distancia de la posición de equilibrio; b) la amplitud de las oscilaciones; c) la posición de la masa a los 3 s y respecto a la posición de equilibrio; d) la velocidad de la masa a los 3s. [a) Δl = 19,6 cm; b) A = 10,4 cm; c) y = 7,4 cm por encima de la posición de equilibrio; b) v = 51,6 cm/s]

Solución:

Las oscilaciones verticales son movimiento armónico simple. Aunque el muelle empiece a oscilar a 30 cm de alargamiento no significa que esa es su amplitud de la oscilación. Las oscilaciones tienen lugar alrededor de la posición de equilibrio, por lo que empezaremos determinándola:

$\Delta l = mg/k = 0{,}200\ kg \cdot 9{,}8\ m/s^2 / 10\ N/m = 0{,}196\ m = 19{,}6\ cm$

El muelle se ha estirado 30 cm pero la posición de equilibrio del muelle con la masa colgada está a 19,6 cm, luego la amplitud de las oscilaciones tiene un valor de: A = 30 cm – 19,6 cm = 10,4 cm.

La posición de la masa se determina por la ecuación: $y(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_0)$.

Posición inicial t = 0: $y_0 = -A = A \cdot \cos \phi_0 \Rightarrow \cos \phi_0 = -1 \Rightarrow \phi_0 = \pi$ rad.

$\omega = (k/m)^{½} = (10\ N/m / 0{,}200\ kg)^{½} = 7{,}071$ rad/s.

$y(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_0) = 0{,}104\ m \cdot \cos(7{,}07\ rad/s \cdot 3\ s + \pi\ rad) = 0{,}07407\ m = 7{,}407\ cm$

La masa está a 7,4 cm por encima de la posición de equilibrio o a 12,2 cm por debajo del extremo original del muelle. Su velocidad en ese instante es: $v = -\omega \cdot A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi_0) = 52$ cm/s

$v = -\omega \cdot A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi_0) = -7{,}071\ rad/s \cdot 0{,}104\ m \cdot \text{sen}(7{,}07\ rad/s \cdot 3\ s + \pi\ rad) = 0{,}516\ m/s = 51{,}6\ cm/s$

6) Un objeto de 0,2 kg, unido al extremo de un resorte, efectúa oscilaciones armónicas de 0,1 π s de período y su energía cinética máxima es de 0,5 J. a) Escriba la ecuación de movimiento del objeto y determine la constante elástica del resorte. b) Explique cómo cambiarían las características del movimiento si: i) se sustituye el resorte por otro de constante elástica doble; ii) se sustituye el objeto por otro de masa doble. [a) k = 80 N/m; x = 0,1118·cos (20·t); b)]

Solución:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 20\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \Rightarrow \quad k = m\omega^2 = 80\,\tfrac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\left.\begin{cases} x = A\cos\left(\omega t + \phi_0\right) \\ v = -A\omega\,\text{sen}\left(\omega t + \phi_0\right) \\ a = -A\omega^2\cos\left(\omega t + \phi_0\right) = -\omega^2 x \end{cases}\right\} \begin{cases} E_c = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right) \\ E_{c(\text{máx})} = \tfrac{1}{2}m\omega^2 A^2 \end{cases}$$

$$A^2 = \frac{E_{c(\text{máx})}}{\tfrac{1}{2}m\omega^2} \quad \Rightarrow \quad A = 0{,}1118\,\text{m} = 11{,}18\,\text{cm}$$

$$x = A\cos\left(\omega t + \phi_0\right) = 0{,}1118\cos\left(20t\right)$$

$$\left.\begin{cases} k' = 2k \\ m\omega'^2 = 2m\omega^2 \end{cases}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \omega' = \sqrt{2}\omega \\ T' = \tfrac{1}{\sqrt{2}}T \\ a' = -\omega'^2 x = 2a \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} m' = 2m \\ m'\omega'^2 = m\omega^2 \\ 2m\omega'^2 = m\omega^2 \end{cases}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \omega' = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\omega \\ T' = \sqrt{2}\cdot T \\ a' = -\omega'^2 x = \tfrac{1}{2}a \end{cases}$$

7) a) ¿Qué características debe tener una fuerza para que al actuar sobre un cuerpo le produzca un movimiento armónico simple?. b) Represente gráficamente el movimiento armónico simple de una partícula dado por: y = 5 cos (10 t + π/2) (S I) y otro movimiento armónico que tenga una amplitud doble y una frecuencia mitad que el anterior.

Solución:

$$\left.\begin{cases} y = 5\cdot\cos\left(10t + \tfrac{1}{2}\pi\right) \\ v = -50\cdot\text{sen}\left(10t + \tfrac{1}{2}\pi\right) \end{cases}\right\} \quad \left\{\omega = 10\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{2\pi}{T}\right\} \quad T = \frac{2\pi}{10} = 0{,}628\,\text{s}$$

$$y_{0(t=0)} = 5\cdot\cos\tfrac{1}{2}\pi = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{0(t=0)} = -50\cdot\text{sen}\,\tfrac{1}{2}\pi = -50\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$y_{\left(t=\frac{1}{4}T\right)} = 5\cdot\cos\left(10\tfrac{1}{4}\tfrac{2\pi}{10} + \tfrac{1}{2}\pi\right) = 5\cdot\cos\left(\pi\right) = -5\,\text{m} \quad \Rightarrow \quad v_{\left(t=\frac{1}{4}T\right)} = -50\cdot\text{sen}\,\pi = 0\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$y_{\left(t=\frac{1}{2}T\right)} = 5\cdot\cos\left(10\tfrac{1}{2}\tfrac{2\pi}{10} + \tfrac{1}{2}\pi\right) = 5\cdot\cos\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = 0\,\text{m} \quad \Rightarrow \quad v_{\left(t=\frac{1}{2}T\right)} = -50\cdot\text{sen}\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = +50\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$y_{\left(t=\frac{3}{4}T\right)} = 5\cdot\cos\left(10\tfrac{3}{4}\tfrac{2\pi}{10} + \tfrac{1}{2}\pi\right) = 5\cdot\cos\left(2\pi\right) = +5\,\text{m} \quad \Rightarrow \quad v_{\left(t=\frac{3}{4}T\right)} = -50\cdot\text{sen}\left(2\pi\right) = 0\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$y_{(t=T)} = 5\cdot\cos\left(10\tfrac{2\pi}{10} + \tfrac{1}{2}\pi\right) = 5\cdot\cos\left(2{,}5\pi\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{\left(t=\frac{3}{4}T\right)} = -50\cdot\text{sen}\left(2{,}5\pi\right) = -50\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\left\{\begin{array}{l} y' = 10\cdot\cos\left(5t+\frac{1}{2}\pi\right) \\ v = -50\cdot\operatorname{sen}\left(5t+\frac{1}{2}\pi\right)\end{array}\right\} \quad \left\{\omega'' = 5\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{2\pi}{T'}\right\} \quad T' = \frac{2\pi}{5} = 2T = 2\times 0,628\,\text{s}$$

$$y'_{0(t=0)} = 10\cdot\cos\tfrac{1}{2}\pi = 0 \quad\Rightarrow\quad v'_{0(t=0)} = -50\cdot\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\pi = -50\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$y'_{(t=\frac{1}{4}T)} = 10\cdot\cos\left(5\tfrac{1}{4}\tfrac{2\pi}{5}+\tfrac{1}{2}\pi\right) = 10\cdot\cos(\pi) = -10\,\text{m} \quad\Rightarrow\quad v'_{(t=\frac{1}{4}T)} = -50\cdot\operatorname{sen}\pi = 0\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$y'_{(t=\frac{1}{2}T)} = 10\cdot\cos\left(5\tfrac{1}{2}\tfrac{2\pi}{5}+\tfrac{1}{2}\pi\right) = 10\cdot\cos\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = 0\,\text{m} \quad\Rightarrow\quad v'_{(t=\frac{1}{2}T)} = -50\cdot\operatorname{sen}\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = +50\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$y'_{(t=\frac{3}{4}T)} = 10\cdot\cos\left(5\tfrac{3}{4}\tfrac{2\pi}{5}+\tfrac{1}{2}\pi\right) = 10\cdot\cos(2\pi) = +10\,\text{m} \quad\Rightarrow\quad v'_{(t=\frac{3}{4}T)} = -50\cdot\operatorname{sen}(2\pi) = 0\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$y'_{(t=T)} = 10\cdot\cos\left(5\tfrac{2\pi}{5}+\tfrac{1}{2}\pi\right) = 10\cdot\cos(2,5\pi) = 0 \quad\Rightarrow\quad v'_{(t=\frac{3}{4}T)} = -50\cdot\operatorname{sen}(2,5\pi) = -50\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

8) Una partícula de 50 g vibra a lo largo del eje X, alejándose como máximo 10 cm a un lado y a otro de la posición de equilibrio (x = 0). El estudio de su movimiento ha revelado que existe una relación sencilla entre la aceleración y la posición que ocupa en cada instante: $a = -16\cdot\pi^2 x$. a) Escriba las expresiones de la posición y de la velocidad de la partícula en función del tiempo, sabiendo que este último se comenzó a medir cuando la partícula pasaba por la posición x = 10 cm. b) Calcule las energías cinética y potencial de la partícula cuando se encuentra a 5 cm de la posición de equilibrio. [a) x = 0,10·cos (4πt); v = -0,4π·sen (4πt); b) E_c = 0,0296 J; E_p = 0,00987 J]

Solución:

$$\left\{x = A\cos(\omega t+\phi_0) \quad\Rightarrow\quad v = -A\omega\operatorname{sen}(\omega t+\phi_0) \quad\Rightarrow\quad a = -A\omega^2\cos(\omega t+\phi_0) = -\omega^2 x\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = A\cos(\omega t+\phi_0) \\ x_0 = A\cos(\phi_0)\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l} \phi_0 = \arccos\dfrac{x_0}{A} = 0^{\circ} \\ a = -\omega^2 x = -16\pi^2 x \quad\Rightarrow\quad \omega = 4\pi\end{array}\right.$$

$$x = A\cos(\omega t+\phi_0) = 0,10\cos(4\pi t)$$

$$v = -0,4\pi\operatorname{sen}(4\pi t)$$

$$E_c = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2\left(A^2-x^2\right) = \tfrac{1}{2}\times 0,050\,\text{kg}\times\left(4\pi\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2\times\left(0,10^2-0,05^2\right)\text{m}^2 = 0,0296\,\text{J}$$

$$E_p = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2x^2 = \tfrac{1}{2}\times 0,050\,\text{kg}\times\left(4\pi\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2\times 0,05^2\,\text{m}^2 = 0,00987\,\text{J}$$

9) Una partícula de 0,2 kg describe un movimiento armónico simple a lo largo del eje x, de frecuencia 20 Hz. En el instante inicial la partícula pasa por el origen, moviéndose hacia la derecha, y su velocidad es máxima. En otro instante de la oscilación la energía cinética es 0,2 J y la energía potencial es 0,6 J. a) Escriba la ecuación de movimiento de la partícula y calcule su aceleración máxima. b) Explique, con ayuda de una gráfica, los cambios de energía cinética y de energía potencial durante una oscilación. [a) x = 0,0005·cos (40πt - ½π); $a_{máx}$ = 8 m/s^2]

Solución:

$$\left\{x = A\cos(\omega t + \phi_0) \quad \Rightarrow \quad v = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0) \quad \Rightarrow \quad a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi_0) = -\omega^2 x\right\}$$

$$\left.\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \phi_0) \\ x_0 = A\cos(\phi_0) \end{cases}\right\} \begin{cases} \phi_0 = \arccos\dfrac{x_0}{A} = \pm\dfrac{1}{2}\pi \\ v_0 = -A\omega \operatorname{sen}(\phi_0) > 0 \\ \operatorname{sen}(\phi_0) = -1 \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = -\dfrac{1}{2}\pi = \dfrac{3}{2}\pi \end{cases}$$

$$E_t = E_c + E_p = \tfrac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right) + \tfrac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

$$A^2 = \frac{E_t}{\tfrac{1}{2}m\omega^2} = \frac{0,8\,\mathrm{J}}{\tfrac{1}{2}\times 0,2\,\mathrm{kg}\times\left(2\pi\cdot 20\,\tfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad A = 0,0005066\,\mathrm{m}$$

$$a_{\text{máx}} = -\omega^2 A = -8\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

10) Un movimiento armónico simple viene descrito por la ecuación x(t) = A·sen (ωt + δ). a) Escriba la velocidad y la aceleración de la partícula en función del tiempo y explique cómo varían a lo largo de una oscilación. b) Deduzca las expresiones de las energías cinética y potencial en función de la posición y explique sus cambios a lo largo de la oscilación.

11) Un cuerpo realiza un movimiento vibratorio armónico simple. a) Escriba la ecuación del movimiento si la aceleración máxima es $10\cdot\pi^2$ cm/s^2, el período de las oscilaciones T = 1·s y la elongación del cuerpo al iniciarse el movimiento 2 cm y la velocidad positiva. b) Represente gráficamente la elongación y la velocidad en función del tiempo y comente la gráfica. [a) x = 2,5·cos (2π·t – 0,20π) cm; b) v = -5·π·sen (2π·t – 0,20π) cm/s]

Solución:

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0) \quad \Rightarrow \quad v = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0) \Rightarrow \quad a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi_0) = -\omega^2 x$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\,\mathrm{rad}}{1\,\mathrm{s}} = 2\pi\,\tfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

$$a_{\text{máx}} = 10\pi^2\,\tfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2} = -\omega^2 A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{a_{\text{máx}}}{\omega^2} = \frac{10\pi^2\,\tfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}}{\left(2\pi\,\tfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)^2} = 2,5\,\mathrm{cm}$$

$$x_{0(t=0)} = 2\,\mathrm{cm} = A\cos\phi_0 \quad \Rightarrow \phi_0 = \arccos\frac{x_{0(t=0)}}{A} = \arccos\frac{2\,\mathrm{cm}}{2,5\,\mathrm{cm}} = \pm 36,87^{\mathrm{o}} \times \frac{\pi\,\mathrm{rad}}{180^{\mathrm{o}}} = \pm 0,20\pi$$

$$v_{0(t=0)} = -A\omega \operatorname{sen}(\phi_0) = -A\omega \operatorname{sen}(-0,20\pi) > 0$$

$$x = 2,5\cdot\cos(2\pi t - 0,20\pi)\,\mathrm{cm} = 2,5\cdot\cos(2\pi t + 1,80\pi)\,\mathrm{cm}$$

$$v = -2,5\cdot 2\pi\cdot\operatorname{sen}(2\pi t + 1,80\pi)\,\tfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} = -5\pi\cdot\operatorname{sen}(2\pi t + 1,80\pi)\,\tfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$$

$$x = 2,5 \cdot \cos\left(2\pi t - 0,20\pi\right) cm = 2,5 \cdot \cos\left(2\pi t + 1,80\pi\right) cm \quad \left\{\omega = 2\pi \tfrac{rad}{s}\right\} \quad T = 1 s$$

$$x_{máximo} = +2,5 \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{matrix} \cos\left(2\pi t - 0,20\pi\right) = +1 \\ 2\pi t - 0,20\pi = 2n\pi \end{matrix}\right\} \quad t = \frac{2n\pi + 0,2\pi}{2\pi} \left\{\begin{matrix} t_0 = 0,1 s \\ t_1 = 1,1 s \end{matrix}\right.$$

$$x_{mínimo} = -0,05 \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{matrix} \cos\left(2\pi t - 0,20\pi\right) = -1 \\ 2\pi t - 0,20\pi = \left(2n+1\right)\pi \end{matrix}\right\} \quad t = \frac{\left(2n+1\right)\pi + 0,2\pi}{2\pi} \left\{\begin{matrix} t_0 = 0,6 s \\ t_1 = 1,6 s \end{matrix}\right.$$

$$x = 0 = x_0 \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{matrix} \cos\left(2\pi t - 0,20\pi\right) = 0 \\ 2\pi t - 0,20\pi = \left(2n+1\right)\dfrac{\pi}{2} \end{matrix}\right\} \quad t = \frac{\left(2n+1\right)\frac{\pi}{2} + 0,2\pi}{2\pi} - \tfrac{1}{3} \left\{\begin{matrix} t_0 = 0,35 s \\ t_1 = 0,85 s \end{matrix}\right.$$

$$v = -5\pi \cdot sen\left(2\pi t - 0,20\pi\right) \tfrac{cm}{s} = -5\pi \cdot sen\left(2\pi t + 1,80\pi\right) \tfrac{cm}{s} \quad \left\{\omega = \pi \tfrac{rad}{s}\right\} \quad T = 2 s$$

$$v = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{matrix} sen\left(2\pi t - 0,20\pi\right) = 0 \\ 2\pi t - 0,20\pi = n\pi \end{matrix}\right\} \quad t = \frac{n\pi + 0,2\pi}{2\pi} \left\{\begin{matrix} t_0 = 0,1 s \\ t_1 = 0,6 s \end{matrix}\right.$$

$$v_{máx} = +5\pi \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{matrix} sen\left(2\pi t - 0,20\pi\right) = -1 \\ 2\pi t - 0,20\pi = \left(2n + \dfrac{3}{2}\right)\pi \end{matrix}\right\} \quad t = \frac{\left(2n+1,5\right)\pi + 0,2\pi}{2\pi} \left\{\begin{matrix} t_0 = 0,85 s \\ t_1 = 1,85 s \end{matrix}\right.$$

$$v_{mín} = -5\pi \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{matrix} sen\left(2\pi t - 0,20\pi\right) = +1 \\ 2\pi t - 0,20\pi = \left(2n + \dfrac{1}{2}\right)\pi \end{matrix}\right\} \quad t = \frac{\left(2n+0,5\right)\pi + 0,2\pi}{2\pi} \left\{\begin{matrix} t_0 = 0,35 s \\ t_1 = 1,35 s \end{matrix}\right.$$

12) a) Describa el movimiento armónico simple y comente sus características cinemáticas y dinámicas. b) Una masa oscila verticalmente suspendida de un muelle. Describa los tipos de energía que intervienen y sus respectivas transformaciones.

13) Un cuerpo, situado sobre una superficie horizontal lisa y unido al extremo de un resorte, efectúa un movimiento armónico simple y los valores máximos de su velocidad y aceleración son 0,6 m/s y 7,2 m/s^2 respectivamente. a) Determine el período y la amplitud del movimiento. b) Razone cómo variaría la energía mecánica del cuerpo si se duplicara: i) la frecuencia; ii) la aceleración máxima. [a) T = 0,5236 s; A = 0,05 m; b) i) E' = 4·E_t]

Solución:

$$\left\{x = A\cos\left(\omega t + \phi_0\right) \quad \Rightarrow \quad v = -A\omega sen\left(\omega t + \phi_0\right) \quad \Rightarrow \quad a = -A\omega^2 \cos\left(\omega t + \phi_0\right) = -\omega^2 x\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} v_{máx} = A\omega = 0,6 \tfrac{m}{s} \\ a_{máx} = \omega^2 A = 7,2 \tfrac{m}{s^2} \end{matrix}\right\} \omega = \frac{v_{máx}}{A}$$

$$a_{máx} = \omega^2 A = \omega^2 A = \frac{v_{máx}^2}{A^2} \cdot A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{v_{máx}^2}{a_{máx}} = \frac{\left(0,6 \tfrac{m}{s}\right)^2}{7,2 \tfrac{m}{s^2}} = 0,05 m$$

$$\omega = \frac{v_{máx}}{A} = \frac{0,6 \tfrac{m}{s}}{0,05 m} = 12 \tfrac{rad}{s} = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,5236 s$$

$$E_t = E_c + E_p = \tfrac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right) + \tfrac{1}{2}m\omega^2x^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2A^2$$

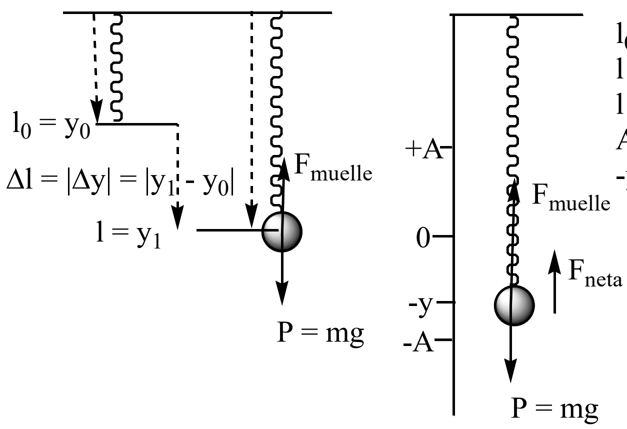
$$\omega' = 2\omega \quad \Rightarrow \quad E_t' = \tfrac{1}{2}m\omega'^2A^2 = \tfrac{1}{2}m(2\omega)^2A^2 = 4\cdot\tfrac{1}{2}m\omega^2A^2 = 4E_t$$

$$a'_{máx} = 2a_{máx} \quad \left\{ a_{máx} = \omega^2A = 7{,}2\,\tfrac{m}{s^2} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{a_{máx}}{\omega^2} \right\} \quad A' = \frac{a'_{máx}}{\omega^2} = 2\frac{a_{máx}}{\omega^2} = 2A$$

$$E_t' = \tfrac{1}{2}m\omega^2A'^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2(2A)^2 = 4\cdot\tfrac{1}{2}m\omega^2A^2 = 4E_t$$

14) Un bloque de 0,5 kg cuelga del extremo inferior de un resorte de constante elástica k = 72 N/m. Al desplazar el bloque verticalmente hacia abajo de su posición de equilibrio comienza a oscilar, pasando por el punto de equilibrio con una velocidad de 6 m/s. a) Razone los cambios energéticos que se producen en el proceso. b) Determine la amplitud y la frecuencia de la oscilación. [a) La E_c oscila entre 0 y 9 J; la E_p oscila entre 2,45 J y 11,45 J; la E_t = 11,45 J; b) A = 0,5 m; ω = 12 rad/s]

Solución:



$l_0 = y_0$ es la longitud del muelle sin estirar
$l = y_1$ es la longitud del muelle con la masa en reposo
$l = y_1$ define la posición de equilibrio y = 0
A es la amplitud de las oscilaciones alrededor de y = 0
-y es la posición de la masa en un instante

La energía en una superficie vertical: el movimiento es también armónico, de la misma pulsación ω = (k/m)½, pero con la posición de equilibrio está desplazada respecto del caso horizontal, está alargada en: Δl = mg/k. Por lo que respecto de la energía es de esperar que en vertical haya que añadirle un término de energía potencial correspondiente al alargamiento $\Delta l = l - l_0$:

$$\begin{cases} E_p = E_{p(m)} + E_{p(g)} = \tfrac{1}{2}kx^2 - mgy = \tfrac{1}{2}k\left[\Delta l + y\right]^2 - mgy = \tfrac{1}{2}k\left[\Delta l^2 + y^2 + 2y\Delta l\right] - mgy \\ E_p = \tfrac{1}{2}k\Delta l^2 + \tfrac{1}{2}ky^2 + ky\Delta l - mgy = \tfrac{1}{2}k\Delta l^2 + \tfrac{1}{2}ky^2 + mgy - mgy \\ E_p = E_{p(m)} + E_{p(g)} = \tfrac{1}{2}k\Delta l^2 + \tfrac{1}{2}ky^2 \end{cases}$$

$$E_c = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - y^2\right) = \tfrac{1}{2}k\left(A^2 - y^2\right)$$

$$E_{total} = E_c + E_p = \tfrac{1}{2}k\left(A^2 - y^2\right) + \tfrac{1}{2}k\Delta l^2 + \tfrac{1}{2}ky^2 = \tfrac{1}{2}kA^2 + \tfrac{1}{2}k\Delta l^2$$

$$E_{c(máx)} = \tfrac{1}{2}mv_{máx}^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2A^2 = \tfrac{1}{2}kA^2$$

$$E_{c(máx)} = \tfrac{1}{2}mv_{máx}^2 = \tfrac{1}{2}\times 0{,}5\,kg\times\left(6\,\tfrac{m}{s}\right)^2 = 9\,J \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{2\cdot E_{c(máx)}}{k}} = \sqrt{\frac{2\times 9\,J}{72\,\frac{N}{m}}} = 0{,}5\,m$$

ω^2 = k/m = 72/0,5; ω = 144 rad/s; **frecuencia = 1,90 Hz**

$\Delta l = (l - l_0)$ = mg/k = 0,5 kg·9,8 m/s²/72 N/m = 0,068 m

La energía total: $E_{total} = \tfrac{1}{2}\cdot k\cdot A^2 + \tfrac{1}{2}\cdot k\cdot \Delta l^2$ = 9 J + 2,45 J = 11,45 J

Problemas resueltos de «Ondas»

1) Un movimiento ondulatorio, que se propaga a lo largo del eje OX, tiene de período $3\cdot 10^{-3}$ s. Los dos puntos más próximos, cuya diferencia de fase es de $\frac{1}{2}\pi$ rad, se encuentran a 30 cm. Calcule: a) la longitud de onda; b) la velocidad de propagación. [a) 1,2 m; b) 400 m/s]

Solución:

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx) = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = A\cos\phi \quad \left\{\Delta\phi = \tfrac{1}{2}\pi\right.$$

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = (\omega t - kx_2) - (\omega t - kx_1) = kx_1 - kx_2 = k(x_1 - x_2) = k\Delta x$$

$$\Delta\phi = \tfrac{1}{2}\pi = k\Delta x = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x \quad \left\{\lambda = \frac{2\pi\Delta x}{\frac{1}{2}\pi} = 4\Delta x = 4\times 0{,}30\,\text{m} = 1{,}20\,\text{m}\right.$$

$$\phi = \omega t - kx = \text{cte.} \quad \left\{c = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\omega t - \phi}{k}\right) = \frac{\omega}{k} = \frac{\frac{2\pi}{T}}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{\lambda}{T} = \frac{1{,}20\,\text{m}}{3\cdot 10^{-3}\,\text{s}} = 400\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right.$$

2) Escribe la expresión de una onda sinusoidal que se propaga por una cuerda en el sentido positivo del eje OX, con las siguientes características: la amplitud de 2 cm, la frecuencia de 60 Hz y la velocidad de propagación de 10 m/s. [$y(x,t) = 0{,}02\cos 2\pi(60t - 6x)\,\text{m}$]

Solución:

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx) = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{cT}\right) = A\cos 2\pi\left(\nu t - \frac{\nu x}{c}\right)$$

$$y(x,t) = 0{,}02\cos 2\pi\left(60t - \frac{60x}{10}\right) = 0{,}02\cos 2\pi(60t - 6x)\,\text{m}$$

3) La ecuación de una onda transversal es $y(z,t) = 10\,\text{sen}(2\pi t - 10\pi z)$ en el S.I. de unidades. Calcule: a) la velocidad de propagación de la onda; b) la velocidad y la aceleración máxima de las partículas de la cuerda; c) la frecuencia, el período, la pulsación, el vector de onda y la longitud de onda. [a) 0,2 m/s; b) 20π m/s y $40\pi^2$ m/s^2 ; c) 1 Hz; 1 s; 2π rad/s ; 10π rad/m; 0,20 m]

Solución:

$$y(z,t) = 10\cdot\text{sen}(2\pi t - 10\pi z) = A\cdot\text{sen}(\omega t - kz) = A\sin\phi$$

$$\phi = \omega t - kz = \text{cte.} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\omega t - \phi}{k}\right) = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}}{10\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}} = 0{,}2\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v = \frac{dy}{dt} = A\omega\cos(\omega t - kz) \quad \left\{v_{\text{máx}} = A\omega = 10\,\text{m}\times 2\pi\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}} = 20\pi\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right.$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\sin(\omega t - kz) \quad \left\{a_{\text{máx}} = -A\omega^2 = -10\,\text{m}\times\left(2\pi\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 = -40\pi^2\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\right.$$

$$\omega = 2\pi\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \left\{\nu = \frac{2\pi}{\omega} = 1\,\text{Hz}\right\}\left\{T = \frac{1}{\nu} = 1\,\text{s}\right\} \quad k = 10\pi\,\tfrac{\text{rad}}{\text{m}} \quad \left\{\lambda = \frac{2\pi}{k} = 0{,}20\,\text{m}\right.$$

4) Una onda sinusoidal se propaga a lo largo de una cuerda. El tiempo que transcurre entre el instante de elongación máxima y el de elongación nula en un punto de la cuerda es de 0,17 s. Calcule: a) el período y la frecuencia de la onda; b) la velocidad de propagación de la onda si su longitud de onda es de 1,4 m. [a) 0,68 s; 1,47 Hz; b) 2,06 m/s]

Solución:

$$y(x,t)=A\cdot\cos\left(\omega t-kx\right)=A\cos\phi\quad\begin{cases}y(x,t_1)=A\cdot\cos\left(\omega t_1-kx\right)=A\cdot\cos\phi_1=+A\\ y(x,t_2)=A\cdot\cos\left(\omega t_2-kx\right)=A\cdot\cos\phi_2=0\end{cases}$$

$$\Delta\phi=\phi_2-\phi_1=\left(\omega t_2-kx\right)-\left(\omega t_1-kx\right)=\omega\Delta t$$

$$\left\{\begin{array}{l}y(x,t_1)=+A\\ \cos\left(\omega t_1-kx\right)=\cos\phi_1=+1\\ \left(\omega t_1-kx\right)=\phi_1=n2\pi\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}y(x,t_2)=0\\ \cos\left(\omega t_2-kx\right)=\cos\phi_2=0\\ \left(\omega t_2-kx\right)=\phi_2=\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\end{array}\right\}$$

$$\Delta\phi_{(n=0)}=\phi_2-\phi_1=\tfrac{1}{2}\pi-0=\tfrac{1}{2}\pi=\omega\Delta t=\frac{2\pi}{T}\Delta t$$

$$T=\frac{2\pi\Delta t}{\Delta\phi}=\frac{2\pi\cdot 0,17\,\mathrm{s}}{\frac{1}{2}\pi}=4\times 0,17\,\mathrm{s}=0,68\,\mathrm{s}\quad\Rightarrow\quad\nu=\frac{1}{T}=1,47\,\mathrm{Hz}$$

$$\phi=\omega t-kx=\text{cte.}\quad\Rightarrow\quad c=\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega t-\phi}{k}\right)=\frac{\omega}{k}=\frac{\frac{2\pi}{T}}{\frac{2\pi}{\lambda}}=\frac{\lambda}{T}=\frac{1,4\,\mathrm{m}}{0,68\,\mathrm{s}}=2,06\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

5) Una onda longitudinal se propaga a lo largo de un resorte en el sentido negativo del eje OX y la distancia entre los dos puntos más próximos en fase es de 20 cm. El foco emisor, fijo a un extremo del resorte vibra con una amplitud de 3 cm y una frecuencia de 25 Hz. Determinar: a) la velocidad de propagación de la onda; b) la expresión de la onda sabiendo que la perturbación en el instante inicial en x = 0 es nula; c) velocidad y aceleración máximas de un punto del resorte. [a) -5 m/s; b) $y(x,t)=0,03\,\mathrm{sen}\,2\pi\left(25t+5x\right)$ m; c) $1,5\pi$ m/s y $75\pi^2$ m/s^2]

Solución:

$$y(x,t)=A\,\mathrm{sen}\left(\omega t+kx\right)=A\,\mathrm{sen}\,2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)=A\,\mathrm{sen}\,2\pi\left(\nu t+\frac{x}{\lambda}\right)=A\,\mathrm{sen}\,\phi\quad\begin{cases}A=0,03\,\mathrm{m}\\ \nu=25\,\mathrm{Hz}\end{cases}$$

$$\Delta\phi=\phi_2-\phi_1=\left(\omega t+kx_2\right)-\left(\omega t+kx_1\right)=kx_2-kx_1=k\left(x_2-x_1\right)=k\Delta x$$

$$\Delta\phi=2\pi=k\Delta x=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x\quad\left\{\lambda=\frac{2\pi\Delta x}{2\pi}=\Delta x=0,20\,\mathrm{m}\right.$$

$$\phi=\omega t+kx=\text{cte.}\quad\left\{c=\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\phi-\omega t}{k}\right)=-\frac{\omega}{k}=-\frac{2\pi\nu}{\frac{2\pi}{\lambda}}=-\lambda\nu=-0,20\,\mathrm{m}\times 25\,\mathrm{s}^{-1}=-5,0\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right.$$

$$y(x,t)=A\,\mathrm{sen}\left(\omega t+kx\right)=A\,\mathrm{sen}\,2\pi\left(\nu t+\frac{x}{\lambda}\right)=0,03\mathrm{sen}2\pi\left(25t+5x\right)\mathrm{m}$$

$$v=\frac{dy}{dt}=A\omega\cos\left(\omega t+kx\right)\quad\left\{v_{\text{máx}}=A\omega=0,03\mathrm{m}\times 50\pi\,\tfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}=1,5\pi\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right.$$

$$a=\frac{dv}{dt}=-A\omega^2\sin\left(\omega t+kx\right)\quad\left\{a_{\text{máx}}=-A\omega^2=-0,03\mathrm{m}\times\left(50\pi\,\tfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)^2=-75\pi^2\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right.$$

6) Calcula la perturbación resultante, en el punto x = 0,4 m, al superponerse las dos ondas: $y_1=0,04\,\mathrm{sen}\left(2\pi t-0,5\pi x\right)$, $y_2=0,04\,\mathrm{sen}\left(2\pi t-0,5\pi x+\frac{\pi}{6}\right)$. $\left[y=0,08\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{sen}\left(2\pi t-0,12\pi\right)\right]$

Solución:

$$\boxed{\text{sen}\,A+\text{sen}\,B=2\cdot\text{sen}\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{sen}(a+b)+\text{sen}(a-b)=(\text{sen}\,a\cdot\cos b+\cos a\cdot\text{sen}\,b)+(\text{sen}\,a\cdot\cos b-\cos a\cdot\text{sen}\,b)\\ \text{sen}(a+b)+\text{sen}(a-b)=2\cdot\text{sen}\,a\cdot\cos b=2\cdot\text{sen}\dfrac{(a+b)+(a-b)}{2}\cdot\cos\dfrac{(a+b)-(a-b)}{2}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}(a+b)+(a-b)=2a \quad\Rightarrow\quad a=\dfrac{(a+b)+(a-b)}{2}\\ (a+b)-(a-b)=2b \quad\Rightarrow\quad b=\dfrac{(a+b)-(a-b)}{2}\end{array}\right\} \quad \text{sen}\,A+\text{sen}\,B=2\cdot\text{sen}\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\text{sen}\,A+\text{sen}\,B=2\cdot\text{sen}\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\left\{\begin{array}{l}y_1=0,04\,\text{sen}(2\pi t-0,5\pi x)\\ y_2=0,04\,\text{sen}\left(2\pi t-0,5\pi x+\frac{\pi}{6}\right)\end{array}\right\} y_t=y_1+y_2=0,04\,\text{sen}(2\pi t-0,5\pi x)+0,04\,\text{sen}\left(2\pi t-0,5\pi x+\frac{\pi}{6}\right)$$

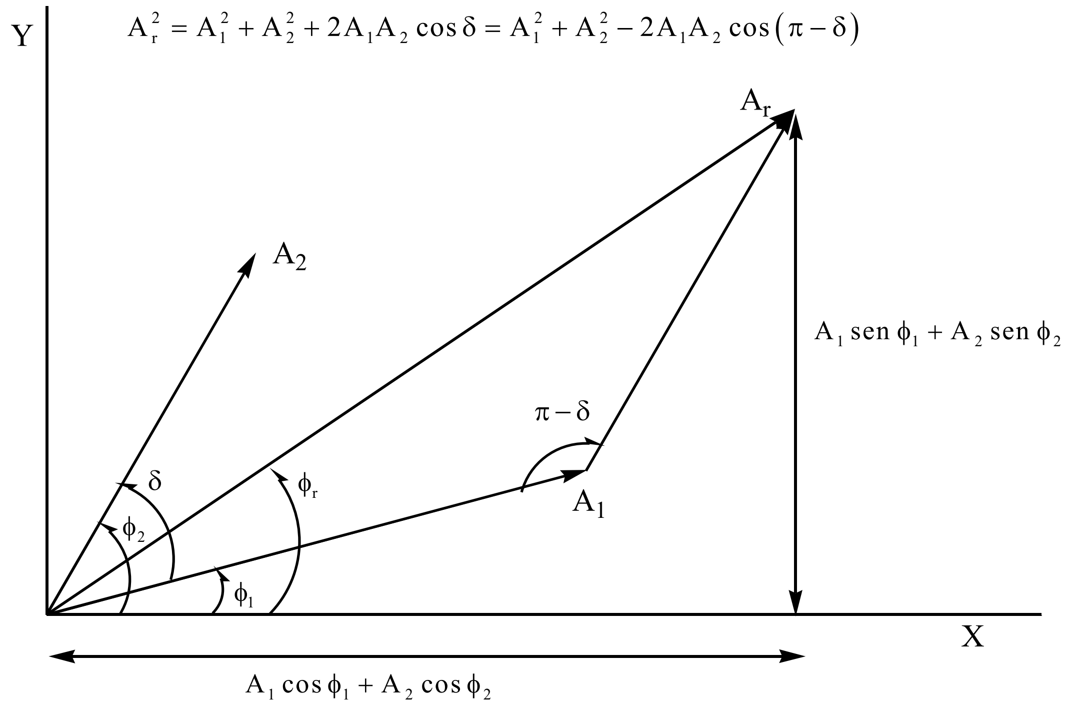
$$y_t=0,04\cdot 2\cdot\text{sen}\frac{\left(2\pi t-0,5\pi x+\frac{\pi}{6}\right)+(2\pi t-0,5\pi x)}{2}\cdot\cos\frac{\left(2\pi t-0,5\pi x+\frac{\pi}{6}\right)-(2\pi t-0,5\pi x)}{2}$$

$$y_t=0,084\cdot\text{sen}\left(2\pi t-0,5\pi x+\frac{\pi}{12}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=0,084\cdot\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\cdot\text{sen}\left(2\pi t-0,5\pi x+\frac{\pi}{12}\right)$$

$$y_{t(x=0,4)}=0,084\cdot\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\cdot\text{sen}\left(2\pi t-0,5\pi\cdot 0,4+\frac{\pi}{12}\right)=0,084\cdot\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\cdot\text{sen}(2\pi t-0,1166\pi)$$

Otra forma: Las dos ondas que se superponen tienen la misma amplitud y la misma frecuencia.

$$y_r=y_1+y_2 \quad \{y_r=A_r\,\text{sen}(\omega t-\alpha)=y_1+y_2=A\,\text{sen}(\omega t-kr_1)+A\,\text{sen}(\omega t-kr_2)$$



$$\delta = kr_1 - kr_2 = k\left(r_1 - r_2\right)$$

$$A_r^2 = A^2 + A^2 + 2A^2\cos\delta = 2A^2\left(1+\cos\delta\right) = 2A^2\left[1+\cos\left(\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}\right)\right] = 2A^2\left[1+\cos^2\frac{\delta}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\delta}{2}\right]$$

$$A_r^2 = 2A^2 2\cos^2\frac{\delta}{2} \qquad \left\{A_r = 2A\cos\frac{\delta}{2}\right.$$

$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}kr_1 + \operatorname{sen}kr_2}{\cos kr_1 + \cos kr_2} = \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{kr_1+kr_2}{2}\right)\cos\left(\frac{kr_1-kr_2}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{kr_1+kr_2}{2}\right)\cos\left(\frac{kr_1-kr_2}{2}\right)} = \tan\left(\frac{kr_1+kr_2}{2}\right)$$

$$y_r = A_r\operatorname{sen}\left(\omega t - \alpha\right) = 2A\cos\left(\frac{kr_1-kr_2}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{kr_1+kr_2}{2}\right)$$

$$y_r = y_1 + y_2 \quad \left\{\begin{array}{l} y_1 = 0{,}04\operatorname{sen}\left(2\pi t - 0{,}5\pi x\right) \\ y_2 = 0{,}04\operatorname{sen}\left(2\pi t - 0{,}5\pi x + \frac{\pi}{6}\right)\end{array}\right\}$$

$$y_r = A_r\operatorname{sen}\left(\omega t - \alpha\right) = 2A\cos\left(\frac{kr_1-kr_2}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{kr_1+kr_2}{2}\right)$$

$$y_r = 2\times 0{,}04\times\cos\left(\frac{0{,}5\pi x - 0{,}5\pi x - \frac{\pi}{6}}{2}\right)\times\operatorname{sen}\left(2\pi t - \frac{0{,}5\pi x + 0{,}5\pi x - \frac{\pi}{6}}{2}\right)$$

$$y_r\left(0{,}4;t\right) = 2\times 0{,}04\times\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\times\operatorname{sen}\left(2\pi t - 0{,}5\pi x + \frac{\pi}{12}\right) y_r = 0{,}08\times\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\times\operatorname{sen}\left(2\pi t - 0{,}12\pi\right)$$

7) Escribe la expresión de la onda resultante si en un medio interfieren las dos ondas (y_1; y_2). Posteriormente determina sus características. $y_1 = 0{,}04\operatorname{sen}\pi\left(2t - 0{,}1x\right)$, $y_2 = 0{,}04\operatorname{sen}\pi\left(2t + 0{,}1x\right)$. [$y_r = 0{,}08\cos\left(0{,}1\pi x\right)\operatorname{sen}\left(2\pi t\right)$]

Solución:

$$\boxed{\operatorname{sen}A + \operatorname{sen}B = 2\cdot\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen}\left(a+b\right) + \operatorname{sen}\left(a-b\right) = \left(\operatorname{sen}a\cdot\cos b + \cos a\cdot\operatorname{sen}b\right) + \left(\operatorname{sen}a\cdot\cos b - \cos a\cdot\operatorname{sen}b\right) \\ \operatorname{sen}\left(a+b\right) + \operatorname{sen}\left(a-b\right) = 2\cdot\operatorname{sen}a\cdot\cos b = 2\cdot\operatorname{sen}\frac{\left(a+b\right)+\left(a-b\right)}{2}\cdot\cos\frac{\left(a+b\right)-\left(a-b\right)}{2}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left(a+b\right)+\left(a-b\right) = 2a \quad\Rightarrow\quad a = \frac{\left(a+b\right)+\left(a-b\right)}{2} \\ \left(a+b\right)-\left(a-b\right) = 2b \quad\Rightarrow\quad b = \frac{\left(a+b\right)-\left(a-b\right)}{2}\end{array}\right\} \quad \operatorname{sen}A + \operatorname{sen}B = 2\cdot\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\operatorname{sen}A + \operatorname{sen}B = 2\cdot\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = 0{,}04\operatorname{sen}\left(2\pi t - 0{,}1\pi x\right) \\ y_2 = 0{,}04\operatorname{sen}\left(2\pi t + 0{,}1\pi x\right)\end{array}\right\} y_r = y_1 + y_2 = 0{,}04\operatorname{sen}\left(2\pi t - 0{,}1\pi x\right) + 0{,}04\operatorname{sen}\left(2\pi t + 0{,}1\pi x\right)$$

$$y_r = 0{,}04\cdot 2\cdot\operatorname{sen}\frac{\left(2\pi t - 0{,}1\pi x\right)+\left(2\pi t + 0{,}1\pi x\right)}{2}\cdot\cos\frac{\left(2\pi t + 0{,}1\pi x\right)-\left(2\pi t - 0{,}1\pi x\right)}{2}$$

$$y_r = 0{,}08\cdot\operatorname{sen}\left(2\pi t\right)\cdot\cos\left(0{,}1\pi x\right) = 0{,}08\cdot\cos\left(0{,}1\pi x\right)\cdot\operatorname{sen}\left(2\pi t\right)$$

Otra forma:

$$y_1 = 0{,}04\,\mathrm{sen}\left(2\pi t - 0{,}1\pi x\right) \quad \Rightarrow \quad \text{Viaja en sentido } +OX$$
$$y_2 = 0{,}04\,\mathrm{sen}\left(2\pi t + 0{,}1\pi x\right) \quad \Rightarrow \quad \text{Viaja en sentido } -OX$$
$$y_1 = 0{,}04\left[\mathrm{sen}\,2\pi t\cos 0{,}1\pi x - \cos 2\pi t\,\mathrm{sen}\,0{,}1\pi x\right]$$
$$y_2 = 0{,}04\left[\mathrm{sen}\,2\pi t\cos 0{,}1\pi x + \cos 2\pi t\,\mathrm{sen}\,0{,}1\pi x\right]$$
$$y_{total} = y_1 + y_2 = 0{,}04\times 2\times\cos 0{,}1\pi x\times\mathrm{sen}\,2\pi t = 0{,}08\cos\left(0{,}1\pi x\right)\mathrm{sen}\left(2\pi t\right)$$
$$y_{total} = y_1 + y_2 == 0{,}08\cos\left(0{,}1\pi x\right)\mathrm{sen}\left(2\pi t\right) \quad \left\{y_{máx} = 0{,}08\cos\left(0{,}1\pi x\right)\right.$$

La expresión de una onda viajera es de la forma: $y = A_m\,\mathrm{sen}\,\phi = A_m\,\mathrm{sen}\left(\omega t \pm kx\right)$. Sin embargo, la ecuación obtenida representa una onda estacionaria, es decir, es la expresión de un movimiento armónico simple cuya amplitud varía desde punto a punto, y está dada por la amplitud resultante: $y_{máx} = 0{,}08\cos\left(0{,}1\pi x\right)$.

8) La vibración de una cuerda viene descrita por la expresión: $y = 0{,}5\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{3}\pi x\right)\cos\left(40\pi t\right)$, donde los valores x,y en centímetros y t en segundos. Calcular: a) la distancia entre los nodos; b) la velocidad de una partícula de la cuerda situada en x = 1,5 cm y en el instante t = 9/8 s: c) la amplitud y la velocidad de propagación de las ondas cuya superposición podría generar la vibración. [a) 3 cm; b) 0 cm/s; c) 0,25 cm y 120 cm/s]

Solución:

Es una onda estacionaria, $y = 0{,}5\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{3}\pi x\right)\cos\left(40\pi t\right) = y_m\cos\left(40\pi t\right)$, porque la fase es temporal y no espacial, por lo que no se desplaza.

Nodo: Son los puntos en los que la amplitud resultante es cero.

$$y = 0{,}5\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{1}{3}\pi x\right)\cos\left(40\pi t\right) = y_m\cos\left(40\pi t\right)$$
$$y_m = 0 = 0{,}5\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{1}{3}\pi x\right) \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l}\mathrm{sen}\left(\frac{1}{3}\pi x\right) = 0 \\ \frac{1}{3}\pi x = n\pi \qquad x = 3n\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}x_0 = 0 \\ x_1 = 3\,\mathrm{cm}\end{array}\right\} \quad \Delta x = x_1 - x_0 = 3\,\mathrm{cm}$$

$$y = 0{,}5\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{1}{3}\pi x\right)\cos\left(40\pi t\right)$$
$$y_{(x=1,5)} = 0{,}5\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{1}{3}\pi\cdot 1{,}5\right)\cos\left(40\pi t\right) = 0{,}5\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{1}{2}\pi\right)\cos\left(40\pi t\right) = 0{,}5\cdot\cos\left(40\pi t\right)$$
$$y_{\left(x=1,5;t=\frac{9}{8}\right)} = 0{,}5\cdot\cos\left(40\pi t\right) = 0{,}5\cdot\cos\left(40\pi\cdot\tfrac{9}{8}\right) = 0{,}5\cdot\cos\left(45\pi\right) = 0{,}5\times\left(-1\right) = -0{,}5\,\mathrm{cm}$$
$$v_{(x=1,5)} = \frac{dy}{dt} = -\left(40\pi\right)\cdot 0{,}5\cdot\mathrm{sen}\left(40\pi t\right)$$
$$v_{\left(x=1,5;t=\frac{9}{8}\right)} = -\left(40\pi\right)\cdot 0{,}5\cdot\mathrm{sen}\left(40\pi\cdot\tfrac{9}{8}\right) = -\left(40\pi\right)\cdot 0{,}5\cdot\mathrm{sen}\left(45\pi\right) = 0$$
$$\left\{\begin{array}{l}T = 0{,}05\,\mathrm{s} \\ t = \frac{9}{8}\,\mathrm{s} = 1{,}125\,\mathrm{s} = 22{,}5\cdot T\end{array}\right\} \quad v = -\left(40\pi\right)\tfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}\times 0{,}5\times\left(-1\right) = 0$$

$$y = 0{,}5\,\text{sen}\left(\tfrac{1}{3}\pi x\right)\cos\left(40\pi t\right) = y_m \cos\left(40\pi t\right)$$

$$\left.\begin{cases} y_1 = A\,\text{sen}\left(kx - \omega t\right) \\ y_2 = A\,\text{sen}\left(kx + \omega t\right) \end{cases}\right\} y_t = y_1 + y_2 = A\,\text{sen}\left(kx - \omega t\right) + A\,\text{sen}\left(kx + \omega t\right)$$

$$y_t = A\left[\text{sen}\,kx \cdot \cos\omega t - \cos kx \cdot \text{sen}\,\omega t + \text{sen}\,kx \cdot \cos\omega t + \cos kx \cdot \text{sen}\,\omega t\right] = A\left[2\,\text{sen}\,kx \cdot \cos\omega t\right]$$

$$y_t = 2 \cdot A \cdot \text{sen}\,kx \cdot \cos\omega t = 0{,}5\,\text{sen}\left(\tfrac{1}{3}\pi x\right)\cos\left(40\pi t\right)$$

$$\left\{A = 0{,}25\,\text{cm}\right\}\left\{\begin{matrix} k = \tfrac{1}{3}\pi = \dfrac{2\pi}{\lambda} \\ \lambda = 6\,\text{cm} \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} \omega = 40\pi = 2\pi\nu \\ \nu = 20\,\text{Hz} \\ T = 0{,}05\,\text{s} \end{matrix}\right\} \quad c = \frac{\omega}{k} = \frac{40\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}}{\frac{1}{3}\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{cm}}} = 120\,\tfrac{\text{cm}}{\text{s}}$$

9) La ecuación de una onda transversal en una cuerda es: $y = 10\cos\pi\left(2x - 10t\right)$, siendo x,y en cm y t en segundos. a) Escribe la expresión de la onda que, al interferir con ella, produciría una onda estacionaria; b) indica la distancia entre nodos de dicha onda y la amplitud en un antinodo. [a) igual con signo +; b) 0,5 cm; 20 cm]

Solución:

$$y_2\left(x,t\right) = 10\cos\pi\left(2x + 10t\right)$$

$$y_t = y_1 + y_2 = 10\cos\pi\left(2x - 10t\right) + 10\cos\pi\left(2x + 10t\right)$$

$$y_{total}\left(x,t\right) = 10\left[\cos\left(2\pi x - 10\pi t\right) + \cos\left(2\pi x + 10\pi t\right)\right]$$

$$y_{total}\left(x,t\right) = 10\left[\cos\left(2\pi x\right)\cos\left(10\pi t\right) + \text{sen}\left(2\pi x\right)\text{sen}\left(10\pi t\right) + \cos\left(2\pi x\right)\cos\left(10\pi t\right) - \text{sen}\left(2\pi x\right)\text{sen}\left(10\pi t\right)\right]$$

$$y_{total}\left(x,t\right) = 10 \times 2 \times \cos\left(2\pi x\right)\cos\left(10\pi t\right) = 20\cos\left(2\pi x\right)\cos\left(10\pi t\right)\,\text{cm}$$

Nodo: Son los puntos en los que la amplitud resultante es cero.

$$A_{total} = 0 = 20\cos\left(2\pi x\right)\text{cm} \quad \left\{\begin{matrix} \cos\left(2\pi x\right) = 0 \\ 2\pi x = \left(2n+1\right)\dfrac{\pi}{2} \;\; \left(n = 0,1,2,...\right) \end{matrix}\right\} \quad x_{nodo} = \frac{\left(2n+1\right)}{4}$$

$$\Delta x_{nodo} = x_1 - x_0 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = 0{,}5\,\text{cm}$$

Antinodo: Son los puntos en los que la amplitud resultante es máxima: ± 2A.

$$A_{total} = \pm 20\,\text{cm} = 20\cos\left(2\pi x\right) \quad \left\{\begin{matrix} \cos\left(2\pi x\right) = \pm 1 \\ 2\pi x = n\pi \;\; \left(n = 0,1,2,...\right) \end{matrix}\right\} \quad x_{antinodo} = \frac{n}{2}$$

$$\Delta x_{antinodo} = x_2 - x_1 = \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = 0{,}5\,\text{cm}$$

10) Una onda transversal se propaga por una cuerda: $y = 0{,}4\cos\left(100t - 0{,}5\pi x\right)$en el S.I. Calcula: a) la longitud de onda y la velocidad de la onda; b) el estado de perturbación de la partícula a 20 cm en el tiempo 0,5 s después de empezar la vibración. [a) 4 m; 63,66 m/s; b) 0,38 m]

Solución:

$$y = 0,4\cos(100t - 0,5\pi x)$$

$$y = A\cos\phi = A\cos(\omega t - kx) \quad \begin{Bmatrix} \omega = 100\,\frac{rad}{s} \\ k = 0,5\pi\,\frac{rad}{m} \end{Bmatrix} \quad \left\{ \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0,5\pi\,\frac{rad}{m}} = 4\,m \right.$$

$$\{\phi = cte\} \quad c = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\omega t - \phi}{k}\right) = \frac{\omega}{k} = \frac{100\,\frac{rad}{s}}{0,5\pi\,\frac{rad}{m}} = \frac{200}{\pi}\,\frac{m}{s} = 63,66\,\frac{m}{s}$$

$$y = 0,4\cos(100t - 0,5\pi x) \quad \begin{Bmatrix} x = 0,20\,m \\ t = 0,50\,s \end{Bmatrix} \quad y = 0,4\cos(100\times 0,50 - 0,5\pi\times 0,20) = 0,38\,m$$

11) La ecuación de una onda viene dada en el S.I. por: $y = 0,5\cos 4\pi(10t - x)$. Calcula la diferencia de fase que existirá entre dos puntos del medio de propagación separados por la distancia de 0,5 m y por la distancia de 0,25 m. [En fase 2π rad; en oposición de fase π rad]

Solución:

$$y = 0,5\cos 4\pi(10t - x) = 0,5\cos(40\pi t - 4\pi x)$$

$$y = A\cos\phi = A\cos(\omega t - kx)$$

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = (\omega t - kx_2) - (\omega t - kx_1) = kx_1 - kx_2 = 4\pi\Delta x$$

$$\Delta\phi = 4\pi\,\frac{rad}{m}\times 0,5\,m = 2\pi\,rad$$

$$\Delta\phi' = 4\pi\,\frac{rad}{m}\times 0,25\,m = \pi\,rad$$

12) Sean las ondas: $y_1 = 0,3\cos(200t - 0,05x_1)$, $y_2 = 0,3\cos(200t - 0,05x_2)$. Halla la onda resultante de la interferencia de las dos ondas. Posteriormente, determina la amplitud resultante en un punto a 10 m (x_1) y a 12,5 m (x_2) de los centros emisores. [$y_r = 0,6\cdot\cos(0,025(x_2 - x_1))\cdot\cos(200t - 0,025(x_1 + x_2))$; 0,60 m]

Solución:

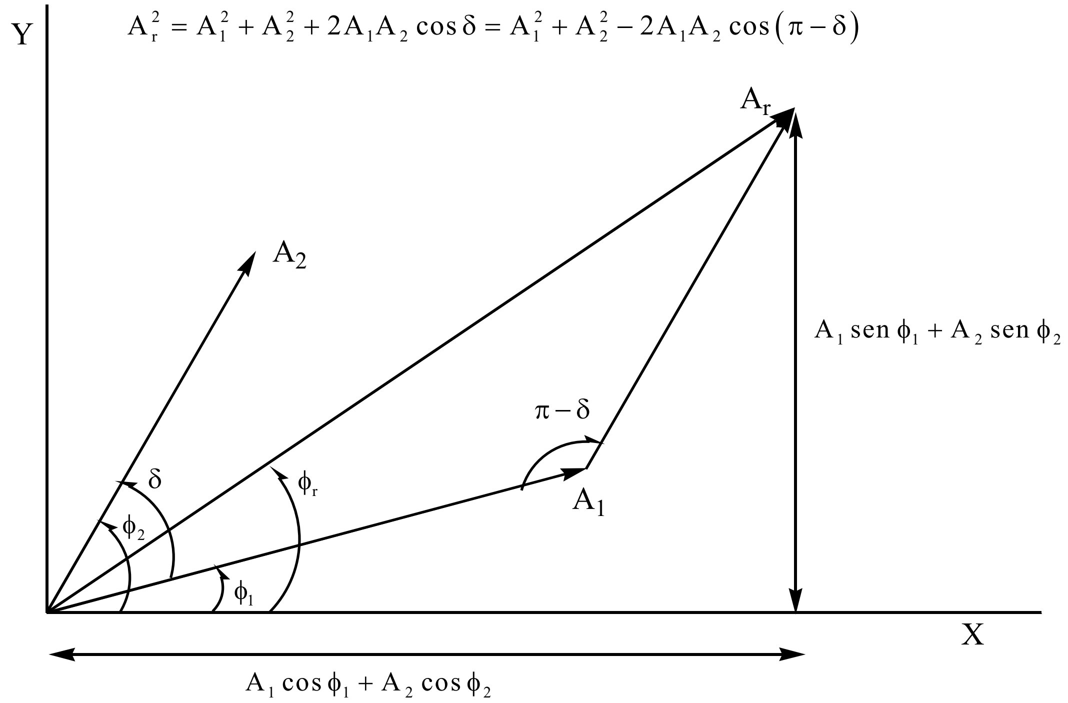
$$\begin{Bmatrix} (a+b)+(a-b) = 2a \;\Rightarrow\; a = \dfrac{(a+b)+(a-b)}{2} \\ (a+b)-(a-b) = 2b \;\Rightarrow\; b = \dfrac{(a+b)-(a-b)}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(a+b)+\cos(a-b) = 2\cdot\cos\dfrac{(a+b)+(a-b)}{2}\cdot\cos\dfrac{(a+b)-(a-b)}{2} \\ \cos A + \cos B = 2\cdot\cos\dfrac{A+B}{2}\cdot\cos\dfrac{A-B}{2} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} y_1 = 0,3\cos(200t - 0,05x_1) \\ y_2 = 0,3\cos(200t - 0,05x_2) \end{Bmatrix} y_r = y_1 + y_2 = 0,3\cos(200t - 0,05x_1) + 0,3\cos(200t - 0,05x_2)$$

$$y_r = 0,3\cdot 2\cdot\cos\frac{(200t - 0,05x_1)+(200t - 0,05x_2)}{2}\cdot\cos\frac{(200t - 0,05x_1)-(200t - 0,05x_2)}{2}$$

$$y_r = 0,6\cdot\cos\left(200t - \frac{0,05\cdot(x_1+x_2)}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{0,05\cdot(x_2-x_1)}{2}\right) = 0,6\cdot\cos\left(\frac{0,05\cdot(x_2-x_1)}{2}\right)\cdot\cos\left(200t - \frac{0,05\cdot(x_1+x_2)}{2}\right)$$

$$A = 0,6\times\cos\left(\frac{0,05\times(12,5-10)}{2}\right) = 0,60\,m$$



$$y_r = y_1 + y_2 \quad \begin{cases} y_r = A_r\cos(\omega t-\alpha) \\ y_1+y_2 = 0{,}3\cos(200t-0{,}05x_1)+0{,}3\cos(200t-0{,}05x_2) \\ y_1+y_2 = 0{,}3\left[\cos(200t-0{,}05x_1)+\cos(200t-0{,}05x_2)\right] \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l} A_r^2 = A^2+A^2+2A^2\cos\delta = 2A^2(1+\cos\delta) \\ A_r^2 = 2A^2\left[1+\cos\left(\dfrac{\delta}{2}+\dfrac{\delta}{2}\right)\right] = 2A^2\left[1+\cos^2\dfrac{\delta}{2}-\mathrm{sen}^2\dfrac{\delta}{2}\right] \end{array}\right\} \quad \begin{cases} A_r^2 = 2A^2 2\cos^2\dfrac{\delta}{2} \\ A_r = 2A\cos\dfrac{\delta}{2} \end{cases}$$

$$\tan\alpha = \frac{\mathrm{sen}\,kr_1+\mathrm{sen}\,kr_2}{\cos kr_1+\cos kr_2} = \frac{2\,\mathrm{sen}\left(\frac{kr_1+kr_2}{2}\right)\cos\left(\frac{kr_1-kr_2}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{kr_1+kr_2}{2}\right)\cos\left(\frac{kr_1-kr_2}{2}\right)} = \tan\left(\frac{kr_1+kr_2}{2}\right)$$

$$y_r = A_r\cos(\omega t-\alpha) = y_1+y_2 = 0{,}3\left[\cos(200t-0{,}05x_1)+\cos(200t-0{,}05x_2)\right]$$

13) Sean las ondas: $y_1 = 0{,}04\,\mathrm{sen}(50t-0{,}5x)$, $y_2 = 0{,}04\,\mathrm{sen}(50t+0{,}05x)$ en unidades del SI. Halla la onda resultante de la interferencia de las ondas siguientes. Posteriormente determina la velocidad de propagación de cada onda y la distancia de separación entre los nodos 2º y 5º. [y_r = 0,08·cos (0,5x)·sen (50t); +100 m/s y -100 m/s; 18,85 m]

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = 0,04\,\text{sen}\left(50t - 0,5x\right) \\ y_2 = 0,04\,\text{sen}\left(50t + 0,5x\right) \end{array}\right\} y_t\left(x,t\right) = 0,04\,\text{sen}\left(50t - 0,5x\right) + 0,04\,\text{sen}\left(50t + 0,5x\right)$$

$$y_t\left(x,t\right) = 0,04\left[\text{sen}\left(50t - 0,5x\right) + \text{sen}\left(50t + 0,5x\right)\right]$$

$$y_t\left(x,t\right) = 0,04\left[\text{sen}\,50t\cos 0,5x - \cos 50t\,\text{sen}\,0,5x + \text{sen}\,50t\cos 0,5x + \cos 50t\,\text{sen}\,0,5x\right]$$

$$y_t\left(x,t\right) = 0,04\left[2\,\text{sen}\,50t\cos 0,5x\right]$$

$$y_t\left(x,t\right) = 0,04 \times 2 \times \text{sen}\left(50t\right)\cos\left(0,5x\right) = 0,08 \times \cos\left(0,5x\right)\text{sen}\left(50t\right)$$

$$y_1 = 0,04\,\text{sen}\left(50t - 0,5x\right) = 0,04\,\text{sen}\,\phi_1 \quad \left\{ c_1 = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{50t - \phi_1}{0,5}\right) = 100\,\tfrac{m}{s} \right.$$

$$y_2 = 0,04\,\text{sen}\left(50t + 0,5x\right) \quad \left\{ c_2 = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\phi_2 - 50t}{0,5}\right) = -100\,\tfrac{m}{s} \right.$$

Nodo: Son los puntos en los que la amplitud resultante es cero.

$$y_t\left(x,t\right) = 0,08 \times \cos\left(0,5x\right)\text{sen}\left(50t\right)$$

$$A = 0,08 \times \cos\left(0,5x\right) \quad \left\{\begin{array}{l} \cos\left(0,5x\right) = 0 \\ 0,5x = \left(2n+1\right)\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} x_5 = 11\pi\,m \\ x_2 = 5\pi\,m \end{array}\right\} \Delta x = x_5 - x_2 = 6\pi\,m = 18,85\,m$$

14) La ecuación: $y = 2\,\text{sen}\,2\pi\left(10t - 0,1x\right)$, en unidades del SI es la de una onda transversal que se propaga en una cuerda tensa. Determina: a) período, longitud de onda y velocidad de propagación de la onda; b) velocidad y aceleración máximas de un punto de la cuerda. [a) 0,10 s; 10 m; 100 m/s; b) 125,66 m/s y 7.895,7 m/s^2]

Solución:

$$y = 2\,\text{sen}\,2\pi\left(10t - 0,1x\right) = 2\,\text{sen}\left(20\pi t - 0,2\pi x\right) = A\,\text{sen}\left(\omega t - kx\right)$$

$$\left\{ T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\,\text{rad}}{20\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 0,10\,\text{s} \right\} \left\{ \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\,\text{rad}}{0,2\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}} = 10\,\text{m} \right\} \left\{ c = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \frac{10\,\text{m}}{0,10\,\text{s}} = 100\,\tfrac{m}{s} \right.$$

$$y = 2\,\text{sen}\,2\pi\left(10t - 0,1x\right) = 2\,\text{sen}\left(20\pi t - 0,2\pi x\right) = A\,\text{sen}\left(\omega t - kx\right)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = 2 \times 20\pi \times \cos\left(20\pi t - 0,2\pi x\right) \quad \left\{ v_{\text{máx}} = 40\pi\,\tfrac{m}{s} = 125,66\,\tfrac{m}{s} \right.$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -2 \times \left(20\pi\right)^2 \times \sin\left(20\pi t - 0,2\pi x\right) \quad \left\{ a_{\text{máx}} = -800\pi^2\,\tfrac{m}{s^2} = -7.895,7\,\tfrac{m}{s^2} \right.$$

15) Una cuerda tensa de 0,50 m de longitud, con sus extremos fijos, vibra con una frecuencia de valor 30 Hz, en su modo fundamental. La amplitud del antinodo es de 0,05 m. a) Escribe la ecuación de la onda estacionaria. b) Calcula la velocidad máxima del punto medio de la cuerda y la velocidad de propagación de una onda viajera transversal que se propaga en dicha cuerda. [a) $y = 0,05\,\text{sen}\left(2\pi x\right)\cos\left(60\pi t\right)$; b) -9,4 m/s; 30 m/s]

Solución:

La cuerda con los extremos fijos El fenómeno de la resonancia aparece si imponemos la condición que el otro punto extremo de la cuerda estirada, $y_{total}(x,t)=2A\,\text{sen}(kx)\cos(\omega t)$, de longitud L esté fijo también, obtenemos el siguiente resultado: $y_{total}(x,t)=2A\,\text{sen}(kx)\cos(\omega t)$.

Los **antinodos** son los puntos en los que la amplitud resultante es máxima: ± 2A.

$$y_{total}(x,t)=2A\,\text{sen}(kx)\cos(\omega t)\quad\{y=0,05\,\text{sen}(2\pi x)\cos(60\pi t)$$

$$\{2A=0,05\,\text{m}\}\left\{k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi}{\lambda_1}=\frac{2\pi}{2L}=\frac{\pi}{0,5}=2\pi\,\tfrac{\text{rad}}{\text{m}}\right\}\left\{\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi\nu_{cuerda}=60\pi\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}}\right\}$$

$$v=\frac{dy}{dt}=-0,05\,\text{sen}(2\pi x)\times 60\pi\times\text{sen}(60\pi t)\quad\{v_m=-0,05\,\text{sen}(2\pi\times 0,25\,\text{m})\times 60\pi=-9,4\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$c=\frac{\omega}{k}=\frac{60\pi}{2\pi}\frac{\text{m}}{\text{s}}=30\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$y_t(x,t)=y_i+y_r=A_i\,\text{sen}(\omega t+kx)+A_r\,\text{sen}(\omega t-kx)$$

$$y_t(x,t)=A\,\text{sen}(\omega t+kx)-A\,\text{sen}(\omega t-kx)=A\left[\text{sen}(\omega t+kx)-\text{sen}(\omega t-kx)\right]$$

$$y_{total}(x,t)=A\left[(\text{sen}\,\omega t\cos kx+\cos\omega t\,\text{sen}\,kx)-(\text{sen}\,\omega t\cos kx-\cos\omega t\,\text{sen}\,kx)\right]$$

$$y_{total}(x,t)=A\left[2\cos\omega t\,\text{sen}\,kx\right]=2A\,\text{sen}\,kx\cos\omega t$$

$$y_{total}(x,t)=2A\,\text{sen}\,kx\cos\omega t=A_{total}\cos\omega t\quad\{A_{total}=2A\,\text{sen}\,kx$$

$$\left\{\begin{array}{l}y_{total}(0,t)=0=2A\,\text{sen}(k\cdot 0)\cos(\omega t)\\ \text{sen}(k\cdot 0)=0\end{array}\right\}\quad\left\{\begin{array}{l}y_{total}(L,t)=0=2A\,\text{sen}(kL)\cos(\omega t)\\ \text{sen}(kL)=0\end{array}\right\}$$

$$\{kL=n\pi\,(n=0,1,2,...)\}\quad\left\{L=\frac{n\pi}{k}=\frac{n\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}}=n\frac{\lambda}{2}\right\}\quad\left\{\lambda=\frac{2L}{n}\right.$$

$$\lambda=\frac{2L}{n}\quad\left\{\lambda_1=2L;\quad\lambda_2=L;\quad\lambda_3=\frac{2}{3}L;...\right\}\quad\nu_{cuerda}=\frac{c}{\lambda}=\frac{n\cdot c}{2L}$$

16) Una onda transversal de 0,05 m de amplitud y 600 Hz se propaga en el sentido negativo del eje OX con una velocidad de 300 m/s. a) Escribe la ecuación de la onda si en t = 0 la elongación en el punto x = 0 es máxima. b) Calcula el cambio de fase, en una misma posición, al cabo de dos segundos y el desfase entre las elongaciones, en un mismo instante, en dos posiciones distantes 100 m. [a) $y=0,05\cos(1.200\pi t+4\pi x)$; b) 2.400π rad; 400π rad]

Solución:

$$\begin{cases} A = 0,05\,\text{m} \\ \nu = 600\,\text{s}^{-1} \\ c = 300\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} = \lambda\nu \end{cases} \begin{cases} \omega = 2\pi\nu = 1.200\pi\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}} \\ \lambda = \dfrac{c}{\nu} = \dfrac{300\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}}{600\,\text{s}^{-1}} = 0,5\,\text{m} \\ k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = 4\pi\,\tfrac{\text{rad}}{\text{m}} \end{cases} \quad y_{(x=0;t=0)} = A \quad \begin{cases} y = A\cos(\omega t + kx) = A\cos\phi \\ c = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\phi - \omega t}{k}\right) = -\dfrac{\omega}{k} = -300\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$

$$y = 0,05\cos(1.200\pi t + 4\pi x)$$

$$y = 0,05\cos(1200\pi t + 4\pi x) = A\cos\phi$$
$$\Delta\phi = (1200\pi t_2 + 4\pi x) - (1200\pi t_1 + 4\pi x) = 1200\pi(t_2 - t_1) = 1200\pi\Delta t = 2400\pi\,\text{rad}$$
$$\Delta\phi' = (1200\pi t + 4\pi x_2) - (1200\pi t + 4\pi x_2) = 4\pi(x_2 - x_1) = 4\pi\Delta x = 400\pi\,\text{rad}$$

17) La ecuación: $y = 0,4\,\text{sen}\,\pi(100t - 4x)$, en unidades del SI, corresponde a una onda transversal que se propaga a lo largo de una cuerda. Determine: a) la velocidad de propagación de la onda, la longitud de onda y el sentido de propagación; b) la velocidad máxima de una partícula de la cuerda y los instantes en que el punto que está a 5 cm del origen alcanza dicha velocidad máxima. [a) 25 m/s; ½ m; +OX; b) 40π m/s; 0,002 + n·0,01 s (n = 0,1,2,)]

Solución:

La fase de la onda en cada punto e instante dados es: $\phi = \text{cte.} = \omega t - kx$.

$$y = A\,\text{sen}(\omega t - kx) = 0,4\,\text{sen}\,\pi(100t - 4x) = 0,4\,\text{sen}(100\pi t - 4\pi x)$$
$$\phi = (\omega t - kx) = \text{cte} \quad \left\{ c = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\omega t - \phi}{k}\right) = +\dfrac{\omega}{k} = \dfrac{100\pi}{4\pi} = +25\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} \right\} \quad \left\{ \lambda = \dfrac{2\pi}{k} = 0,5\,\text{m} \right.$$

$$y = A\,\text{sen}(\omega t - kx) = 0,4\,\text{sen}\,\pi(100t - 4x) = 0,4\,\text{sen}(100\pi t - 4\pi x)$$
$$v = \dfrac{dy}{dt} = 0,4 \times 100\pi \times \cos(100\pi t - 4\pi x) \quad \left\{ v_{\text{máx}} = 40\pi\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} = 125,66\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} \right.$$
$$\cos(100\pi t - 4\pi x) = \pm 1 \quad \{100\pi t - 4\pi x = n\pi\} \quad t = \dfrac{n\pi + 4\pi x}{100\pi} = \dfrac{n + 4 \times 0,05}{100} = \dfrac{n + 0,2}{100}$$

18) La ecuación de una onda es $y = 3\cos\pi(6t + 6x)$ SI. Determine: a) las características de esta onda; b) calcule la elongación y la velocidad de un punto situado a 1 m del foco 1s después de iniciarse el movimiento ondulatorio. [a) Amplitud de 3 m, frecuencia de 3 Hz, número de onda de 3 m^{-1}, velocidad de la onda 1 m/s; b) la elongación es de 3 m]

Solución:

$$y = 3\cos\pi(6t + 6x) = 3\cos(6\pi t + 6\pi x)$$
$$y = A\cos(\omega t + kx) \quad \{A = 3\,\text{m}\} \begin{cases} \omega = 6\pi\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}} \\ T = \tfrac{1}{3}\,\text{s} \end{cases} \begin{cases} k = 6\pi\,\tfrac{\text{rad}}{\text{m}} \\ \lambda = \tfrac{1}{3}\,\text{m} \end{cases} \left\{ c = \dfrac{\omega}{k} = 1\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} \right\}$$
$$y = 3\cos(6\pi \times 1\,\text{s} + 6\pi \times 1\,\text{m}) = 3\cos(12\pi) = 3\,\text{m}$$

19) Una onda electromagnética cuya frecuencia es de 10^{14} Hz y cuyo campo eléctrico de 2 V/m de amplitud, está polarizado en la dirección del eje OY, se propaga en el vacío, en el sentido negativo del eje OX. a)

Escribe la expresión del campo eléctrico de la onda electromagnética; b) calcula la longitud de onda e indica la dirección del campo magnético de la onda. [a) $E = 2\,\tfrac{V}{m}\,\mathrm{sen}\,2\pi\left(10^{14}t + \tfrac{1}{3}10^{6}x\right)$; b) $3\cdot 10^{-6}$ m en OZ]

Solución:

$$E_y = E_{máx}\cdot\mathrm{sen}(\omega t + kx) = E_{máx}\cdot\mathrm{sen}\,\phi \;\Rightarrow\; c = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\phi-\omega t}{k}\right) = -\frac{\omega}{k} = -3\cdot 10^{8}\,\tfrac{m}{s}$$

$$B_z = B_{máx}\cdot\mathrm{sen}(\omega t + kx) = B_{máx}\cdot\mathrm{sen}\,\phi \;\Rightarrow\; c = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\phi-\omega t}{k}\right) = -\frac{\omega}{k} = -3\cdot 10^{8}\,\tfrac{m}{s}$$

$$\left\{\begin{array}{l} E_{máx} = A = 2\,\tfrac{V}{m} \\ \omega = 2\pi\nu = 2\pi\cdot 1{,}0\cdot 10^{14}\,\tfrac{rad}{s} \\ k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi}{\frac{c}{\nu}} = \dfrac{2\pi}{\frac{3{,}0\cdot 10^{8}\,\frac{m}{s}}{1{,}0\cdot 10^{14}\,s^{-1}}} = \dfrac{2\pi}{3{,}0\cdot 10^{-6}}\,\tfrac{rad}{m} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} E_y = E_{máx}\cdot\mathrm{sen}(\omega t + kx) = 2\cdot\mathrm{sen}\left(2\pi\cdot 1{,}0\cdot 10^{14}\cdot t + \dfrac{2\pi}{3{,}0\cdot 10^{-6}}\cdot x\right) \\ E_y = E_{máx}\cdot\mathrm{sen}(\omega t + kx) = 2\cdot\mathrm{sen}\,2\pi\left(1{,}0\cdot 10^{14}\cdot t + \dfrac{1}{3{,}0\cdot 10^{-6}}\cdot x\right) \end{array}\right.$$

20) Considera la siguiente onda: y (x,t) = A sen (bt – cx). a) ¿Qué representan los coeficientes A, b, c?; ¿cuáles son sus unidades?; b) ¿qué interpretación tendría que la función fuera coseno en lugar de seno?, ¿y que el signo dentro del paréntesis fuera más en lugar de menos?.

21) a) Explique los fenómenos de reflexión y refracción de la luz. b) El índice de refracción del agua respecto del aire n > 1. Razone cuáles de las siguientes magnitudes cambian, y cómo, al pasar un haz de luz del aire al agua: frecuencia, longitud de onda, velocidad de propagación.

22) Los rayos X, la luz visible y los rayos infrarrojos son radiaciones electromagnéticas. Ordénelas en orden creciente de sus frecuencias e indique algunas diferencias entre ellas. ¿Qué es una onda electromagnética?. Explique sus características.

23) Considere la onda estacionaria: $y(x,t) = A\cos(bx)\,\mathrm{sen}(ct)$. a) ¿Qué representan los coeficientes A, b, c?, ¿cuáles son sus unidades?, ¿cuál es el significado del factor Acos(bx)?; b) ¿qué son los vientres y los nodos?, ¿qué distancia hay entre vientres y nodos consecutivos?.

24) Haga un análisis cualitativo de las ondas estacionarias indicando cómo se producen, qué las caracteriza y qué las diferencia de las ondas viajeras. En una cuerda se forma una onda estacionaria. Explique por qué no se transmite energía a lo largo de la cuerda.

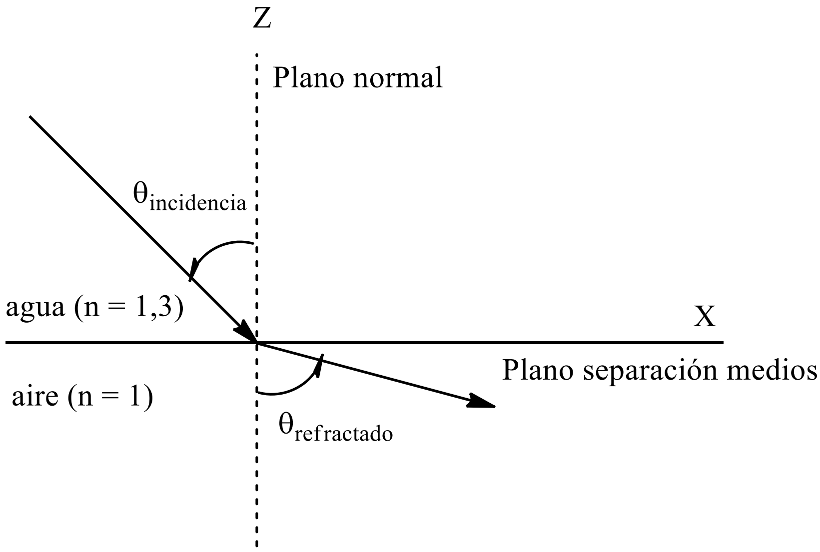
25) Un rayo de luz pasa del agua al aire con un ángulo de incidencia de 30º respecto a la normal. Dibuje en un esquema los rayos incidente y refractado y calcule el ángulo de refracción. ¿Cuál debería ser el ángulo de incidencia para que el rayo refractado fuera paralelo a la superficie de separación agua-aire?. Dato: índice de refracción del agua respecto al aire n = 1,3. [40,5º en el agua; 50,3º el ángulo de incidencia]

Solución:

$$\frac{\mathrm{sen}\,\theta_{i(agua)}}{c_{agua}} = \frac{\mathrm{sen}\,\theta_{t(aire)}}{c_{aire}} \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{sen}\,\theta_{i(agua)}}{\mathrm{sen}\,\theta_{t(aire)}} = \frac{c_{agua}}{c_{aire}} = \frac{\frac{c_0}{c_{aire}}}{\frac{c_0}{c_{agua}}} = \frac{n_{aire}}{n_{agua}} = \frac{1}{1{,}3}$$

$$\mathrm{sen}\,\theta_{t(aire)} = 1{,}3\cdot\mathrm{sen}\,\theta_{i(agua)} = 1{,}3\cdot\mathrm{sen}\,30^{o} = 0{,}65 \;\Rightarrow\; \theta_{t(aire)} = 40{,}5^{o}$$

$$\mathrm{sen}\,\theta_{i(agua)} = \mathrm{sen}\,\theta_{t(aire)}\cdot\frac{1}{1{,}3} = \mathrm{sen}\,90^{o}\cdot\frac{1}{1{,}3} = 1\times\frac{1}{1{,}3} = 0{,}769 \;\Rightarrow\; \theta_{i(agua)} \geq 50{,}3^{o}$$



26) Una onda plana viene dada por la ecuación: $y(x,t)=2\cos(100t-5x)$ SI. a) Haga un análisis razonado del movimiento ondulatorio representado por la ecuación anterior y explique si es longitudinal o transversal y cuál es su sentido de propagación; b) calcule la frecuencia, el período, la longitud de onda y el número de onda, así como el módulo, dirección y sentido de la velocidad de propagación de la onda. [a) onda transversal de amplitud 2 m y con sentido de propagación +X; b) la frecuencia 15,9 Hz, el período 0,0628 s, longitud de onda 1,26 m y el número de onda 0,79 m^{-1}, la velocidad de la onda +20 m/s]

Solución:

La fase de la onda en cada punto e instante dados es: $\phi = \text{cte.} = \omega t - kx$.

$$y(x,t)=2\cos(100t-5x)\,\text{SI}=A\cos(\omega t-kx)$$

$$\phi=(\omega t-kx)=\text{cte}\quad\left\{c=\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega t-\phi}{k}\right)=+\frac{\omega}{k}=\frac{100}{5}=+20\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right\}$$

$$y(x,t)=2\cos(100t-5x)\,\text{SI}$$

$$y=A\cos(\omega t-kx)\quad\{A=2\,\text{m}\}\begin{Bmatrix}\omega=100\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}\\ T=0{,}0628\,\text{s}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}k=5\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}\\ \lambda=1{,}26\,\text{m}\end{Bmatrix}\left\{c=\frac{\omega}{k}=20\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right\}$$

27) Un haz de luz de $5{,}0\cdot10^4$ Hz viaja por el interior de un diamante. a) Determine la velocidad de propagación y la longitud de onda de esa luz en el diamante. b) Si la luz emerge del diamante al aire con un ángulo de refracción de 10º, dibuje la trayectoria del haz y determine el ángulo de incidencia. Datos: c = $3\cdot10^8$ m/s; $n_{diamante}$ = 2,42. [a) $1{,}24\cdot10^8$ m/s; 2.480 m; b) 4,11º]

Solución:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_{i(\text{diamante})}}{c_{\text{diamante}}}=\frac{\operatorname{sen}\theta_{t(\text{aire})}}{c_{\text{aire}}}\quad\Rightarrow\quad\frac{\operatorname{sen}\theta_{i(\text{diamante})}}{\operatorname{sen}\theta_{t(\text{aire})}}=\frac{c_{\text{diamante}}}{c_{\text{aire}}}=\frac{\frac{c_0}{c_{\text{aire}}}}{\frac{c_0}{c_{\text{diamante}}}}=\frac{n_{\text{aire}}}{n_{\text{diamante}}}=\frac{1}{2,42}$$

$$n_{\text{diamante}}=\frac{c_0}{c_{\text{diamante}}}\Rightarrow\quad c_{\text{diamante}}=\frac{c_0}{n_{\text{diamante}}}=\frac{3\cdot10^8\ \frac{m}{s}}{2,42}=1,24\cdot10^8\ \tfrac{m}{s}$$

$$\lambda_{\text{diamante}}=\frac{c_{\text{diamante}}}{\nu}=\frac{1,24\cdot10^8\ \frac{m}{s}}{5\cdot10^4\ s^{-1}}=2.480\,m$$

$$\operatorname{sen}\theta_{i(\text{diamante})}=\operatorname{sen}\theta_{t(\text{aire})}\cdot\frac{1}{2,42}=\operatorname{sen}10^o\cdot\frac{1}{2,42}=0,071755\quad\Rightarrow\quad\theta_{i(\text{diamante})}=4,11^o$$

28) Un rayo de luz monocromática incide en una de las caras de una lámina de vidrio, de caras planas y paralelas, con un ángulo de incidencia de 30º. La lámina está situada en el aire, su espesor es de 5 cm y su índice de refracción 1,5. a) Dibuje el camino seguido por el rayo y calcule el ángulo que forma el rayo que emerge de la lámina con la normal. b) Calcule la longitud recorrida por el rayo en el interior de la lámina. [a) 30º; b) 5,3 cm]

Solución:

Cara primera de la lámina de vidrio:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_{i(\text{aire})}}{\operatorname{sen}\theta_{t(\text{vidrio})}}=\frac{c_{\text{aire}}}{c_{\text{vidrio}}}=\frac{\frac{c_0}{c_{\text{vidrio}}}}{\frac{c_0}{c_{\text{aire}}}}=\frac{n_{\text{vidrio}}}{n_{\text{aire}}}=\frac{1,5}{1}$$

$$\operatorname{sen}\theta_{t(\text{vidrio})}=\frac{\operatorname{sen}\theta_{i(\text{aire})}}{1,5}=\frac{\operatorname{sen}30^o}{1,5}\quad\Rightarrow\quad\theta_{t(\text{vidrio})}=19,47^o$$

Cara interior de la lámina de vidrio:

$$\operatorname{sen}\theta_{t(\text{vidrio})}=\operatorname{sen}\theta_{i(\text{vidrio})}=\frac{\operatorname{sen}30^o}{1,5}\quad\Rightarrow\quad\theta_{i(\text{vidrio})}=\theta_{t(\text{vidrio})}=19,47^o$$

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_{i(\text{vidrio})}}{\operatorname{sen}\theta_{t(\text{aire})}}=\frac{c_{\text{vidrio}}}{c_{\text{aire}}}=\frac{\frac{c_0}{c_{\text{aire}}}}{\frac{c_0}{c_{\text{vidrio}}}}=\frac{n_{\text{aire}}}{n_{\text{vidrio}}}=\frac{1}{1,5}$$

$$\operatorname{sen}\theta_{t(\text{aire})}=\operatorname{sen}\theta_{i(\text{vidrio})}\cdot1,5=\frac{\operatorname{sen}30^o}{1,5}\cdot1,5=\operatorname{sen}30^o\quad\Rightarrow\quad\theta_{t(\text{aire})}=30^o$$

$$\cos\theta_{t(\text{vidrio})}=\frac{d}{l}\quad\Rightarrow\quad l=\frac{d}{\cos\theta_{t(\text{vidrio})}}=\frac{0,05\,m}{\cos19,47^o{}_{t(\text{vidrio})}}=0,0530\,m$$

29) La ecuación de una onda es: y(x,t) = 0,16·cos(0,8x)·cos(100t) (SI). a) Con la ayuda de un dibujo, explique las características de dicha onda. b) Determine la amplitud, longitud de onda, frecuencia y velocidad de propagación de las ondas cuya superposición podría generar dicha onda.

30) El láser de un reproductor de CD genera luz con una longitud de onda de 780 nm medida en el aire. a) Explique qué características de la luz cambian al penetrar en el plástico del CD y calcule la velocidad de la luz en él. b) Si la luz láser incide en el plástico con un ángulo de 30º, determine el ángulo de refracción. Datos: $c = 3\cdot10^8$ m/s; $n_{aire} = 1$; $n_{plástico} = 1,55$. [a) $1,9355\cdot10^8$ m/s; b) 18,82º]

Solución:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_{i(\text{aire})}}{c_{\text{aire}}}=\frac{\operatorname{sen}\theta_{t(\text{plástico})}}{c_{\text{plástico}}}\Rightarrow\quad\frac{\operatorname{sen}\theta_{i(\text{aire})}}{\operatorname{sen}\theta_{t(\text{plástico})}}=\frac{c_{\text{aire}}}{c_{\text{plástico}}}=\frac{\frac{c_0}{c_{\text{plástico}}}}{\frac{c_0}{c_{\text{aire}}}}=\frac{n_{\text{plástico}}}{n_{\text{aire}}}=\frac{1,55}{1}$$

$$n_{\text{plástico}}=\frac{c_0}{c_{\text{plástico}}}\Rightarrow\quad c_{\text{plástico}}=\frac{c_0}{n_{\text{plástico}}}=\frac{3\cdot10^8\ \frac{m}{s}}{1,55}=1,9355\cdot10^8\ \frac{m}{s}$$

$$c_0=\lambda_{\text{aire}}\cdot\nu_{\text{aire}}\quad\begin{cases}\nu_{\text{aire}}=\dfrac{c_0}{\lambda_{\text{aire}}}=\dfrac{3\cdot10^8\ \frac{m}{s}}{780\cdot10^{-9}\ m}=3,846\cdot10^{14}\ s^{-1}=\nu_{\text{plástico}}\\[2ex]\lambda_{\text{plástico}}=\dfrac{c_{\text{plástico}}}{\nu_{\text{plástico}}}=\dfrac{\frac{c_0}{n_{\text{plástico}}}}{\frac{c_0}{\lambda_{\text{aire}}}}=\dfrac{\lambda_{\text{aire}}}{n_{\text{plástico}}}=\dfrac{780\cdot10^{-9}\ m}{1,55}=5,0322\cdot10^{-7}\ m\end{cases}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_{i(\text{aire})}}{\operatorname{sen}\theta_{t(\text{plástico})}}=\frac{c_{\text{aire}}}{c_{\text{plástico}}}=\frac{\frac{c_0}{c_{\text{plástico}}}}{\frac{c_0}{c_{\text{aire}}}}=\frac{n_{\text{plástico}}}{n_{\text{aire}}}=\frac{1,55}{1}$$

$$\operatorname{sen}\theta_{t(\text{plástico})}=\frac{\operatorname{sen}\theta_{i(\text{aire})}}{1,55}=\frac{\operatorname{sen}30^{\circ}}{1,55}\quad\Rightarrow\quad\theta_{t(\text{plástico})}=18,82^{\circ}$$

31) Indique si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, razonando las respuestas: a) La velocidad de propagación de una onda armónica es proporcional a su longitud de onda. b) Cuando una onda incide en la superficie de separación de dos medios, las ondas reflejada y refractada tienen igual frecuencia e igual longitud de onda que la onda incidente.

32) a) ¿Cuál es la longitud de onda de una estación de radio que emite con una frecuencia de 100 MHz?. b) Si las ondas emitidas se propagaran por el agua, razone si tendrían la misma frecuencia y la misma longitud de onda. En el caso de que varíe alguna de estas magnitudes, determine su valor. Datos: c = $3\cdot10^8$ m s^{-1} ; $n_{agua/aire}$ = 1,3.

33) Un rayo de luz pasa de un medio a otro, e n el que se propaga a mayor velocidad. a) Indique cómo varían la longitud de onda, la frecuencia y el ángulo que forma dicho rayo con la normal a la superficie de separación, al pasar del primero al segundo medio. b) Razone si el rayo de luz pasará al segundo medio, independientemente de cuál sea el valor del ángulo de incidencia.

34) a) Razone si tres haces de luz visible de colores azul, amarillo y rojo, respectivamente: i) tienen la misma frecuencia; ii) tienen la misma longitud de onda; iii) se propagan en el vacío con la misma velocidad. ¿Cambiaría alguna de estas magnitudes al propagarse en el agua?. b) ¿Qué es la reflexión total de la luz? ¿Cuándo puede ocurrir?.

35) Un rayo de luz monocromática incide en una de las caras de una lámina de vidrio, de caras planas y paralelas, con un ángulo de incidencia de 30º. La lámina está situada en el aire, su espesor es de 5 cm y su índice de refracción 1,5. a) Dibuje el camino seguido por el rayo y calcule el ángulo que forma el rayo que emerge de la lámina con la normal. b) Calcule la longitud recorrida por el rayo en el interior de la lámina.

36) a) Explique los fenómenos de reflexión y refracción de la luz con ayuda de un esquema. b) Un haz de luz pasa del aire al agua. Razone cómo cambian su frecuencia, longitud de onda y velocidad de propagación.

37) El ángulo límite vidrio-agua es de 60º. Un rayo de luz, que se propaga por el vidrio, incide sobre la superficie de separación con un ángulo de 45º y se refracta dentro del agua. a) Explique qué es el ángulo límite y determine el índice de refracción del vidrio. b) Calcule el ángulo de refracción en el agua. Dato: n_{agua} = 1,33.

38) Un foco luminoso puntual está situado bajo la superficie de un estanque de agua. a) Un rayo de luz pasa del agua al aire con un ángulo de incidencia de 30º. Dibuje en un esquema los rayos incidente y refractado y calcule el ángulo de refracción. b) Explique qué es el ángulo límite y determine su valor para este caso. Datos: $n_{aire} = 1$; $n_{agua} = 1{,}33$.

39) Razone las respuestas a las siguientes cuestiones: a) Cuando un rayo pasa a un medio con mayor índice de refracción, ¿se acerca o se aleja de la normal?. b) ¿Qué es el ángulo límite? ¿Existe este ángulo en la situación anterior?.

40) a) Enuncie las leyes de la reflexión y de la refracción de la luz, explicando las diferencias entre ambos fenómenos. b) Un rayo de luz pasa de un medio a otro más denso. Indique cómo varían las siguientes magnitudes: amplitud, frecuencia, longitud de onda y velocidad de propagación.

41) Un haz de luz de $5\cdot10^4$ Hz viaja por el interior de un diamante. a) Determine la velocidad de propagación y la longitud de onda de esa luz en el diamante. b) Si la luz emerge del diamante al aire con un ángulo de refracción de 10º, dibuje la trayectoria del haz y determine el ángulo de incidencia. Datos: $c = 3\cdot10^8$ m s $^{-1}$; $n_{diamante} = 2{,}42$.

42) Un teléfono móvil opera con ondas electromagnéticas de frecuencia $f = 9\cdot10^8$ Hz.a) Determine la longitud de onda y el número de onda en el aire. b) Si la onda entra en un medio en el que su velocidad de propagación se reduce a 3c/4, razone qué valores tienen la frecuencia y la longitud de onda en ese medio y el índice de refracción del medio. Datos: $c = 3\cdot10^8$ m s^{-1}; $n_{aire} = 1$.

43) Una antena emite una onda de radio de $6\cdot10^7$ Hz. a) Explique las diferencias entre esa onda y una onda sonora de la misma longitud de onda y determine la frecuencia de esta última. b) La onda de radio penetra en un medio material y su velocidad se reduce a 0,75 c. Determine su frecuencia y su longitud de onda en ese medio. Datos: $c = 3\cdot10^8$ m s^{-1}; v(sonido en el aire*)* = 340 m s^{-1}.

44) Un teléfono móvil opera con ondas electromagnéticas cuya frecuencia es $1{,}2\cdot10^9$ Hz. a) Determine la longitud de onda. b) Esas ondas entran en un medio en el que la velocidad de propagación se reduce a 5c/6. Determine el índice de refracción del medio y la frecuencia y la longitud de onda en dicho medio. Datos: $c = 3\cdot10^8$ m s^{-1}; $n_{aire} = 1$; $v_{sonido} = 340$ m s^{-1}.

45) Una onda electromagnética tiene en el vacío una longitud de onda de $5\cdot10^{-7}$ m. a) Explique qué es una onda electromagnética y determine la frecuencia y el número de onda de la onda indicada. b) Al entrar la onda en un medio material su velocidad se reduce a 3c/4. Determine el índice de refracción del medio y la frecuencia y la longitud de onda en ese medio. Datos: $c = 3\cdot10^8$ m s^{-1}.

46) Un radar emite una onda de radio de $6\cdot10^7$ Hz. a) Explique las diferencias entre esa onda y una onda sonora de la misma longitud de onda y determine la frecuencia de esta última. b) La onda emitida por el radar tarda $3\cdot10^{-6}$ s en volver al detector después de reflejarse en un obstáculo. Calcule la distancia entre el obstáculo y el radar. Datos: $c = 3\cdot10^8$ m s^{-1} ; $v_{sonido} = 340$ m s^{-1}.

Preguntas de teoría de Vibraciones y Ondas

1. Indique si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, razonando las respuestas: a) Si la aceleración de una partícula es proporcional a su desplazamiento respecto de un punto y de sentido opuesto, el movimiento de la partícula es armónico simple. b) En un movimiento armónico simple la amplitud y la frecuencia aumentan si aumenta la energía.

2. a) Enuncie y explique, utilizando los esquemas adecuados, las leyes de la reflexión y refracción de la luz. b) Un rayo láser pasa de un medio a otro, de menor índice de refracción. Explique si el ángulo de refracción es mayor o menor que el de incidencia ¿Podría existir reflexión total?

3. a) ¿Qué se entiende por refracción de la luz? Explique que es el ángulo límite y, utilizando un diagrama de rayos, indique cómo se determina. b) Una fibra óptica es un hilo transparente a lo largo del cual puede propagarse la luz, sin salir al exterior. Explique por qué la luz “no se escapa” a través de las paredes de la fibra.

4. Indique si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, razonando las respuestas: a) La velocidad de propagación de una onda armónica es proporcional a su longitud de onda. b) Cuando una onda incide en la superficie de separación de dos medios, las ondas reflejada y refractada tienen igual frecuencia e igual longitud de onda que la onda incidente.

5. a) Defina: onda, velocidad de propagación, longitud de onda, frecuencia, amplitud, elongación y fase. b) Dos ondas viajeras se propagan por un mismo medio y la frecuencia de una es doble que la de la otra. Explique la relación entre las diferentes magnitudes de ambas ondas.

6. a) Represente gráficamente las energías cinética, potencial y mecánica de una partícula que vibra con movimiento armónico simple. b) ¿Se duplicaría la energía mecánica de la partícula si se duplicase la frecuencia del movimiento armónico simple? Razone la respuesta.

7. a) Explique los fenómenos de reflexión y refracción de una onda. b) ¿Tienen igual frecuencia, longitud de onda y velocidad de propagación la onda incidente, la reflejada y la refractada?

8. a) Explique en qué consiste la reflexión total. ¿En qué condiciones se produce? b) ¿Por qué la profundidad real de una piscina llena de agua es mayor que la profundidad aparente?

9. a) Explique las diferencias entre ondas transversales y ondas longitudinales y ponga algún ejemplo. b) ¿Qué es una onda estacionaria? Comente sus características.

10. a) ¿Qué características debe tener una fuerza para que al actuar sobre un cuerpo le produzca un movimiento armónico simple? b) Represente gráficamente el movimiento armónico simple de una partícula dado por: $y = 5 \cos(10t + \pi/2)$ (S I) y otro movimiento armónico que tenga una amplitud doble y una frecuencia mitad que el anterior.

11. a) Explique los fenómenos de reflexión y refracción de la luz. b) Describa, con la ayuda de un esquema, qué ocurre cuando un haz de luz monocromática incide con un cierto ángulo sobre una superficie de separación de dos medios de distinto índice de refracción. Si el segundo medio tiene menor índice de refracción que el primero, ¿podemos garantizar que se producirá siempre refracción?

12. a) Explique las diferencias entre ondas longitudinales y ondas transversales y ponga algún ejemplo de onda de cada tipo. b) ¿Qué es una onda estacionaria? Comente sus características.

13. Dos fenómenos físicos vienen descritos por las expresiones siguientes: $y = A\cdot \text{sen}(b\cdot t)$; $y = A\cdot \text{sen}(b\cdot t - c\cdot x)$; en las que "x" e "y" son coordenadas espaciales y "t" el tiempo. a) Explique de qué tipo de fenómeno físico se trata en cada caso e identifique los parámetros que aparecen en dichas expresiones, indicando sus respectivas unidades. b) ¿Qué diferencia señalaría respecto de la periodicidad de ambos fenómenos?

14. Considere la ecuación de onda: $y(x, t) = A \,\text{sen}(b\,t - c\,x)$. a) ¿Qué representan los coeficientes A, b y c? ¿Cuáles son sus unidades?. b) ¿Qué cambios supondría que la función fuera "cos" en lugar de "sen"? ¿Y que el signo dentro del paréntesis fuera "+" y no "-"?

15. a) ¿Cuáles son las longitudes de onda posibles de las ondas estacionarias producidas en una cuerda tensa, de longitud L, sujeta por ambos extremos? Razone la respuesta. b) ¿En qué lugares de la cuerda se encuentran los puntos de amplitud máxima? ¿Y los de amplitud nula? Razone la respuesta.

16. a) Explique, con ayuda de un esquema, los fenómenos de refracción de la luz y de reflexión total. b) El índice de refracción de las sustancias disminuye al aumentar la longitud de onda. ¿Se desviará más la luz roja o la azul cuando los rayos inciden en el agua desde el aire? Razone la respuesta.

17. Por una cuerda se propaga un movimiento ondulatorio caracterizado por la función de onda: $y = A \,\text{sen}\, 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)$. Razone a qué distancia se encuentran dos puntos de esa cuerda si: a) La diferencia de fase entre ellos es de π radianes. b) Alcanzan la máxima elongación con un retardo de un cuarto de periodo.

18. a) ¿Por qué la profundidad real de una piscina llena de agua es siempre mayor que la profundidad aparente? b) Explique qué es el ángulo límite y bajo qué condiciones puede observarse.

19. a) ¿Qué es una onda armónica o sinusoidal? ¿De cuáles de sus características depende la energía que transporta? b) ¿Qué diferencias existen entre el movimiento de una onda a través de un medio y el movimiento de las partículas del propio medio?

20. Razone las respuestas a las siguientes cuestiones: a) ¿En qué consiste la refracción de ondas? Enuncie sus leyes. b) ¿Qué características de la onda varían al pasar de un medio a otro?

21. La ecuación de una onda armónica en una cuerda tensa es: $y(x,t) = A\cdot \text{sen}\ (?\cdot t - k\cdot x)$. a) Indique el significado de las magnitudes que aparecen en dicha expresión. b) Escriba la ecuación de otra onda que se propague en la misma cuerda en sentido opuesto, de amplitud mitad y frecuencia doble que la anterior.

22. Un rayo de luz pasa de un medio a otro, en el que se propaga a mayor velocidad. a) Indique cómo varían la longitud de onda, la frecuencia y el ángulo que forma dicho rayo con la normal a la superficie de separación, al pasar del primero al segundo medio. b) Razone si el rayo de luz pasará al segundo medio, independientemente de cuál sea el valor del ángulo de incidencia.

23. Una partícula describe un movimiento armónico simple de amplitud A y frecuencia f. a) Represente en un gráfico la posición, la velocidad y la aceleración de la partícula en función del tiempo y comente sus características. b) Explique cómo varían la amplitud y la frecuencia del movimiento y la energía mecánica de la partícula al duplicar el periodo de oscilación.

24. a) Comente la siguiente afirmación: “las ondas estacionarias no son ondas propiamente dichas” y razone si una onda estacionaria transporta energía. b) Al arrojar una piedra a un estanque con agua y al pulsar la cuerda de una guitarra se producen fenómenos ondulatorios. Razone qué tipo de onda se ha producido en cada caso y comente las diferencias entre ambas.

25. a) Razone si tres haces de luz visible de colores azul, amarillo y rojo, respectivamente: i) tienen la misma frecuencia; ii) tienen la misma longitud de onda; iii) se propagan en el vacío con la misma velocidad. ¿Cambiaría alguna de estas magnitudes al propagarse en el agua?. b) ¿Qué es la reflexión total de la luz? ¿Cuándo puede ocurrir?

26. a) Explique los fenómenos de reflexión y refracción de la luz con ayuda de un esquema. b) Un haz de luz pasa del aire al agua. Razone cómo cambian su frecuencia, longitud de onda y velocidad de propagación.

27. a) Demuestre que en un oscilador armónico simple la aceleración es proporcional al desplazamiento pero de sentido contrario. b) Una partícula realiza un movimiento armónico simple sobre el eje OX y en el instante inicial pasa por la posición de equilibrio. Escriba la ecuación del movimiento y razone cuándo es máxima la aceleración.

28. Razone las respuestas a las siguientes cuestiones: a) Cuando un rayo pasa a un medio con mayor índice de refracción, ¿se acerca o se aleja de la normal?. b) ¿Qué es el ángulo límite? ¿Existe este ángulo en la situación anterior?

29. Un movimiento armónico simple viene descrito por la ecuación $x\ (t) = A\ \text{sen}\ (\omega t + \delta)$. a) Escriba la velocidad y la aceleración de la partícula en función del tiempo y explique cómo varían a lo largo de una oscilación. b) Deduzca las expresiones de las energías cinética y potencial en función de la posición y explique sus cambios a lo largo de la oscilación.

30. a) Explique qué es una onda armónica y escriba su ecuación. b) Una onda armónica es doblemente periódica. ¿Qué significado tiene esa afirmación? Haga esquemas para representar ambas periodicidades y coméntelos.

31. a) Enuncie las leyes de la reflexión y de la refracción de la luz, explicando las diferencias entre ambos fenómenos. b) Un rayo de luz pasa de un medio a otro más denso. Indique cómo varían las siguientes magnitudes: amplitud, frecuencia, longitud de onda y velocidad de propagación.

32. a) Defina qué es una onda estacionaria e indique cómo se produce y cuáles son sus características. Haga un esquema de una onda estacionaria y coméntelo. b) Explique por qué, cuando en una guitarra se acorta la longitud de una cuerda, el sonido resulta más agudo.

33. a) Explique qué son ondas estacionarias y describa sus características. b) En una cuerda se ha generado una onda estacionaria. Explique por qué no se propaga energía a través de la cuerda.

34. a) Describa el movimiento armónico simple y comente sus características cinemáticas y dinámicas. b) Una masa oscila verticalmente suspendida de un muelle. Describa los tipos de energía que intervienen y sus respectivas transformaciones.

35. a) Explique los fenómenos de reflexión y refracción de una onda en la superficie que separa dos medios. b) Razone qué magnitudes de una onda cambian cuando pasa de un medio a otro.

36. a) Describa los fenómenos de reflexión y de refracción de la luz. b) Explique las condiciones que deben cumplirse entre dos medios para que el rayo incidente no se refracte.

37. a) Qué mide el índice de refracción de un medio? ¿Cómo cambian la frecuencia y la longitud de onda de un rayo láser al pasar del aire a una lámina de vidrio?. b) Explique la dispersión de la luz por un prisma.

38. a) Enuncie las leyes de la reflexión y de la refracción de la luz. Explique qué es el ángulo límite e indique para qué condiciones puede definirse. b) ¿Tienen igual frecuencia, longitud de onda y velocidad de propagación el rayo incidente y el refractado? Razone la respuesta.

39. a) Escriba la ecuación de un movimiento armónico simple y explique el significado físico de cada una de las variables que aparecen en ella. b) ¿Cómo cambiarían las variables de dicha ecuación si se duplicaran el período de movimiento y la energía mecánica de la partícula.?

40. a) Razone qué características deben tener dos ondas, que se propagan por una cuerda tensa con sus dos extremos fijos, para que su superposición origine una onda estacionaria. b) Explique qué valores de la longitud de onda pueden darse si la longitud de la cuerda es L.

41. a) Explique qué magnitudes describen las periodicidad espacial y temporal de una onda e indique si están relacionadas entre sí. b) Razone qué tipo de movimiento efectúan los puntos de una cuerda por la que se propaga una onda armónica.

42. a) Explique los fenómenos de reflexión y refracción de la luz. b) ¿Tienen igual frecuencia, longitud de onda y velocidad de propagación la luz incidente, reflejada y refractada? Razone sus respuestas.

43. La ecuación de una onda armónica es: $y(x,t) = A \text{ sen } (bt - cx)$. a) Indique las características de dicha onda y lo que representa cada uno de los parámetros A, b y c. b) ¿Cómo cambiarían las características de la onda si el signo negativo fuera positivo?

44. a) Explique qué es un movimiento armónico simple y cuáles son sus características dinámicas. b) Razone cómo cambiarían la amplitud y la frecuencia de un movimiento armónico simple si: i) aumentara la energía mecánica, ii) disminuyera la masa oscilante.

45. a) Explique qué es el ángulo límite y qué condiciones deben cumplirse para que pueda observarse. b) Razone por qué la profundidad real de una piscina llena de agua es mayor que la profundidad aparente.

46. a) Explique qué son ondas longitudinales y transversales. b) ¿Qué diferencias señalaría entre las características de las ondas luminosas y sonoras?

47. a) Explique el fenómeno de dispersión de la luz. b) ¿Qué es el índice de refracción de un medio? Razone cómo cambian la frecuencia y la longitud de onda de una luz láser al pasar del aire al interior de una lámina de vidrio.

48. a) Escriba la ecuación de una onda estacionaria en una cuerda con sus dos extremos fijos, y explique el significado físico de cada una de los parámetros que aparecen en ella. b) Explique qué puntos de la cuerda del apartado anterior permanecen en reposo. ¿Qué puntos oscilan con amplitud máxima?

49. a) Explique los fenómenos de reflexión y refracción de una onda en la superficie de separación entre dos medios. b) ¿Son iguales la frecuencia, velocidad de propagación y longitud de onda de la luz incidente que las de la luz reflejada y transmitida? Razone la respuesta.

50. a) Escriba la ecuación de un movimiento armónico simple y explique el significado de cada una de las variables que aparecen en ella. b) ¿Cómo cambiarían las variables de dicha ecuación si el periodo del movimiento fuera doble? ¿Y si la energía mecánica fuera doble?

51. a) Describa con ayuda de un esquema los fenómenos de reflexión y refracción de la luz y enuncie sus leyes. b) Explique en qué consiste la reflexión total y en qué condiciones se produce.

52. a) Movimiento armónico simple; características cinemáticas y dinámicas. b) Un bloque unido a un resorte efectúa un movimiento armónico simple sobre una superficie horizontal. Razone cómo cambiarían las características del movimiento al depositar sobre el bloque otro de igual masa.

53. a) Movimiento armónico simple; características cinemáticas y dinámicas. b) Razone si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: En un movimiento armónico simple la amplitud y la frecuencia aumentan si aumenta la energía mecánica.

54. a) Explique en qué consiste el fenómeno de reflexión total e indique en qué condiciones se puede producir. b) Razone con la ayuda de un esquema por qué al sumergir una varilla recta en agua su imagen parece quebrada.

55. a) Explique los fenómenos de reflexión y refracción de una onda en la superficie de separación de dos medios. b) Razone si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: “las ondas reflejada y refractada tienen igual frecuencia, igual longitud de onda y diferente amplitud que la onda incidente”.

56. a) Defina el concepto de onda e indique las características de las ondas longitudinales y transversales. Ponga un ejemplo de cada tipo. b) ¿Qué es una onda polarizada? Comente la siguiente frase: “las ondas sonoras no se pueden polarizar”.

57. a) Escriba la ecuación de un movimiento armónico simple y explique cómo varían con el tiempo la velocidad y la aceleración de la partícula. b) Comente la siguiente afirmación: “si la aceleración de una partícula es proporcional a su desplazamiento respecto de un punto y de sentido opuesto, su movimiento es armónico simple”.

58. a) Energía mecánica de un oscilador armónico simple. Utilice una representación gráfica para explicar la variación de las energías cinética, potencial y mecánica en función de la posición. b) Dos partículas de masas m_1 y m_2 ($m_2 > m_1$), unidas a resortes de la misma constante k, describen movimientos armónicos simples de igual amplitud. ¿Cuál de las dos partículas tiene mayor energía cinética al pasar por su posición de equilibrio? ¿Cuál de las dos pasa por esa posición a mayor velocidad? Razone las respuestas.