5. «Ondas»

5.1 Movimiento oscilatorio: el movimiento vibratorio armónico simple

Una partícula posee movimiento oscilatorio o vibratorio cuando se mueve periódicamente alrededor de una posición de equilibrio. Son ejemplos de movimiento oscilatorio: a) un péndulo simple, que consiste en una masa balanceándose en el extremo de una varilla rígida; b) una masa sujeta a una pared a través de un muelle poco rígido; c) un circuito eléctrico, una carga q moviéndose a través de una inductancia L conectada a un condensador C; d) los átomos en un sólido y en una molécula están vibrando respecto de los otros átomos; e) los electrones en una antena, radiando o recibiendo están en oscilación rápida.

Para entender los fenómenos ondulatorios, relacionados con el sonido y la luz, es necesario conocer el movimiento vibratorio. Magnitudes importantes del movimiento oscilatorio:

- **Frecuencia**: *el número de oscilaciones que son completadas cada segundo*. Completar una oscilación es volver a la misma posición o estado que tenía. El símbolo ν se usa para la frecuencia y su unidad es el hertz (Hz). Donde 1 hertz = 1 Hz = 1 oscilación por segundo.
- **Período**: *el tiempo necesario para una oscilación completa*. El símbolo es T, y está relacionado con la frecuencia del mismo: $T = \nu^{-1}$.

Cualquier movimiento que se repite en intervalos determinados se llama **movimiento periódico** o **movimiento armónico**. Existe un movimiento que se repite de una forma particular y se llama **movimiento armónico simple**. Si el movimiento periódico es una función sinusoidal del tiempo y el **desplazamiento** de la partícula, desde el origen, viene dado como una función del tiempo del tipo: $\mathbf{x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_0)}$, en la que el desplazamiento depende sólo de la variable t, los demás parámetros ($\mathbf{A, \omega, \phi_0}$) son constantes. El **movimiento armónico simple** significa que el movimiento periódico es una función sinusoidal del tiempo.

De todos los movimientos oscilatorios, el más importante es el llamado **movimiento armónico simple**. Además de ser el movimiento más sencillo de analizar y describir, constituye la mejor descripción de muchas oscilaciones que se encuentran en la naturaleza. Aunque no todos los movimientos oscilatorios son armónicos.

La **amplitud** del movimiento es la cantidad **A** que es una constante positiva, cuyo valor depende de cómo ha empezado el movimiento. La función coseno varía entre los límites ±1, así que el desplazamiento x varía entre los límites ±A.

La **fase del movimiento** es una cantidad variable con el tiempo, $\boldsymbol{\phi = (\omega \cdot t + \phi_0)}$, y $\boldsymbol{\phi_0}$ es la constante de fase. El valor de $\boldsymbol{\phi_0}$ depende del desplazamiento y la velocidad de la partícula en el tiempo inicial $t = 0$.

La magnitud ω se llama la frecuencia angular del movimiento, su unidad es 1 rad/s. Para interpretar la constante $\omega = 2\pi\nu$ consideramos que el valor del desplazamiento x(t) debe volver a su valor inicial después de un tiempo llamado período T, siendo x(t) = x(t + T). Demostración:

$$\left.\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega t + \phi_0) \\ x(t+T) = A\cos[\omega(t+T)+\phi_0] \end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} x(t) = x(t+T) \\ \cos(\omega t + \phi_0) = \cos[\omega(t+T)+\phi_0] \\ (\omega t + \phi_0) = [\omega(t+T)+\phi_0] \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \omega T = 2\pi \\ \omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \end{cases}$$

<u>**Deducción de la ecuación del movimiento**</u>:

La ecuación del movimiento de un sistema perturbado se obtiene del balance dinámico entre las fuerzas actuantes sobre el sistema. La segunda ley de Newton para aprender qué fuerza puede actuar sobre la partícula, para que tenga esa aceleración y la fuerza restauradora, que es igual al producto de una constante de proporcionalidad, k, que es llamada la rigidez por el desplazamiento desde la posición de equilibrio. La constante k es la fuerza restauradora por unidad de longitud.

$$\boxed{F_{\text{sobre-partícula}} = F_{\text{restauradora(ley-Hooke)}}} \qquad \begin{cases} F_{\text{sobre-partícula}} = ma = m\dfrac{dv}{dt} = m\dfrac{d^2x}{dt^2} \\ F_{\text{restauradora(ley-Hooke)}} = -kx \end{cases}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0} \quad \left\{\omega^2 = \frac{k}{m} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}\right\}$$

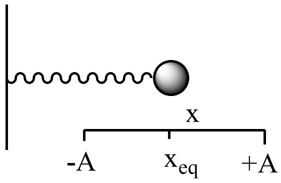
<u>**Soluciones**</u> de la ecuación anterior para x: 1) $\boldsymbol{x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_0)}$; 2) $\boldsymbol{x = A \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t + \phi_0)}$.

Demostración:

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0) \quad \left.\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\omega A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi_0) \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi_0) = -\omega^2 x \end{cases}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi_0) \quad \left.\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \omega A\cos(\omega t + \phi_0) \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi_0) = -\omega^2 x \end{cases}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

<u>**5.2 Cinemática del movimiento armónico simple (MAS)**</u>



$$x(t) = A\cdot\cos(\omega\cdot t + \phi_0)$$
$$v = -A\cdot\omega\cdot\text{sen}(\omega\cdot t + \phi_0)$$
$$a = -A\cdot\omega^2\cdot\cos(\omega\cdot t + \phi_0) = -\omega^2\cdot x$$

La **posición** de la partícula: $\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \phi_0)}$

La **velocidad** de la partícula: $v = \frac{dx}{dt} = -A\omega\,\text{sen}(\omega t + \phi_0) = -A\omega\cos\left[(\omega t + \phi_0) - \frac{1}{2}\pi\right]$

$$\begin{cases} v = -A\omega\,\text{sen}(\omega t + \phi_0) = -A\omega\cos\left[(\omega t + \phi_0) - \frac{1}{2}\pi\right] \\ \cos\left[(\omega t + \phi_0) - \frac{1}{2}\pi\right] = \cos(\omega t + \phi_0)\cos\frac{1}{2}\pi + \text{sen}(\omega t + \phi_0)\,\text{sen}\,\frac{1}{2}\pi = \text{sen}(\omega t + \phi_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2 = A^2\omega^2\left(1 - \cos^2(\omega t + \phi_0)\right) = A^2\omega^2\left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right) = A^2\omega^2 - \omega^2 x^2 = \omega^2\left(A^2 - x^2\right) \\ v = -\omega A\sqrt{1 - \cos^2(\omega t + \phi_0)} = -\omega\sqrt{A^2 - x^2} \end{cases}$$

La **aceleración** de la partícula: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi_0) = -\omega^2 x$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = A\cos(\omega t + \phi_0) \\ v = \frac{dx}{dt} = -A\omega\,\text{sen}(\omega t + \phi_0) = -\omega\sqrt{A^2 - x^2} = -A\omega\cos\left[(\omega t + \phi_0) - \frac{1}{2}\pi\right] \\ a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} - -A\omega^2\cos(\omega t + \phi_0) = -\omega^2 x \end{array}}$$

<u>**Representación gráfica de un M.A.S**</u>**: x = 0,05·cos (π·t)**; v = -0,05·π·sen (π·t)

$$\left.\begin{cases} x = A\cdot\cos(\omega t + \phi_0) = 0{,}05\cdot\cos(\pi t) \\ v = -A\omega\,\text{sen}(\omega t + \phi_0) = -0{,}05\pi\cdot\text{sen}(\pi t) \end{cases}\right\} \quad \left\{\omega = \pi\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{2\pi}{T}\right\} \quad T = \frac{2\pi}{\pi} = 2\,\text{s}$$

$$x_{0(t=0)} = 0{,}05\cdot\cos 0 = 0{,}05\,\text{m} \Rightarrow v_{0(t=0)} = -0{,}05\pi\cdot\text{sen}\,0 = 0\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$x_{\left(t=\frac{1}{4}T\right)} = 0{,}05\cdot\cos\left(\pi\tfrac{1}{4}2\right) = 0{,}05\cdot\cos\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) = 0\,\text{m} \Rightarrow v_{\left(t=\frac{1}{4}T\right)} = -0{,}05\pi\cdot\text{sen}\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) = -0{,}05\pi\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$x_{\left(t=\frac{1}{2}T\right)} = 0{,}05\cdot\cos\left(\pi\tfrac{1}{2}2\right) = 0{,}05\cdot\cos(\pi) = -0{,}05\,\text{m} \Rightarrow v_{\left(t=\frac{1}{2}T\right)} = -0{,}05\pi\cdot\text{sen}(\pi) = 0\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$x_{\left(t=\frac{3}{4}T\right)} = 0{,}05\cdot\cos\left(\pi\tfrac{3}{4}2\right) = 0{,}05\cdot\cos\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = 0\,\text{m} \Rightarrow v_{\left(t=\frac{3}{4}T\right)} = -0{,}05\pi\cdot\text{sen}\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = +0{,}05\pi\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$x_{(t=T)} = 0{,}05\cdot\cos(\pi 2) = 0{,}05\cdot\cos(2\pi) = 0{,}05\,\text{m} \Rightarrow v_{\left(t=\frac{3}{4}T\right)} = -0{,}05\pi\cdot\text{sen}(2\pi) = 0\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$x = A \cdot \cos(\omega t + \phi_0) = 0,05 \cdot \cos(\pi t) \quad \left\{ \omega = \pi \tfrac{rad}{s} = \frac{2\pi}{T} \right\} \quad T = \frac{2\pi}{\pi} = 2\,s$$

$$x_{máximo} = +0,05 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos(\pi t) = +1 \\ \pi t = n2\pi \quad (n = 0,1,2,3\ldots) \end{array} \right\} \quad t = 2n \quad \left\{ \begin{array}{l} t_{n=0} = 0\,s \\ t_{n=1} = 2\,s \end{array} \right.$$

$$x_{mínimo} = -0,05 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos(\pi t) = -1 \\ \pi t = (2n+1)\pi \end{array} \right\} \quad t = 2n+1 \quad \left\{ \begin{array}{l} t_{n=0} = 1\,s \\ t_{n=1} = 3\,s \end{array} \right.$$

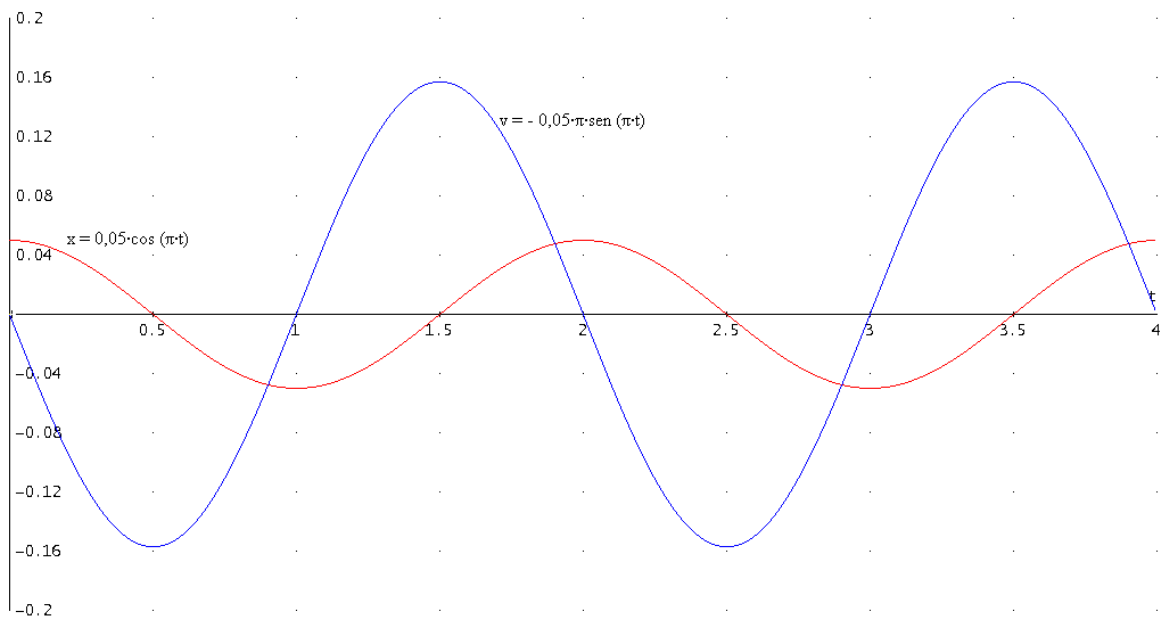
$$x = 0 = x_0 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos(\pi t) = 0 \\ \pi t = (2n+1)\frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \quad t = \frac{2n+1}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} t_{n=0} = 0,5\,s \\ t_{n=1} = 1,5\,s \\ t_{n=2} = 2,5\,s \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = A \cdot \cos(\omega t + \phi_0) \\ v = -A \cdot \omega \cdot \mathrm{sen}(\omega t + \phi_0) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x = 0,05 \cdot \cos(\pi t) \\ v = -0,05\pi \cdot \mathrm{sen}(\pi t) \end{array} \right\} \quad \omega = \pi = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad T = 2\,s$$

$$v = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{sen}(\pi t) = 0 \\ \pi t = n\pi \end{array} \right\} \quad t = n \quad \left\{ \begin{array}{l} t_{n=0} = 0\,s \\ t_{n=1} = 1\,s \end{array} \right.$$

$$v_{máx} = +0,05\pi \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{sen}(\pi t) = -1 \\ \pi t = \frac{3}{2}\pi + 2n\pi \end{array} \right\} \quad t = \frac{3}{2} + 2n \quad \left\{ \begin{array}{l} t_{n=0} = 1,5\,s \\ t_{n=1} = 3,5\,s \end{array} \right.$$

$$v_{mín} = -0,05\pi \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{sen}(\pi t) = +1 \\ \pi t = \frac{1}{2}\pi + 2n\pi \end{array} \right\} \quad t = \frac{1}{2} + 2n \quad \left\{ \begin{array}{l} t_{n=0} = 0,5\,s \\ t_{n=1} = 2,5\,s \end{array} \right.$$



Al comparar las curvas posición-tiempo y velocidad-tiempo, la de la velocidad está retrasada en $\frac{1}{2}\pi$ rad respecto a la de la posición. Este retraso corresponde a la cuarta parte del período, $\frac{1}{4}T$, respecto de la curva del desplazamiento. La diferencia de fase entre posición y desplazamiento es ½π:

$$\Delta\phi = \phi_{x(\text{posición})} - \phi_{v(\text{velocidad})} = (\omega t + \phi_0) - \left[(\omega t + \phi_0) - \tfrac{1}{2}\pi\right] = \tfrac{1}{2}\pi$$

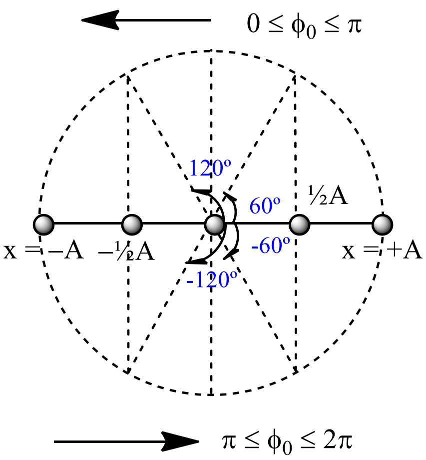
$$\Delta\phi = \omega\Delta t \quad \Rightarrow \quad \Delta t = t_{x(\text{posición})} - t_{v(\text{velocidad})} = \frac{\Delta\phi}{\omega} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\frac{2\pi}{T}} = \tfrac{1}{4}T$$

La **aceleración** de la partícula: $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left[-\omega A\,\text{sen}(\omega t + \phi_0)\right] = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi_0) = -\omega^2 x$

La fase del movimiento o fase de la oscilación: $\phi = (\omega \cdot t + \phi_0)$

El valor de ϕ_0 es la **constante de fase**, especifica las condiciones iniciales t = 0, del oscilador.

$$\left\{\begin{array}{l} x = A\cos(\omega t + \phi_0) \\ v = -A\omega\,\text{sen}(\omega t + \phi_0) \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} x_{0(t=0)} = A\cos\phi_0 \\ v_{0(t=0)} = -A\omega\,\text{sen}\,\phi_0 \end{array}\right.$$



$x = A \cdot \cos(\omega t + \phi_0)$
$v = -A \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega t + \phi_0)$

Dependiendo del punto inicial x_0 así será ϕ_0:
$x_0 = +A$ entonces $\phi_0 = 0$
$x_0 = -A$ entonces $\phi_0 = \pi$
$x_0 = 0$ hacia $+A$ entonces $\phi_0 = -\pi/2 = 3/2\cdot\pi$
$x_0 = 0$ hacia $-A$ entonces $\phi_0 = +\pi/2$
$x_0 = +A/2$ hacia $+A$ entonces $\phi_0 = -\pi/3$
$x_0 = +A/2$ hacia $-A$ entonces $\phi_0 = +\pi/3$
$x_0 = -A/2$ hacia $+A$ entonces $\phi_0 = -2\pi/3$
$x_0 = -A/2$ hacia $-A$ entonces $\phi_0 = +2\pi/3$

Los valores distintos de la constante de fase ϕ_0 corresponden a diferentes puntos de partida del movimiento:

$$x_0 = +A \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = A\cos(\omega t + \phi_0) \\ +A = A\cos\phi_0 \\ \cos\phi_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = 0 \end{array}\right\} \boxed{x = A\cos(\omega t + 0)}$$

$$x_0 = -A \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = A\cos(\omega t + \phi_0) \\ -A = A\cos\phi_0 \\ \cos\phi_0 = -1 \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = \pi \end{array}\right\} \boxed{x = A\cos(\omega t + \pi)}$$

$$x_0 = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = A\cos(\omega t + \phi_0) \\ 0 = A\cos\phi_0 \\ \cos\phi_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = \pm\tfrac{1}{2}\pi \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} v = -A\omega\,\text{sen}(\omega t + \phi_0) \\ v_0 = -A\omega\,\text{sen}\,\phi_0 \\ v_{0(\phi_0 = +\frac{1}{2}\pi)} = -A\omega < 0 \\ v_{0(\phi_0 = -\frac{1}{2}\pi)} = +A\omega > 0 \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{l} x_{(0\to+A)} = A\cos(\omega t - \tfrac{1}{2}\pi) \\ x_{(0\to-A)} = A\cos(\omega t + \tfrac{1}{2}\pi) \end{array}}$$

$$x_0 = +\frac{A}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = A\cos(\omega t + \phi_0) \\ +\frac{A}{2} = A\cos\phi_0 \\ \cos\phi_0 = 0,5 \\ \phi_0 = \pm 60^\circ = \pm\frac{2\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{3} \end{cases} \begin{cases} v = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0) \\ v_0 = -A\omega \operatorname{sen}\phi_0 \\ v_{0(\phi_0 = +\frac{\pi}{3})} < 0 \\ v_{0(\phi_0 = -\frac{\pi}{3})} > 0 \end{cases} \boxed{\begin{matrix} x_{(0\to+A)} = A\cos(\omega t - \frac{1}{3}\pi) \\ x_{(0\to-A)} = A\cos(\omega t + \frac{1}{3}\pi) \end{matrix}}$$

$$x_0 = -\frac{A}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = A\cos(\omega t + \phi_0) \\ -\frac{A}{2} = A\cos\phi_0 \\ \cos\phi_0 = -0,5 \\ \phi_0 = \pm 120^\circ = \pm\frac{2\pi}{3} \end{cases} \begin{cases} v = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0) \\ v_0 = -A\omega \operatorname{sen}\phi_0 \\ v_{0(\phi_0 = +\frac{2\pi}{3})} < 0 \\ v_{0(\phi_0 = -\frac{2\pi}{3})} > 0 \end{cases} \boxed{\begin{matrix} x_{(0\to+A)} = A\cos(\omega t - \frac{2}{3}\pi) \\ x_{(0\to-A)} = A\cos(\omega t + \frac{2}{3}\pi) \end{matrix}}$$

Si la partícula parte inicialmente de $x_{0(t=0)} = +A$, la constante de fase es $\phi_0 = 0$. Siendo la ecuación de la posición: $x = A\cdot\cos(\omega\cdot t)$, y la velocidad inicial es $v_0 = 0$.

Si la partícula parte inicialmente de $x_{0(t=0)} = -A$, la constante de fase es $\phi_0 = \pi$. Siendo la ecuación de la posición: $x = A\cdot\cos(\omega\cdot t + \pi)$, y la velocidad inicial es $v_0 = 0$.

Si la partícula parte desde un punto entre +A hasta –A la constante de fase ϕ_0 varía entre 0 y π radianes: $0 \le \phi_0 \le \pi$. Y si la partícula parte desde –A hasta +A la constante de fase varía entre $-\pi$ y 0 radianes: $-\pi \le \phi_0 \le 0$.

Ecuaciones

$$\boxed{x = A\cos\phi = A\cos(\omega t + \phi_0)} \quad \Rightarrow \quad v = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0)$$

$$\begin{cases} x = +A \quad \Rightarrow \quad \cos(\omega t + \phi_0) = +1 \\ \omega t + \phi_0 = 2n\pi\,(n = 0,1,\ldots) \Rightarrow t = \dfrac{2n\pi - \phi_0}{\omega} \\ \{\phi_{0(t=0;n=0)} = 0\} \quad v_0 = -A\omega \operatorname{sen}\phi_0 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = -A \quad \Rightarrow \quad \cos(\omega t + \phi_0) = -1 \\ \omega t + \phi_0 = (2n+1)\pi \Rightarrow t = \dfrac{(2n+1)\pi - \phi_0}{\omega} \\ \{\phi_{0(t=0;n=0)} = \pi\} \quad v_0 = -A\omega \operatorname{sen}\phi_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = +\frac{A}{2} \quad \{\cos(\omega t + \phi_0) = +0,5\} \\ \omega t + \phi_0 = \frac{1}{6}\pi \quad \{v_0 = -A\omega \operatorname{sen}\phi_0 < 0 \\ \omega t + \phi_0 = -\frac{1}{6}\pi = \frac{11}{6}\pi \quad \{v_0 = -A\omega \operatorname{sen}\phi_0 > 0 \end{cases} \begin{cases} x = -\frac{A}{2} \quad \{\cos(\omega t + \phi_0) = -0,5\} \\ \omega t + \phi_0 = \frac{2}{3}\pi \quad \{v_0 = -A\omega \operatorname{sen}\phi_0 < 0 \\ \omega t + \phi_0 = -\frac{2}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi \quad \{v_0 = -A\omega \operatorname{sen}\phi_0 > 0 \end{cases}$$

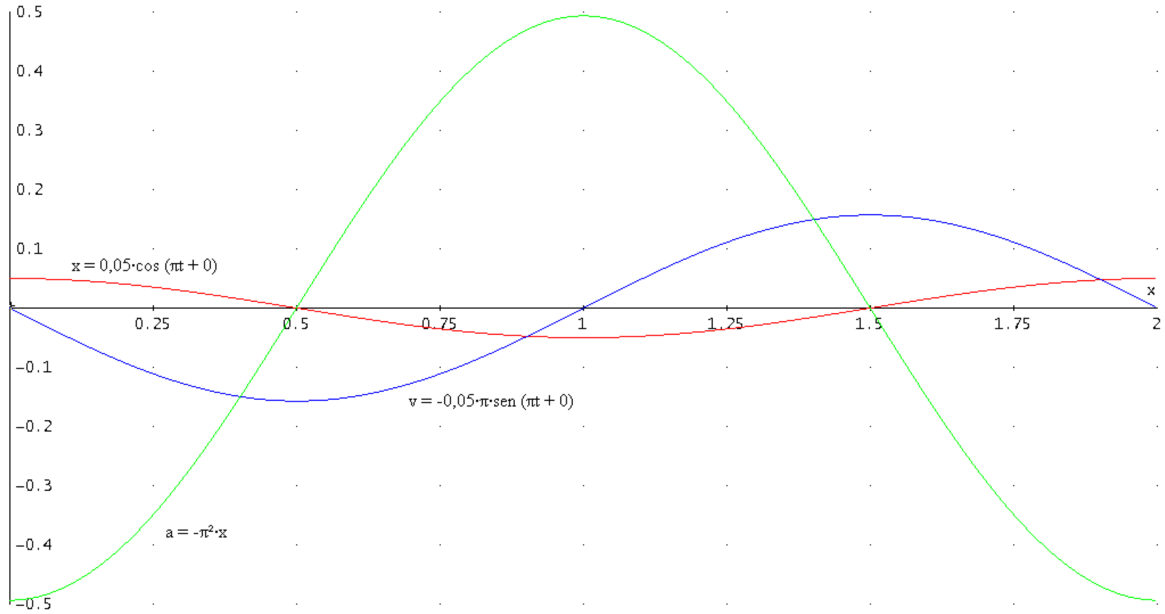
$$\begin{cases} x_0 = 0 \quad \{\cos(\omega t + \phi_0) = 0\} \\ \omega t + \phi_0 = (2n+1)\dfrac{\pi}{2} \quad \left\{ t = \dfrac{(2n+1)\frac{\pi}{2} - \phi_0}{\omega} \right. \end{cases} \begin{cases} \phi_{0(t=0;n=0)} = \dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad v_0 = -A\omega \operatorname{sen}\phi_0 = -A\omega \\ \phi_{0(t=0;n=1)} = \dfrac{3\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad v_0 = -A\omega \operatorname{sen}\phi_0 = +A\omega \end{cases}$$

Ejemplo de movimiento armónico simple de las características siguientes: el desplazamiento máximo de A = 0,05 m y el período de T = 2 s, siendo la constante de fase $\phi_0 = 0$ ($x_0 = A$)

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0) = 0{,}05\cdot\cos(\pi t + 0) \quad \{x_0 = 0{,}05\,\text{m} \;\Rightarrow \phi_0 = 0\}$$
$$v = -0{,}05\pi\,\text{sen}(\pi t + 0)$$
$$a = -\omega^2 x = -\pi^2 0{,}5\cos(\pi t + 0)$$

$$\left.\begin{cases} x = +A \\ \cos(\omega t) = +1 \end{cases}\right\} \omega t = 2n\pi\,(n = 0,1,\ldots) \;\Rightarrow\; t = \frac{2n\pi}{\omega} = \frac{2n\pi}{\frac{2\pi}{T}} = nT$$
$$\left.\begin{cases} x = 0 \\ \cos(\omega t) = 0 \end{cases}\right\} \omega t = (2n+1)\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; t = \frac{(2n+1)\frac{\pi}{2}}{\omega} = \frac{(2n+1)\frac{\pi}{2}}{\frac{2\pi}{T}} = (2n+1)\frac{T}{4}$$
$$\left.\begin{cases} x = -A \\ \cos(\omega t) = -1 \end{cases}\right\} \omega t = (2n+1)\pi \;\Rightarrow\; t = \frac{(2n+1)\pi}{\omega} = \frac{(2n+1)\pi}{\frac{2\pi}{T}} = (2n+1)\frac{T}{2}$$

La representación en el eje de ordenadas de los valores de la posición x(m), de la velocidad v(m/s) y de la aceleración a(m/s^2), y en el eje de abscisas el tiempo (s), nos da las siguientes gráficas:



<u>5.3 Dinámica del movimiento armónico simple</u>

Conocida la aceleración de una partícula y cómo varía con el tiempo, podemos usar la segunda ley de Newton para aprender qué fuerza puede actuar sobre la partícula, para que tenga esa aceleración. La fuerza restauradora es igual al producto de una constante, k, por el desplazamiento desde la posición de equilibrio. La constante k es la fuerza restauradora por unidad de longitud.

$$\boxed{F_{\text{sobre-partícula}} = F_{\text{restauradora(ley-Hooke)}}} \quad \left\{\begin{matrix} ma = -kx \\ m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx \end{matrix}\right\} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \equiv \left\{\frac{\frac{N}{m}}{kg} = \frac{\frac{kg\cdot\frac{m}{s^2}}{m}}{kg} = s^{-2}\right\} \;\Rightarrow\; \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

<u>**Las soluciones**</u> de la ecuación anterior para x:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0 \qquad \begin{Bmatrix} x=A\cos(\omega t+\phi_0) \\ x=A\,\mathrm{sen}(\omega t+\phi_0) \end{Bmatrix} \qquad \begin{cases} \omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}=\dfrac{2\pi}{T}=2\pi\nu \\ T=\dfrac{1}{\nu}=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \end{cases}$$

El movimiento armónico simple es el movimiento ejecutado por una partícula de masa m sometida a una fuerza $F = -k\cdot(x - x_0)$, que es proporcional al desplazamiento de la partícula pero opuesta en signo. Cuando el desplazamiento es positivo la fuerza apunta en sentido contrario al desplazamiento, y cuando el desplazamiento es negativo la fuerza apunta en sentido contrario al mismo. Por lo que la fuerza está apuntando siempre hacia el origen x_0, que es el punto de equilibrio. La fuerza es central y atractiva. La constante k se llama constante elástica. Representa la fuerza por unidad de distancia requerida para desplazar la partícula.

El péndulo

Un movimiento de oscilación es el péndulo. Una masa m unida a una cuerda de longitud L que puede oscilar libremente. La posición del péndulo se puede describir por el arco de longitud s, que es cero cuando el péndulo está en la vertical. Los ángulos y el arco son positivos cuando el péndulo está a la derecha del centro y negativos cuando está a la izquierda.

Sobre la masa actúan dos fuerzas: la tensión T y el peso P. Dividimos las fuerzas en componentes tangencial, paralela al movimiento, y componentes radial paralela a la cuerda.

La segunda ley de Newton para la componente tangencial, paralela al movimiento, es

$$F_{t(\text{neta})}=-mg\,\mathrm{sen}\,\theta=ma_t \qquad \left\{a_t=\frac{d^2s}{dt^2}=-g\,\mathrm{sen}\,\theta\right\}$$

El ángulo está relacionado por $\theta = s/L$. Esta es la ecuación del movimiento de oscilación del péndulo. La función seno hace la ecuación más complicada que la ecuación del movimiento de un muelle oscilando.

Si hacemos la restricción de que el péndulo oscile para pequeños ángulos de menos de 10º entonces $\mathrm{sen}\,\theta \approx \theta$ (en radianes)

$$F_{t(\text{neta})}=-mg\,\mathrm{sen}\,\theta\approx-mg\theta=-mg\frac{s}{L}=ma_t \qquad \left\{a_t=\frac{d^2s}{dt^2}=-\frac{g}{L}s\right\}$$

$$\begin{Bmatrix} ma=-kx \\ m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-kx \end{Bmatrix} \quad \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0 \;\Rightarrow\; \frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0 \;\Rightarrow \omega^2=\frac{k}{m} \;\Rightarrow\; \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{2\pi}{T}=2\pi\nu$$

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-\frac{g}{L}s \;\Rightarrow\; \frac{d^2s}{dt^2}+\frac{g}{L}s=0 \;\Rightarrow \omega^2=\frac{g}{L} \;\Rightarrow\; \omega=\sqrt{\frac{g}{L}}=\frac{2\pi}{T} \quad \boxed{T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

<u>5.4 Energía de la partícula en el movimiento armónico simple</u>

Energía cinética: $E_c=\tfrac{1}{2}mv^2=\tfrac{1}{2}m\omega^2A^2\,\mathrm{sen}^2(\omega t+\phi_0)=\tfrac{1}{2}m\omega^2(A^2-x^2)$

$$\begin{Bmatrix} x=A\cos(\omega t+\phi_0) \\ v=-A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t+\phi_0) \end{Bmatrix} \begin{cases} E_c=\tfrac{1}{2}mv^2=\tfrac{1}{2}m\left[-\omega A\,\mathrm{sen}(\omega t+\phi_0)\right]^2=\tfrac{1}{2}m\omega^2A^2\,\mathrm{sen}^2(\omega t+\phi_0) \\ E_c=\tfrac{1}{2}m\omega^2A^2\left[1-\cos^2(\omega t+\phi_0)\right]=\tfrac{1}{2}m\omega^2(A^2-x^2) \end{cases}$$

La energía cinética alcanza su valor máximo en el punto de equilibrio, que es el punto medio ($x = x_{eq} = 0$), y su valor es cero en los extremos de la oscilación ($x = \pm A$).

Energía potencial: $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2(\omega t + \phi_0)$

$$\left\{\begin{array}{l} W_{por} = \int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_i^f -kx\cdot dx = -\left[\frac{1}{2}kx^2\right]_i^f = -\left(\frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2\right) = -\Delta E_{p(muelle)} \\ E_{p(m)} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \end{array}\right\}$$

La energía potencial tiene el valor mínimo en el punto de equilibrio ($x = 0$) y se incrementa hasta el valor máximo, cuando la partícula alcanza los puntos extremos de la oscilación ($x = \pm x_m$).

Energía total: La energía total es constante porque la fuerza es conservativa.

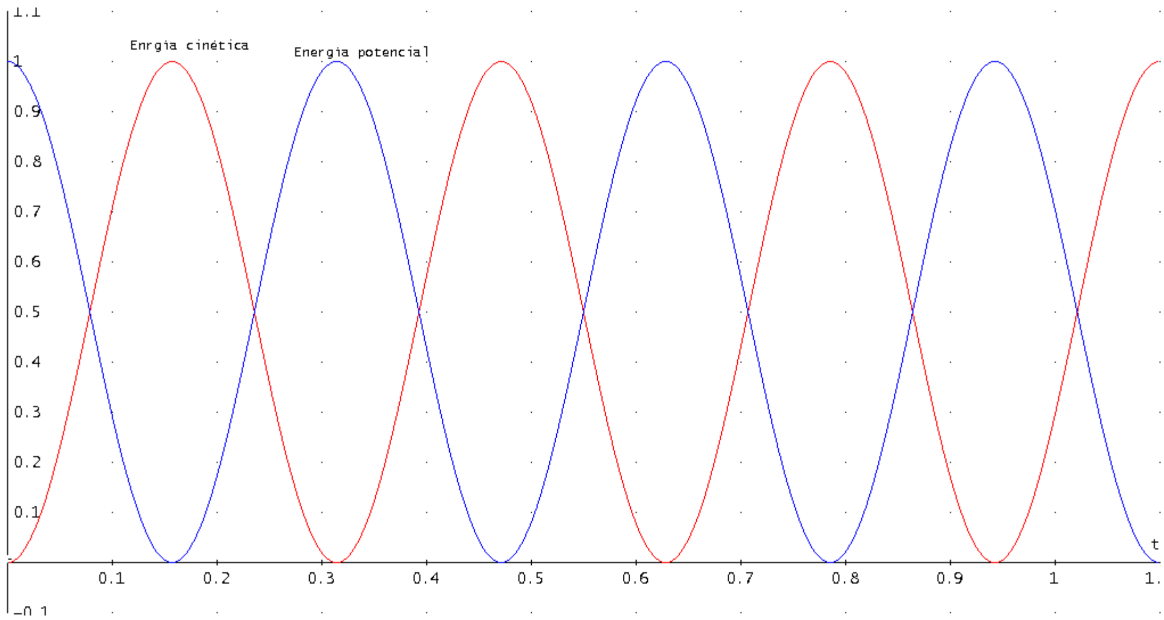
$$E_{total} = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$$

Ejemplo: La partícula de masa 0,5 kg con MAS de amplitud 0,2 m y frecuencia angular de 10 rad/s tiene una energía total de 1 J. El movimiento parte de $x_0 = A$: $\mathbf{x = 0,2\cdot\cos(10t)}$; $\mathbf{v = -2\cdot sen(10t)}$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right) = \frac{1}{2}\times 0,5\,kg\times\left(10\,\tfrac{rad}{s}\right)^2\times\left[0,2^2 - \left(0,2\cos(10t)\right)^2\right]$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \frac{1}{2}\times 0,5\,kg\times\left(10\,\tfrac{rad}{s}\right)^2\times\left(0,2\cos(10t)\right)^2$$

$$E_{total} = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}\times 0,5\,kg\times\left(10\,\tfrac{rad}{s}\right)^2\times(0,2\,m)^2 = 1\,J$$



Oscilaciones verticales

Si una esfera de masa m se cuelga de un muelle vertical, de constante k, se observa que la posición de equilibrio de la masa no está donde el muelle estaba antes de colocar la masa. La posición de equilibrio de la masa m está donde esta no se mueve y el muelle tiene un alargamiento $\Delta l = l - l_0$.

Para determinar el valor de Δl se hace mediante un **problema de equilibrio estático** en el que la fuerza del muelle hacia arriba se equilibra con la fuerza peso de la masa hacia abajo. La componente de la fuerza del muelle sobre el eje y viene dada por la ley de Hooke:

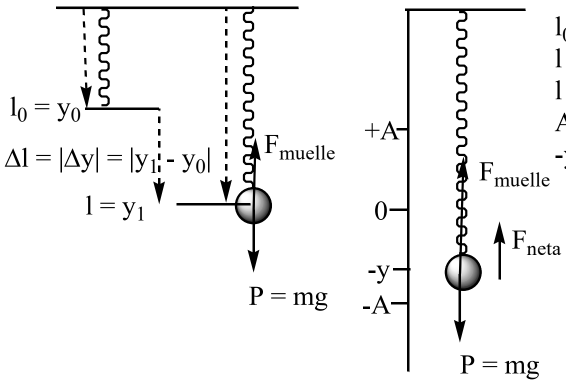
$F_{muelle(y)} = -k \cdot \Delta y = +k \cdot \Delta l$

La distancia Δl es simplemente un número positivo, el desplazamiento $\Delta y = y_1 - y_0$ es negativo, como la masa se ha desplazado hacia abajo: $\mathbf{\Delta y = y_1 - y_0 = -\Delta l}$.

La **primera ley de Newton** para la masa en equilibrio es: $\boxed{\mathbf{F_{neta(y)} = F_{muelle(y)} + F_{gravedad(y)} = 0}}$

$\mathbf{F_{neta(y)} = F_{muelle(y)} + F_{gravedad(y)} = -k \cdot (y_1 - y_0) - mg = = +k \cdot \Delta l - mg = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\Delta l = mg/k}}$.

Esta es la distancia **Δl** que se alarga el muelle cuando la masa se cuelga y permanece en reposo.



$l_0 = y_0$ es la longitud del muelle sin estirar
$l = y_1$ es la longitud del muelle con la masa en reposo
$l = y_1$ define la posición de equilibrio y = 0
A es la amplitud de las oscilaciones alrededor de y = 0
-y es la posición de la masa en un instante

Ahora analizamos si la masa oscila alrededor de la posición de equilibrio, que es la fijada por la masa cuando se cuelga y permanece en reposo.

Si oscila desde A hasta –A, colocamos el origen en la posición de equilibrio de la masa en reposo. Si la masa se mueve hacia arriba el muelle se acorta comparado con su longitud de equilibrio, pero el muelle está estirado comparado con su longitud sin estirar. Si la masa se mueve hacia abajo el muelle se estira por una cantidad $(\Delta l - \Delta y) = [-(y_1 - y_0) - (y - 0)]$, y ejerce una fuerza hacia arriba de valor: $\mathbf{F_{muelle(y)} = k \cdot (\Delta l - \Delta y)} = -k \cdot (y_1 - y_0) - k \cdot (y - 0)]$

La fuerza neta sobre la masa en este punto y es:

$\mathbf{F_{neta(y)} = F_{muelle(y)} + F_{gravedad(y)} = k \cdot (\Delta l - \Delta y) - mg = = -k \cdot (y_1 - y_0) - k \cdot (y - 0)] - mg = - k \cdot (y - 0)}$

Esta ecuación para oscilaciones verticales es exactamente la misma que para oscilaciones horizontales ($F_{neta(x)} = -k \cdot x$). Por tanto, $F_{total} = -k \cdot y$, es la ecuación de una fuerza recuperadora que cumple la ley de Hooke y da lugar a un movimiento vibratorio armónico.

El papel de la gravedad es determinar dónde está la posición de equilibrio, pero no afecta al movimiento alrededor de la posición de equilibrio. Como la fuerza neta es la misma, la segunda ley de Newton tendrá la misma solución:

$\mathbf{y(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_0)}$.

La energía en una superficie horizontal: el movimiento armónico de pulsación $\omega = (k/m)^{½}$ y alrededor de la posición de equilibrio que es la longitud l_0 del muelle. Siendo su energía total: $E_{total} = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}kA^2$

La energía en una superficie vertical: el movimiento es también armónico, de la misma pulsación $\omega = (k/m)^{1/2}$, pero con la posición de equilibrio está desplazada respecto del caso horizontal, está alargada en: $\Delta l = mg/k$. Por lo que respecto de la energía es de esperar que en vertical haya que añadirle un término de energía potencial correspondiente al alargamiento $\Delta l = l - l_0$:

$$\begin{cases} E_p = E_{p(m)} + E_{p(g)} = \frac{1}{2}kx^2 - mgy = \frac{1}{2}k\left[\Delta l + y\right]^2 - mgy = \frac{1}{2}k\left[\Delta l^2 + y^2 + 2y\Delta l\right] - mgy \\ E_p = \frac{1}{2}k\Delta l^2 + \frac{1}{2}ky^2 + ky\Delta l - mgy = \frac{1}{2}k\Delta l^2 + \frac{1}{2}ky^2 + mgy - mgy \\ E_p = E_{p(m)} + E_{p(g)} = \frac{1}{2}k\Delta l^2 + \frac{1}{2}ky^2 \end{cases}$$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - y^2\right) = \frac{1}{2}k\left(A^2 - y^2\right)$$

$$E_{total} = E_c + E_p = \frac{1}{2}k\left(A^2 - y^2\right) + \frac{1}{2}k\Delta l^2 + \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}kA^2 + \frac{1}{2}k\Delta l^2$$

Problemas de «Vibraciones»

1) Una partícula sobre un muelle oscila con un período de 0,80 s y una amplitud de 0,10 m. Al tiempo t = 0, está a 5 cm de la posición de equilibrio y moviéndose hacia –A. Determina: a) la ecuación del movimiento oscilatorio; b) la posición y la dirección del movimiento en el instante de tiempo t = 2,0 s. [a) $x = 0{,}10\cdot\cos(2{,}5\pi t + \frac{2}{3}\pi)$; b) x = +0,05 m; v = +0,68 m/s]

2) Una partícula, de masa 0,500 kg, oscila sobre un muelle y se observa que se encuentra en el punto x = 0,15 m en el tiempo inicial t = 0. Alcanza el desplazamiento máximo de 0,25 m en el tiempo t = 0,300 s. Determina: a) la ecuación del movimiento y dibuja la gráfica posición-tiempo; b) el instante, durante el primer ciclo, en que la masa pasa por el punto x = 0,20 m. [a) $x = 0{,}25\cdot\cos(\pi t - 0{,}3\pi)$; b) 0,1·s; 0,5·s]

3) Una partícula de 0,5 kg que describe un movimiento armónico simple de frecuencia $\frac{5}{\pi}$ Hz, tiene inicialmente una energía cinética de 0,2 J y una energía potencial de 0,8 J. Calcule: a) la posición y velocidad inicial, así como la amplitud de la oscilación y la velocidad máxima. b) Haga un análisis de las transformaciones de energía que tienen lugar en un ciclo completo. c) ¿Cuál sería el desplazamiento en el instante en que las energías cinética y potencial son iguales?. [a) x = 0,179 m; v = -0,892 m/s; A = 0,20 m; 2,0 m/s; c) x = 0,1414 m]

4) Un cuerpo realiza un movimiento vibratorio armónico simple. a) Escriba la ecuación del movimiento si la aceleración máxima es $5\cdot\pi^2$ cm/s^2, el período de las oscilaciones 2 s y la elongación del cuerpo al iniciarse el movimiento 2,5 cm y siendo la velocidad negativa. b) Represente gráficamente la elongación y la velocidad en función del tiempo y comente la gráfica. [a) $x = 5\cdot\cos(\pi\cdot t + \pi/3)$ cm; b) $v = -5\cdot\pi\cdot\text{sen}(\pi\cdot t + \pi/3)$ cm/s]

5) Una masa de 200 g cuelga de un muelle colocado verticalmente de k = 10 N/m. La masa se estira hacia abajo hasta un punto donde el muelle está a 30 cm de su longitud sin estirar y sin la masa. En esa posición estirada se suelta. Determina: a) la distancia de la posición de equilibrio; b) la amplitud de las oscilaciones; c) la posición de la masa a los 3 s y respecto a la posición de equilibrio; d) la velocidad de la masa a los 3s. [a) Δl = 19,6 cm; b) A = 10,4 cm; c) y = 7,4 cm por encima de la posición de equilibrio; b) v = 51,6 cm/s]

6) Un objeto de 0,2 kg, unido al extremo de un resorte, efectúa oscilaciones armónicas de 0,1 π s de período y su energía cinética máxima es de 0,5 J. a) Escriba la ecuación de movimiento del objeto y determine la constante elástica del resorte. b) Explique cómo cambiarían las características del movimiento si: i) se sustituye el resorte por otro de constante elástica doble; ii) se sustituye el objeto por otro de masa doble. [a) k = 80 N/m; $x = 0{,}1118\cdot\cos(20\cdot t)$; b)]

7) a) ¿Qué características debe tener una fuerza para que al actuar sobre un cuerpo le produzca un movimiento armónico simple?. b) Represente gráficamente el movimiento armónico simple de una partícula dado por: $y = 5 \cos (10 t + \pi/2)$ (S I) y otro movimiento armónico que tenga una amplitud doble y una frecuencia mitad que el anterior.

8) Una partícula de 50 g vibra a lo largo del eje X, alejándose como máximo 10 cm a un lado y a otro de la posición de equilibrio (x = 0). El estudio de su movimiento ha revelado que existe una relación sencilla entre la aceleración y la posición que ocupa en cada instante: $a = -16\cdot\pi^2 x$. a) Escriba las expresiones de la posición y de la velocidad de la partícula en función del tiempo, sabiendo que este último se comenzó a medir cuando la partícula pasaba por la posición x = 10 cm. b) Calcule las energías cinética y potencial de la partícula cuando se encuentra a 5 cm de la posición de equilibrio. [a) $x = 0{,}10\cdot\cos (4\pi t)$; $v = -0{,}4\pi\cdot\text{sen} (4\pi t)$; b) $E_c = 0{,}0296$ J; $E_p = 0{,}00987$ J]

9) Una partícula de 0,2 kg describe un movimiento armónico simple a lo largo del eje x, de frecuencia 20 Hz. En el instante inicial la partícula pasa por el origen, moviéndose hacia la derecha, y su velocidad es máxima. En otro instante de la oscilación la energía cinética es 0,2 J y la energía potencial es 0,6 J. a) Escriba la ecuación de movimiento de la partícula y calcule su aceleración máxima. b) Explique, con ayuda de una gráfica, los cambios de energía cinética y de energía potencial durante una oscilación. [a) $x = 0{,}0005\cdot\cos (40\pi t - ½\pi)$; $a_{máx} = 8$ m/s^2]

10) Un movimiento armónico simple viene descrito por la ecuación $x(t) = A\cdot\text{sen} (\omega t + \delta)$. a) Escriba la velocidad y la aceleración de la partícula en función del tiempo y explique cómo varían a lo largo de una oscilación. b) Deduzca las expresiones de las energías cinética y potencial en función de la posición y explique sus cambios a lo largo de la oscilación.

11) Un cuerpo realiza un movimiento vibratorio armónico simple. a) Escriba la ecuación del movimiento si la aceleración máxima es $10\cdot\pi^2$ cm/s^2, el período de las oscilaciones T = 1·s y la elongación del cuerpo al iniciarse el movimiento 2 cm y la velocidad positiva. b) Represente gráficamente la elongación y la velocidad en función del tiempo y comente la gráfica. [a) $x = 2{,}5\cdot\cos (2\pi\cdot t – 0{,}20\pi)$ cm; b) $v = -5\cdot\pi\cdot\text{sen} (2\pi\cdot t – 0{,}20\pi)$ cm/s]

12) a) Describa el movimiento armónico simple y comente sus características cinemáticas y dinámicas. b) Una masa oscila verticalmente suspendida de un muelle. Describa los tipos de energía que intervienen y sus respectivas transformaciones.

13) Un cuerpo, situado sobre una superficie horizontal lisa y unido al extremo de un resorte, efectúa un movimiento armónico simple y los valores máximos de su velocidad y aceleración son 0,6 m/s y 7,2 m/s^2 respectivamente. a) Determine el período y la amplitud del movimiento. b) Razone cómo variaría la energía mecánica del cuerpo si se duplicara: i) la frecuencia; ii) la aceleración máxima. [a) T = 0,5236 s; A = 0,05 m; b) i) $E' = 4\cdot E_t$]

14) Un bloque de 0,5 kg cuelga del extremo inferior de un resorte de constante elástica k = 72 N/m. Al desplazar el bloque verticalmente hacia abajo de su posición de equilibrio comienza a oscilar, pasando por el punto de equilibrio con una velocidad de 6 m/s. a) Razone los cambios energéticos que se producen en el proceso. b) Determine la amplitud y la frecuencia de la oscilación. [a) La E_c oscila entre 0 y 9 J; la E_p oscila entre 2,45 J y 11,45 J; la E_t = 11,45 J; b) A = 0,5 m; ω = 12 rad/s]

5.5 Introducción fenomenológica al movimiento ondulatorio

El movimiento ondulatorio está relacionado con muchos fenómenos que ocurren en la Naturaleza o en la vida corriente, por ejemplo, hablar, escuchar una conversación, escuchar la radio, tocar un instrumento musical, golpear una campana, tirar una piedra a un estanque, encender una bombilla, escuchar los ruidos, transmitir una señal de televisión por el aire o por un cable de fibra óptica.

El mecanismo, por el que se propaga una onda puede ser diferente, en los distintos casos mencionados anteriormente, pero todos tienen un hecho en común, es decir, *"son situaciones físicas producidas en algún lugar del espacio, propagadas a través del espacio y detectadas posteriormente en otro punto del espacio"*. Estos tipos de procesos son todos ejemplos de **movimiento ondulatorio**.

Supongamos una propiedad física extendida sobre una cierta región del espacio. Esta propiedad puede ser una deformación en un muelle, una tensión en un sólido, la presión en un gas, un desplazamiento transversal en un muelle, un campo electromagnético. **Si las condiciones en algún lugar llegan a depender del tiempo** (dinámicas), es decir, hay una perturbación del estado físico en ese lugar. Dependiendo de la naturaleza física del sistema, la perturbación se puede propagar a través del espacio, alterando las condiciones en otros lugares. Por tanto, hablamos de una **onda** asociada con la propiedad física particular que se altera o es dependiente del tiempo.

Por ejemplo, consideremos la superficie libre de un líquido. La propiedad física, en este caso, es el desplazamiento de cada punto de la superficie relativo a la posición de equilibrio. En condiciones de equilibrio, la superficie libre de un líquido es plana y horizontal. Pero si en algún punto las condiciones en la superficie se perturban o alteran arrojando una piedra al líquido, esta perturbación se propaga en todas direcciones a lo largo de la superficie del líquido. Para determinar el mecanismo de propagación y su velocidad, debemos analizar cómo el desplazamiento de cualquier punto en la superficie del líquido afecta al resto de la superficie. Desde este análisis obtenemos las ecuaciones dinámicas del proceso. Estas ecuaciones nos llevan a obtener información cuantitativa sobre la variación en el espacio y en el tiempo de la perturbación.

En el movimiento ondulatorio, lo que se propaga es una condición física que es generada en algún lugar y se transmite a otras regiones. La gran mayoría de las ondas (sonido, cuerdas, etc.) corresponden a ciertos tipos de movimiento de átomos o moléculas a través del cual las ondas se propagan, sin embargo los átomos no se trasladan, se mueven en torno a sus posiciones de equilibrio.

Por ejemplo, en una cuerda estirada horizontalmente, al mover un extremo verticalmente se transmite la vibración horizontalmente por toda la cuerda. Por tanto, no es materia lo que se propaga, pero sí se transfiere de una región a otra el *estado de movimiento* o condición dinámica de la materia. Como la condición dinámica de un sistema se describe en términos de momento y energía, podemos decir que en un movimiento ondulatorio, *se propagan el momento y la energía*.

Definición de onda: *"Una onda es la propagación de una perturbación de un observable de un medio material o de un campo, que se propaga por el espacio ocupado por el medio material o por el campo. Se propagan el momento y la energía."*

Rasgos diferenciales de ondas y partículas:

En la Física clásica, los conceptos de **onda** y de **partícula** han sido muy importantes, en el sentido de que casi siempre podemos asociar casi todos las ramas de la física con uno u otro concepto. Siendo los dos conceptos muy diferentes. La palabra **partícula** nos sugiere una pequeña concentración de materia capaz de transmitir energía. La palabra **onda** nos sugiere, exactamente todo lo opuesto, una amplia distribución de energía llenando el espacio a través del cual pasa la onda.

Los rasgos diferenciales de las ondas y de las partículas son:

1. Respecto de su velocidad, las partículas se desplazan y las ondas no desplazan materia.

2. Respecto a las modificaciones que sufren las ondas cuando:

   a) Cambian las propiedades físicas del medio (reflexión, refracción, polarización).

   b) Se interponen en su camino diferentes tipos de obstáculos (difracción, dispersión).

   c) Varias ondas coinciden en la misma región del espacio (interferencia).

Tipos de ondas: Los tipos de ondas se clasifican en función del observable.

1. **Ondas mecánicas**: sonido, movimientos sísmicos, olas marinas, etc., la perturbación suele ser una deformación elástica ligada al incremento de una variable mecánica (desplazamiento, torsión, presión,...) que se propaga **transportando exclusivamente energía mecánica** de un punto a otro del medio. Cada partícula, del medio material, se mueve en el entorno de su posición de referencia, que es el estado no perturbado, y en su movimiento excita las partículas contiguas comunicándoles energía mecánica de oscilación. Las características principales de las ondas mecánicas son que están gobernadas por las leyes de Newton y que para existir necesitan de un medio material (aire, agua, cuerda estirada, varilla de acero).

2. **Ondas electromagnéticas:** luz visible, rayos x, microondas, ondas de radio y televisión. Las ondas electromagnéticas para existir no necesitan de un medio material. La luz que viene desde las estrellas viaja hacia nosotros a través del espacio casi vacío. Todas las ondas electromagnéticas viajan a través del vacío con la misma velocidad c, cuyo valor exacto es igual a 299.792.458 m/s.

3. **Ondas de materia**: electrones. Las ondas de materia se producen bajo ciertas condiciones experimentales, por ejemplo, un haz de partículas (electrones) pueden tener propiedades ondulatorias. Estas ondas de materia están gobernadas por las leyes de la física cuántica.

Pulsos y ondas: La onda mecánica más sencilla es posiblemente la onda transmitida a lo largo de una cuerda estirada. Si cogemos una cuerda estirada por el extremo y le damos una única sacudida arriba y abajo, un impulso pasa a lo largo de la cuerda de partícula a partícula y así obtenemos una onda en la forma de un único **pulso** viajando a lo largo de la cuerda con velocidad v. Si movemos la mano arriba y abajo en un continuo movimiento armónico simple una onda sinusoidal viaja continuamente a lo largo de la cuerda a la velocidad v.

Por tanto, cuando la fuente de la onda produce una perturbación aislada y de pequeña duración, decimos que se ha producido un **pulso**, que no es una onda por ser finito en el espacio y en el tiempo. Se denomina un *tren finito de ondas* a la onda generada por un *conjunto finito de pulsos*. Si el foco emisor engendra indefinidamente pulsos se engendra un tren indefinido de ondas. La superposición de un conjunto de infinitas perturbaciones armónicas de frecuencias infinitamente próximas se llama paquete de ondas o grupo de ondas.

5.6 Características del movimiento ondulatorio

Focos: los puntos de donde parten las perturbaciones se denominan **focos**.

Rayos: las direcciones de propagación, trayectorias de la transferencia energética, se llaman **rayos**. La perturbación Ψ que se transmite en una onda $\Psi = \Psi(\mathbf{r};t)$ es una función del vector de posición y del tiempo.

Superficie de onda y tipos: El lugar geométrico de puntos en los que simultáneamente, $t = t_0$, la perturbación tiene un valor constante $\Psi_0 = \Psi(x,y,z,t_0)$ constituye una **superficie de onda**. En el caso de una **onda plana** las superficies de onda son planos normales a los rayos, que son rectas paralelas a la dirección de propagación. En el caso de una **onda esférica** las superficies de onda son superficies esféricas normales a los rayos, que constituyen un haz de radios.

Tipos de ondas: Se distinguen dos tipos genéricos de ondas, longitudinales y transversales, que se diferencian en la dirección y forma de la perturbación respecto del rayo. Las **ondas longitudinales** realizan desplazamientos en la dirección de los rayos, y son características de los fluidos como el sonido. Las **ondas transversales** realizan desplazamientos en la dirección normal a los rayos. Son propias de los sólidos e hilos tensos, que también pueden propagar ondas longitudinales.

Independientemente de la diversidad mostrada, por su naturaleza física o por la forma analítica de la perturbación $\Psi = \Psi(\mathbf{r};t)$ todas las clases de ondas experimentan un conjunto de fenómenos característicos de su naturaleza ondulatoria tales como la **refracción, la reflexión, las interferencias y la difracción**.

Polarización: Las ondas transversales se caracterizan porque la perturbación es perpendicular a la dirección de propagación. Ahora bien, si la perturbación se produce siempre a lo largo de una única dirección, que es perpendicular a la propagación, se dice que la onda está polarizada linealmente.

Este fenómeno se pone de manifiesto en la luz. La luz es una onda electromagnética en la que el campo eléctrico oscila transversalmente, en todas las direcciones perpendiculares, a la dirección de propagación de la luz (onda no polarizada). Si la hacemos pasar a través de un material llamado polaroide, que es un filtro, sale únicamente con una dirección de vibración perpendicular (no perjudica al ojo).

Velocidad de propagación de una onda y su dependencia del medio:

La ecuación de onda:

Las propiedades del material o medio a través del cual viaja una onda determinan la velocidad de la onda. Por ejemplo, en la figura tenemos una onda transversal sobre una cuerda en la que hay dibujadas cuatro partículas.

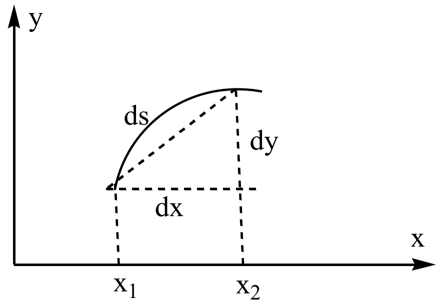
Las partículas 1, 2 y 3 se han desplazado hacia arriba, mientras las partículas 4,5 y 6 no están afectadas aún por la onda. La partícula 3 será la siguiente en desplazarse hacia arriba porque la sección de la cuerda próxima a su izquierda tirará de ella hacia arriba. Por tanto, la velocidad con la que la onda se mueve hacia la derecha depende de la rapidez con la que una partícula de la cuerda sea acelerada hacia arriba en respuesta a la fuerza neta tirante que es ejercida por sus partículas vecinas. Aplicando la segunda ley de Newton una fuerza neta fuerte supone una aceleración grande y la onda se moverá rápidamente. La capacidad de una partícula para tirar de sus vecinas depende de cuanta fuerza hay que hacer para estirar la cuerda, es decir, de la tensión (la tensión es una manifestación de las fuerzas fundamentales que existen entre los átomos). En circunstancias iguales, mientras mayor sea la tensión mayor es la fuerza tirante de las partículas sobre las vecinas y la onda viaja más rápidamente.

Además de la tensión, hay otro factor que influye en la velocidad de la onda, que está relacionado con la segunda ley de Newton, que es la inercia o masa de la partícula. En la figura anterior la masa de la partícula 3 afectará a la rapidez en ir hacia arriba por el tirón de la partícula 2. Para una fuerza tirante neta, mientras la masa sea menor provocará una aceleración mayor. Por tanto, en circunstancias iguales, una onda viaja más rápidamente sobre una cuerda cuyas partículas tengan una masa menor, o, sobre una cuerda que tenga una masa menor por unidad de longitud (densidad lineal).

Si una onda viaja a través de un medio como el agua, aire, acero o una cuerda estirada, las partículas del medio oscilan cuando pasa la onda. Para que esto ocurra, el medio debe poseer **inercia** (para almacenar energía cinética) y **elasticidad** (para almacenar energía potencial). Estas dos propiedades determinan la rapidez de la onda por el medio. La velocidad de una onda, c, que es una propiedad muy importante, depende de las características del medio.

Obtención de la ecuación de onda:

Relación entre la longitud del arco y las coordenadas:



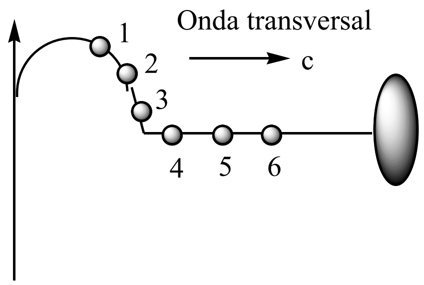
$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}\qquad \left\{\begin{array}{l} y=f(x)\\ dy=f'(x)dx \end{array}\right\}$$

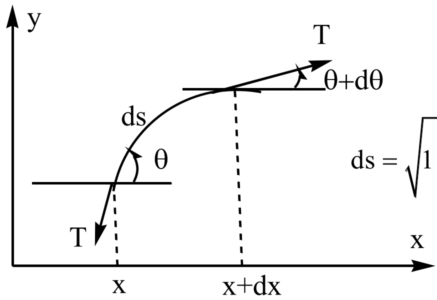
$$ds=\sqrt{(dx)^2+\left[f'(x)dx\right]^2}=\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$$

$$l=\int_{x_1}^{x_2} ds=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$$

Consideramos el desplazamiento vertical, eje Y, de una sección pequeña de una cuerda uniforme. El desplazamiento variará con el tiempo y también con el eje X, es decir, la posición a lo largo de la cuerda. Por lo que la ecuación de onda relacionará el desplazamiento y, en el eje Y, de un único oscilador, con la distancia x y el tiempo t.

Si consideramos oscilaciones verticales solamente, que la masa por unidad de longitud, ρ, o densidad lineal sea uniforme y que la tensión T a lo largo de la cuerda sea constante.





$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,dx$$

En la figura anterior las fuerzas que actúan sobre el elemento de cuerda de longitud ds son: en un extremo T formando un ángulo θ, y en el otro extremo T formando un ángulo $\theta+d\theta$. Si consideramos que ds = dx, la masa del elemento de cuerda es $m=\rho ds=\rho dx$. La fuerza perpendicular sobre el elemento dx es: $T\,\mathrm{sen}(\theta+d\theta)-T\,\mathrm{sen}\,\theta$, en la dirección positiva. Por lo que aplicando la ley de Newton: $F=m\cdot a=T\,\mathrm{sen}(\theta+d\theta)-T\,\mathrm{sen}\,\theta=\rho dx\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$.

Como el ángulo es muy pequeño consideramos la aproximación: $\mathrm{sen}\,\theta\approx\tan\theta\approx\frac{\partial y}{\partial x}$. Por lo que la fuerza será: $F=T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+dx}-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x}\right]=T\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx\right]=\rho dx\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$.

La diferencia entre los dos términos del corchete define el coeficiente diferencial de la derivada parcial $\frac{\partial y}{\partial x}$ multiplicado por el espacio dx.

Por tanto, la ecuación de movimiento del elemento pequeño dx será: $T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx=\rho dx\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$. Que desarrollando queda: $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\rho}{T}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\Rightarrow\boxed{c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$ $c^2=\frac{T}{\rho}\equiv\frac{N}{\frac{kg}{m}}=\frac{kg\frac{m}{s^2}}{\frac{kg}{m}}=\frac{m^2}{s^2}$

<u>Ejemplos de velocidad de onda en medios</u>:

1. **Cuerda**: $c=\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ siendo T la tensión en N y μ la densidad lineal en kg/m.

2. **Barra**: $c=\sqrt{\frac{Y}{\rho}}$ siendo Y la elasticidad del sólido en N/m^2 y ρ la densidad en kg/m^3. Ejemplos de elasticidad Y(Al) = 0,70; Y(Cu) = 1,25; Y(acero) = 2,0.

3. **Medio elástico y homogéneo**: En la Tierra, las ondas sísmicas P, que son longitudinales, y las S, que son transversales: $c_p=\sqrt{\frac{3\mu+\lambda}{\rho}}$; $c_s=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$; siendo μ el módulo de rigidez o cizalladura (resistencia al cambio de forma sin cambio de volumen) y λ el módulo de dilatación (resistencia al cambio de volumen sin variar la forma). Las c_s no pasan los fluidos sólo los sólidos.

4. **Fluidos**: $c_{liquidos}=\sqrt{k}=\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$; $c_{gases}=\sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}=\sqrt{\frac{\gamma RT}{P.m.}}$. Siendo k el coeficiente de compresibilidad y γ (gamma) el coeficiente adiabático.

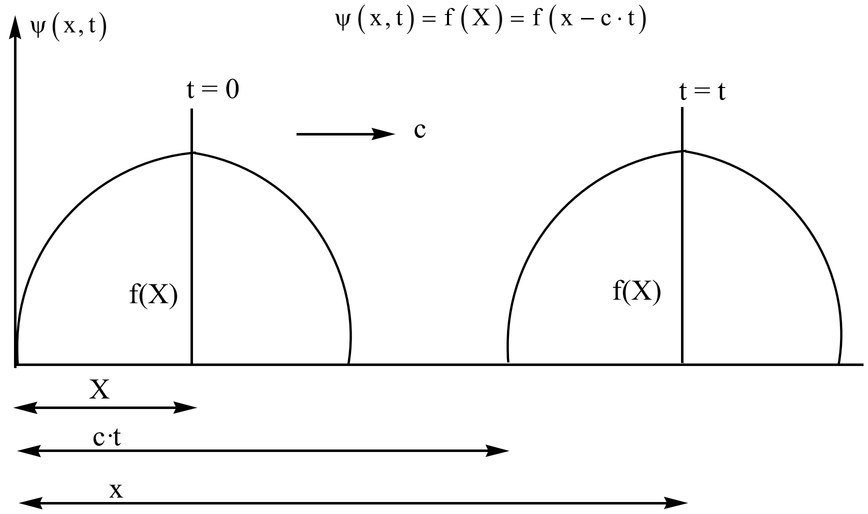
5. **Vacío** (ondas electromagnéticas): $c_0=\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}}$

5.7 Ecuación de ondas

Consideremos una onda mono-dimensional en la que la perturbación se propaga en la dirección OX, tal como ocurre en las vibraciones de la cuerda de una guitarra.

En el gráfico se esquematiza el perfil de la perturbación en dos instantes t = 0 y t = t, ubicado su origen en dos posiciones de abscisas x = 0 y x = c·t. En t = 0 y x = X la perturbación es f(X) donde esta función determina la forma del perfil de la perturbación. Este perfil se traslada a lo largo del eje +OX con velocidad c, en el instante t se verifica X = x – c·t, de donde se sigue que la perturbación será igual a f(X) = f(x – c·t).

$$\psi(x,t)=f(X)=f(x-c\cdot t)$$



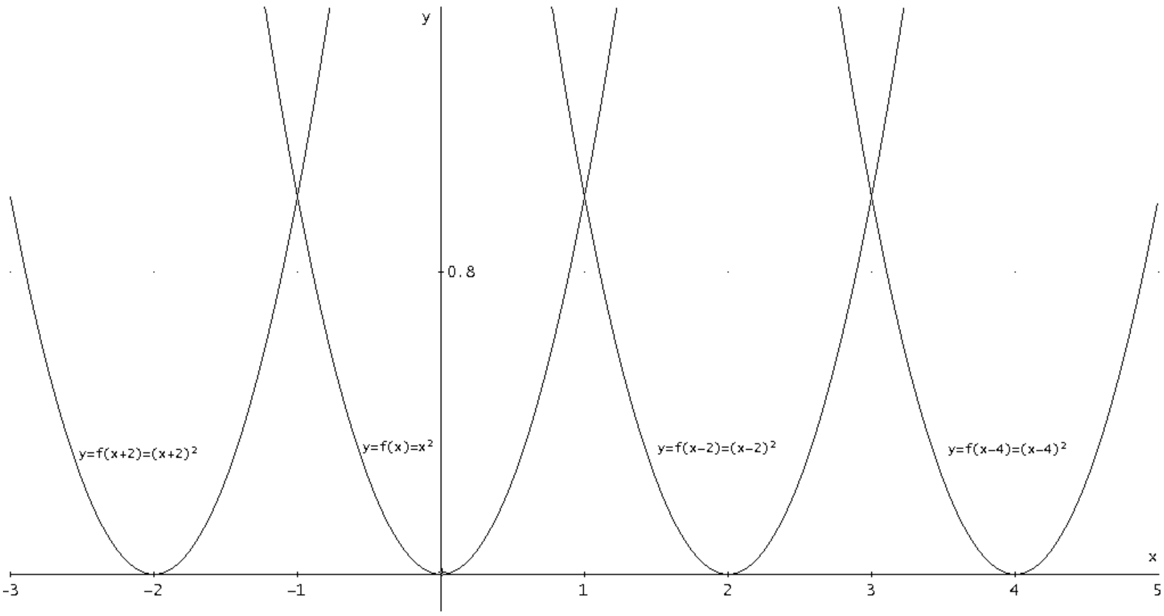
Si el perfil se trasladase a lo largo del eje -OX la perturbación será igual a f(X) = f(x + c·t).

Sean los dos Sistemas de Referencia, OXYZ y O'X'Y'Z', cuyos centros O y O' se encuentran a una distancia $R_{O'O}$ y el O' se aleja del O a una velocidad c. Una partícula situada en un punto, P(x,y,z) para el sistema

OXYZ y P'(x',y',z') para el sistema O'X'Y'Z', tiene de vectores de posición respectivos: $\vec{r}_O$ y $\vec{r}'_{O'}$. Relacionados por: $\vec{r}_O = \vec{R}_{O'O} + \vec{r}'_{O'} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}'_{O'} = \vec{r}_O - \vec{R}_{O'O} = \vec{r}_O - \vec{c}t$.

Ejemplo visual de la parábola $y = f(x) = x^2$, centrada en $x = 0$.

Y la misma parábola centrada en los puntos $x = 2$, $x = 4$ y $x = -2$. La parábola centrada en $x = 2$ se puede escribir como $y = f(x-2) = (x-2)^2$; la parábola centrada en $x = 4$ se puede escribir como $y = f(x-4) = (x-4)^2$ y la parábola centrada en $x = -2$ se puede escribir como $y = f(x+2) = (x+2)^2$.



En general, la gráfica de la función $y = f(x)$ es igual a la de $y = f(x-d)$, excepto que se ha desplazado una distancia d a la derecha, o bien $y = f(x+d)$ si se ha desplazado una distancia d a la izquierda.

5.8 Ecuación de ondas armónicas

Cuando la perturbación inicial del medio es periódica, la perturbación se repite cada cierto intervalo de tiempo: $\Psi(0; t) = \Psi(0; t + T)$. Siendo T el período, que es el tiempo que tarda en repetirse la perturbación y su inverso es la frecuencia $\nu = T^{-1}$. Para que se generen ondas periódicas el medio ha de ser poco absorbente.

Fourier demostró matemáticamente que toda función periódica $f(t) = f(t+T)$, de periodo T, puede expresarse como una serie de funciones sinusoidales o armónicas, de frecuencias múltiplos de la frecuencia fundamental:

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + ... + b_1 \operatorname{sen} \omega t + b_2 \operatorname{sen} 2\omega t + ...$$

Es por ello por lo que en el estudio de ondas periódicas podemos limitarnos a perfiles sinusoidales.

Sin embargo, en las expresiones $y = f(X) = f(x-c\cdot t)$ tenemos que las expresiones en el interior del paréntesis tienen dimensiones de una longitud y, para que la función sea seno o coseno sus argumentos deben tener las dimensiones de radianes, *por lo que (x–c·t) debe multiplicarse por un factor de unidad rad/m*, $k = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\text{rad}}{\text{m}}\right)$, siendo **el parámetro λ una longitud que se ha de definir**.

$$\begin{cases} y = f(X) = A\cos k(X) = A\cos k(X) \\ y = f(x-ct) = A\cos k(x-ct) = A\cos\dfrac{2\pi}{\lambda}(x-ct) \end{cases}$$

En el caso de una onda armónica propagándose con velocidad c a lo largo del eje OX:

$$\begin{cases} \psi(x,0) = f(X) = A\cos\dfrac{2\pi}{\lambda}(X) \\ \psi(x,t) = f(x-ct) = A\cos\dfrac{2\pi}{\lambda}(x-ct) = A\cos 2\pi\left(\dfrac{x}{\lambda}-\dfrac{ct}{\lambda}\right) \end{cases}$$

De la expresión: $\psi(x,t) = A\cdot\cos\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}x - \dfrac{2\pi c}{\lambda}t\right)$; se deduce que si x = λ el ángulo de fase aumenta en 2π rad, lo que es equivalente a una vibración completa de un oscilador. En base a ello, el parámetro λ se define como la longitud de onda, que es la separación en el espacio entre dos osciladores que tengan una diferencia de fase de 2π rad.

Si ahora consideramos la expresión: $\dfrac{2\pi c}{\lambda}t = \dfrac{2\pi}{T}t = \omega t$; nos lleva a que la velocidad c de la onda sea: $\dfrac{c}{\lambda} = \dfrac{1}{T} \;\;\Rightarrow\;\; c = \dfrac{\lambda}{T}$.

Siendo la velocidad de la onda c la relación entre longitud de onda y el período: **c = λ/T**.

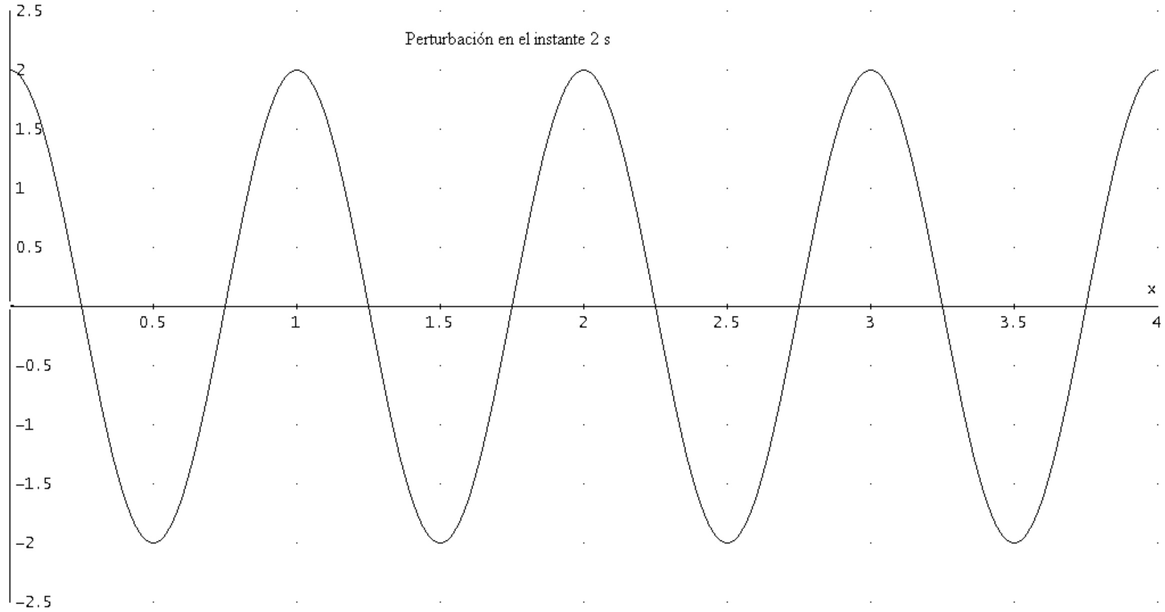
Definición de Onda Armónica: En una onda periódica, cualquiera de sus componentes sinusoidales, cuya frecuencia sea un múltiplo entero de la frecuencia fundamental. Por ello, en el estudio de las ondas periódicas podemos limitarnos a perfiles sinusoidales en una dirección, por ejemplo el eje OX:

$$\boxed{\psi(x,t) = A\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{ct}{\lambda}\right) = A\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T}\right) = A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t\right) = A\cos(kx-\omega t)}$$

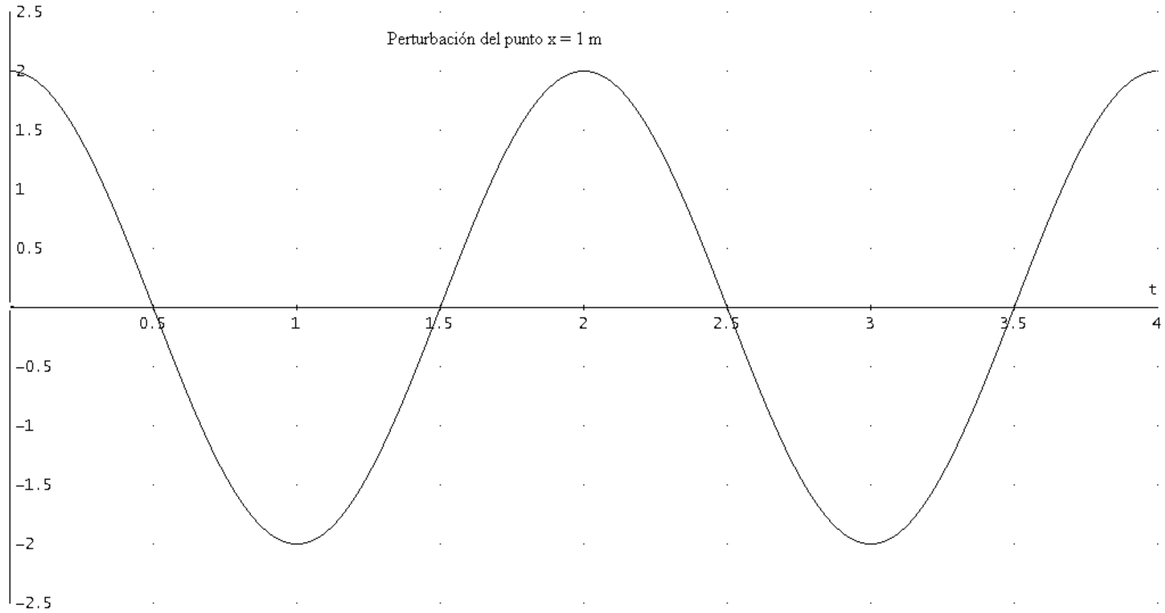
<u>**Periodicidad espacial y temporal de las ondas**</u>:

Consideramos la onda: $y(x,t) = A\cos 2\pi\left(\dfrac{x}{\lambda}-\dfrac{t}{T}\right) = 2\cos 2\pi\left(\dfrac{x}{1}-\dfrac{t}{2}\right) \quad \begin{cases}\lambda = 1\,\text{m} \\ T = 2\,\text{s}\end{cases}$

Representamos en el eje de ordenadas el valor de la perturbación, y(x,2) en el instante t = 2 s, y en el eje de abscisas la posición x. Siendo la longitud de onda 1 m.



En siguiente gráfica, en el eje de ordenadas la perturbación, y(1,t) para el punto x = 1 m, y en el eje de abscisas el tiempo t. Siendo el período 2 s.



Las ondas tienen una doble periodicidad: espacial y temporal. Temporal, porque cada cierto tiempo la perturbación se repite y espacial porque el mismo estado de perturbación se alcanza entre las superficies de onda, que son el lugar geométrico de los puntos en los que simultáneamente la perturbación tiene un valor constante.

La utilización de las funciones seno o coseno es equivalente y sólo depende de la elección del instante inicial. Si el instante inicial, con x y t de valor cero, se elige con el máximo de perturbación, es decir, igual a la amplitud, entonces utilizaremos la función coseno ya que el coseno de cero vale uno. Si el instante inicial, se elige con la perturbación cero, es decir, el producto de la amplitud por la función será cero, luego utilizaremos la función seno ya que el seno de cero vale cero.

Periodicidad espacial cada longitud de onda

$$\left\{\begin{array}{l}\psi(x,t)=\psi_m \operatorname{sen} k(x-ct)\\ \psi\left(x+\frac{2\pi}{k},t\right)=\psi_m \operatorname{sen} k\left(x+\frac{2\pi}{k}-ct\right)=\psi_m \operatorname{sen}\left[k(x-ct)+2\pi\right]\end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l}\psi\left(x+\frac{2\pi}{k},t\right)=\psi(x,t)\\ \frac{2\pi}{k}=\lambda\end{array}\right.$$

Periodicidad temporal cada período de onda

$$\left\{\begin{array}{l}\psi(x,t)=\psi_m \operatorname{sen} k(x-ct)\\ \psi(x,t+T)=\psi_m \operatorname{sen} k\left[x-c(t+T)\right]=\psi_m \operatorname{sen}\left[k(x-ct)-2\pi\right]\end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l}\psi(x,t+T)=\psi(x,t)\\ kcT=2\pi\\ \lambda=cT\end{array}\right.$$

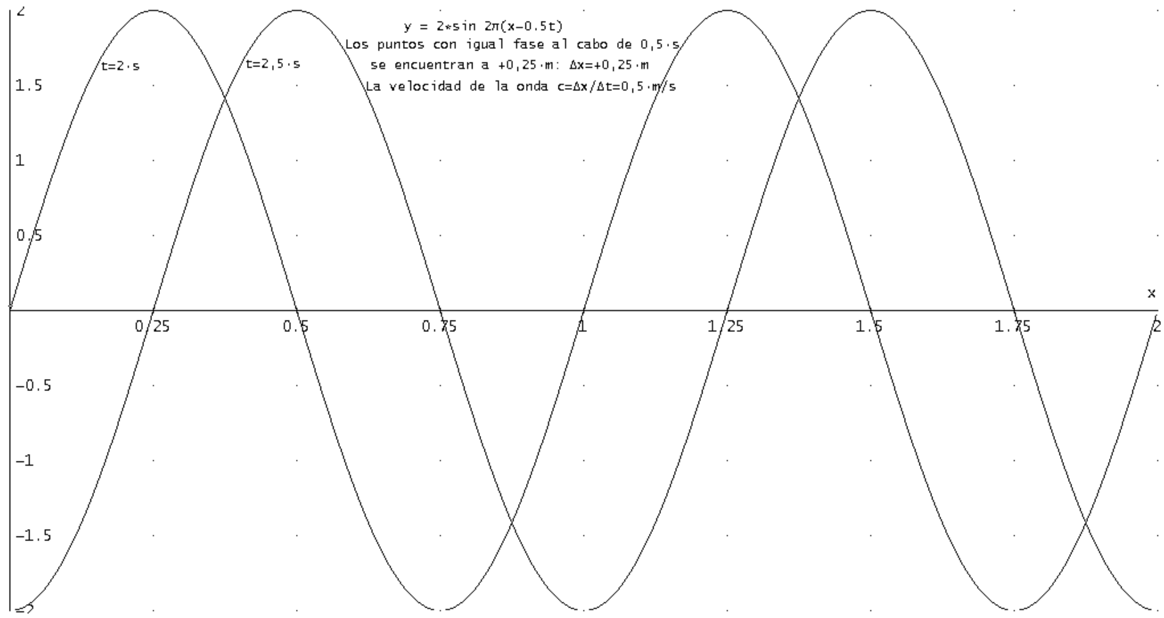
La ecuación establece una doble periodicidad, en el tiempo de período T, y en el espacio de período la longitud de onda λ.

Si la onda es de desplazamiento hay que resaltar **la diferencia entre la velocidad de propagación de la onda c y la velocidad de un punto del medio en el que la onda se propaga**.

En cada punto se establece una perturbación sinusoidal periódica en el tiempo

$$\psi(x_1,t)=\psi_m \operatorname{sen}(kx_1-\omega t)=\psi_m \operatorname{sen}\phi \quad \{\text{fase}\equiv\phi=kx_1-\omega t\}$$

Simultáneamente, en cada instante los puntos del eje OX cuya distancia sea un múltiplo de la longitud de onda están en el mismo estado de perturbación. La fase de la onda en cada punto e instante dados es: $\phi=\text{cte.}=kx-\omega t$.



Los puntos de igual fase están en un plano normal al eje OX que se desplaza con la siguiente velocidad

$$\phi=\text{cte.}=kx-\omega t \quad\Rightarrow\quad c=\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\phi+\omega t}{k}\right)=\frac{\omega}{k}=\frac{\lambda}{T}$$

$$\phi=\text{cte.}=kx+\omega t \quad\Rightarrow\quad c=\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\phi-\omega t}{k}\right)=-\frac{\omega}{k}=-\frac{\lambda}{T}$$

$$\phi = kx_1 - \omega t_1 = kx_2 - \omega t_2 \quad \begin{Bmatrix} \omega t_2 - \omega t_1 = kx_2 - kx_1 \\ \omega \Delta t = k\Delta x \end{Bmatrix} \quad \left\{ c = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} \right.$$

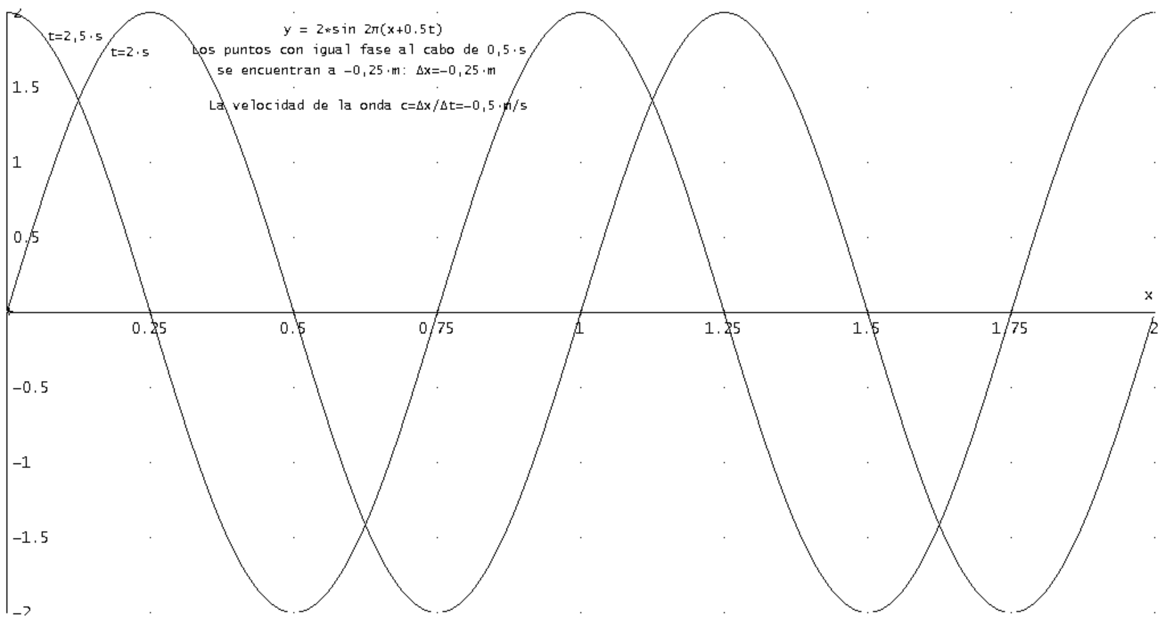
$$\phi = kx_1 + \omega t_1 = kx_2 + \omega t_2 \quad \begin{Bmatrix} -\omega t_2 + \omega t_1 = kx_2 - kx_1 \\ -\omega \Delta t = k\Delta x \end{Bmatrix} \quad \left\{ c = \frac{\Delta x}{\Delta t} = -\frac{\omega}{k} = -\frac{\lambda}{T} \right.$$

Los puntos que se encuentran en el mismo estado de perturbación:

$$\phi_2 - \phi_1 = kx_2 - kx_1 = k\left(x_2 - x_1\right) = n2\pi \quad \left\{ \frac{2\pi}{\lambda}\left(x_2 - x_1\right) = n2\pi \right\} \quad \left(x_2 - x_1\right) = n\lambda$$

Los puntos que se encuentran en oposición de fase:

$$\phi_2 - \phi_1 = kx_2 - kx_1 = k\left(x_2 - x_1\right) = \left(2n+1\right)\pi \quad \Rightarrow \quad \left(x_2 - x_1\right) = \left(2n+1\right)\frac{\lambda}{2}$$



Si la onda se transmite en dos o tres dimensiones: $\psi(\vec{r},t) = A \cdot \cos\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t\right)$

5.9 Magnitudes de una onda y su relación

1. **Amplitud**: la perturbación máxima que se puede alcanzar, y se mide dependiendo de la perturbación (m, Pa, etc.,).
2. **Longitud de onda**: la distancia que separa a dos puntos próximos que están en el mismo estado de perturbación en un instante determinado, su unidad es el metro. O bien, es la distancia avanzada por la onda en un período de tiempo.
3. **Número de onda**: el número de longitudes de onda contenidas en un metro, su unidad es m^{-1}. El número de onda es el inverso de la longitud de onda.
4. **Período**: el tiempo que tarda un punto en alcanzar el mismo estado de perturbación.
5. **Frecuencia**: el número de veces que tarda un punto en alcanzar el mismo estado de perturbación en un segundo, su unidad es el hertz Hz (s^{-1}). La frecuencia es el inverso del período.

6. **Velocidad de onda**: la relación entre la distancia que recorre la perturbación y el tiempo que tarda en recorrerla. Es decir, la división entre la longitud de onda y el período, o la multiplicación de la longitud de onda por la frecuencia.
7. **Pulsación** o frecuencia angular de la onda (rad/s; Hz): el número de veces que tarda en alcanzar el mismo estado de perturbación en 2π segundos.
8. **Vector número de onda** nos indica la dirección y sentido de la onda y expresa el número de ondas contenidas en 2π metros: $\vec{k} = k\vec{u} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{u} = \frac{2\pi}{cT}\vec{u} = \frac{\omega}{c}\vec{u}$.

5.10 Intensidad de una onda

En un movimiento ondulatorio lo que se propaga es una condición física generada en algún lugar y transmitida a otras regiones. Todas las ondas mecánicas corresponden a ciertos tipos de movimientos de los átomos o de las moléculas del medio, a través del que se propaga la onda. Sin embargo, los átomos permanecen, en promedio, en sus posiciones de equilibrio. Es decir, **no se propaga materia pero sí se transfiere el estado de movimiento desde una región a otra**, o condición dinámica de la materia. Puesto que la condición dinámica de un sistema se describe en términos de momento lineal y energía podemos decir: "*en el movimiento ondulatorio se propaga energía y momento lineal*".

La **intensidad de una onda** se define como la energía que fluye cruzando una unidad de área perpendicular a la dirección de propagación por unidad de tiempo. El **flujo** es la energía que en cada segundo emite un foco en el interior de un ángulo sólido dado. Luego la **intensidad** de una onda se define como la energía cuyo flujo cruza una unidad de área perpendicular a la dirección de propagación:

$$\text{Intensidad} = \frac{\text{Flujo}}{\text{Superficie}} = \frac{\frac{\text{Energía}}{\text{tiempo}}}{\text{Superficie}} \equiv \frac{\frac{J}{s}}{m^2} = \frac{W}{m^2} \Rightarrow \left(\frac{\frac{J}{s}}{m^2}\frac{m}{m} = \frac{J}{m^3}\frac{m}{s}\right)$$

La intensidad de la onda es proporcional a la densidad de energía y a su velocidad.

En el caso de una onda elástica armónica, $y(x,t) = A\,\text{sen}(kx - \omega t)$, la densidad de energía promedio se calcula de la siguiente forma. Considera que las partículas de la onda oscilan con movimiento armónico en dirección del eje OY, que es perpendicular al sentido de propagación de la onda +OX. La fuerza a que están sometidas las partículas viene dada por la ley de Hooke: **F = −ky = ma**. Si la posición en cada instante es una función armónica dada por la expresión $y = A\,\text{sen}(\omega t + \alpha)$ la velocidad y la aceleración

$$y = A\,\text{sen}(\omega t + \alpha)$$
$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left[A\,\text{sen}(\omega t + \alpha)\right] = \omega A\cos(\omega t + \alpha)$$
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\omega A\cos(\omega t + \alpha)\right] = -\omega^2 A\,\text{sen}(\omega t + \alpha) = -\omega^2 y = -\frac{k}{m}y$$
$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\left[A^2 - y^2\right] + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

La intensidad de la onda es proporcional a la velocidad a la que la energía se transmite a través del medio, y como la energía oscilatoria en el medio es proporcional al cuadrado de la amplitud, podemos considerar que **cualquier onda su Intensidad es proporcional al cuadrado de su amplitud**: $I = C\cdot A^2$; donde C es la constante de proporcionalidad que depende del tipo de onda. Por lo que si doblamos la amplitud de una onda su intensidad se multiplica por cuatro.

El oído humano escucha entre las frecuencias de 20 Hz y 20.000 Hz. En el caso del sonido, el umbral de audición está en una intensidad de $I_0 = 1{,}0\cdot 10^{-12}$ W/m^2. Si la intensidad de una conversación es de $I = 3{,}2\cdot 10^{-6}$ W/m^2, los decibelios o dB son

$$10\cdot\log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 10\cdot\log\left(\frac{3{,}2\cdot 10^{-6}\ \frac{W}{m^2}}{1{,}0\cdot 10^{-12}\ \frac{W}{m^2}}\right)\mathrm{dB} = 65\,\mathrm{dB}$$

Variación de la intensidad por absorción del medio: $I = I_0\cdot e^{-\gamma x}$

Siendo γ el coeficiente de absorción del medio, x es la distancia recorrida.

<u>5.11 Propagación de ondas: reflexión y refracción</u>

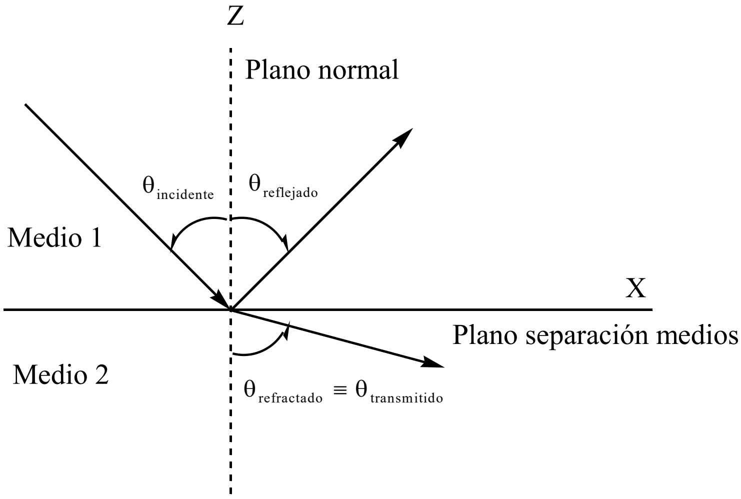
La velocidad de propagación de las ondas depende de algunas propiedades físicas del medio a través del que se propagan las ondas. Por ejemplo, la **velocidad** de las ondas elásticas depende de un módulo de elasticidad y de la densidad del medio. La velocidad de las ondas electromagnéticas depende de la permitividad y de la permeabilidad de la sustancia a través de la que se propaga. La **dependencia de la velocidad de propagación** de una onda de las **propiedades del medio** da lugar a los fenómenos de **reflexión y refracción**, que tienen lugar cuando una onda cruza una superficie separando dos medios donde la onda se propaga con distintas velocidades.

La **onda reflejada** es una onda nueva que se propaga volviendo hacia el mismo medio a través del cual la onda inicial se estaba propagando. La **onda refractada** es la onda transmitida hacia el segundo medio. La energía de la onda incidente se divide entre la onda reflejada y la onda refractada. En muchos casos la onda reflejada es la que recibe más energía, como ocurre en la reflexión por espejos.

Los **rayos** corresponden a las líneas de propagación de la energía y momento lineal de la onda. Las **superficies de onda** que son perpendiculares a los rayos, se definen como la superficie cuyos puntos tienen alguna propiedad común, que equidistan del foco y se encuentran en el mismo estado de perturbación. La relación geométrica entre rayos y superficies de onda es similar a la relación entre líneas de fuerza y superficies equipotenciales. Los puntos, sobre distintas superficies de onda, que están unidos por un rayo determinado se llaman **puntos correspondientes**. El tiempo requerido para que una onda vaya desde una superficie de onda a otra es el mismo que el medido a lo largo de un rayo. En un medio **isótropo**, en el que la velocidad es la misma en todos los puntos y en todas direcciones, la separación entre dos superficies de onda debe ser la misma para todos los puntos correspondientes. **En un medio isótropo homogéneo los rayos deben ser líneas rectas.**

<u>Leyes de la reflexión y de la refracción</u>:

Considera una onda plana propagándose en un medio 1. La experiencia nos dice que cuando la onda alcanza la superficie de separación de los dos medios, una onda es transmitida o refractada hacia el segundo medio y otra onda plana es reflejada y retrocede al mismo medio. Los ángulos $\theta_i, \theta_r, \theta_t$ que los rayos -incidente, reflejado y refractado o transmitido- tienen con la normal a la superficie de separación están relacionados por las siguientes leyes verificadas experimentalmente:



1. Las direcciones de los rayos incidentes, reflejados y refractados están todos en un plano, que es normal a la superficie de separación y, por tanto, contiene la normal a la superficie.
2. El ángulo del rayo incidente es igual al ángulo del rayo reflejado: $\theta_{incidente} = \theta_{reflejado}$. **Ley de la reflexión**.
3. La relación entre el seno del ángulo del rayo incidente y el seno del ángulo del rayo refractado es constante, $\dfrac{\operatorname{sen}\theta_{incidente(1)}}{\operatorname{sen}\theta_{trasmitido(2)}} = \dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{\frac{c_0}{c_2}}{\frac{c_0}{c_1}} = \dfrac{n_2}{n_1} = n_{21}$, siendo n_{21} el índice de refracción del medio 2 relativo al medio 1. Conocida como **ley de la refracción o ley de Snell**.

Explicación teórica de las leyes:

Cuando una onda llega a la superficie que separa dos medios homogéneos, se divide en dos ondas, una reflejada que retrocede al primer medio y una transmitida o refractada que se dirige al segundo medio.

En los procesos de reflexión y refracción se cumple:

1.- El **principio de conservación de la energía**, la energía de la onda incidente es igual a la suma de la energía de la onda reflejada y de la energía de la onda transmitida.

2.- La **frecuencia** de la onda original **permanece constante** y la **velocidad de la onda refractada** o transmitida **cambia**.

3.- La **fase de la onda incidente se altera**.

$$\psi(\vec{r},t) = \psi_m \cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right) = \psi_m \cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right) \qquad \begin{cases} c_1 = \lambda_1 \nu \\ c_2 = \lambda_2 \nu \end{cases}$$

Los rayos incidente, reflejado y transmitido están en el plano XZ y el plano XY es el de separación de los dos medios:

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{r}\left(r_x;r_y;0\right)\\ \vec{r}=r_x\vec{i}+r_y\vec{j}\end{array}\right\}\quad \vec{u}_i\left(u_{i(x)};u_{i(y)};0\right)\ \Rightarrow\ \vec{u}_r\left(u_{r(x)};u_{r(y)};0\right)\ \Rightarrow\ \vec{u}_t\left(u_{t(x)};u_{t(y)};0\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{k}\cdot\vec{r}=\text{cte.}\\ \vec{k}_{\text{incidente}}\vec{r}=\vec{k}_{\text{reflejada}}\vec{r}=\vec{k}_{\text{trasmitida}}\vec{r}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{2\pi}{\lambda_1}\vec{u}_i\cdot\vec{r}=\dfrac{2\pi}{\lambda_1}\vec{u}_r\cdot\vec{r}=\dfrac{2\pi}{\lambda_2}\vec{u}_t\cdot\vec{r}\\ \dfrac{2\pi\nu}{c_1}\vec{u}_i\vec{r}=\dfrac{2\pi\nu}{c_1}\vec{u}_r\vec{r}=\dfrac{2\pi\nu}{c_2}\vec{u}_t\vec{r}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{2\pi\nu}{c_1}u_{i(x)}r_x=\dfrac{2\pi\nu}{c_1}u_{r(x)}r_x=\dfrac{2\pi\nu}{c_2}u_{t(x)}r_x\\ \dfrac{2\pi\nu}{c_1}u_{i(y)}r_y=\dfrac{2\pi\nu}{c_1}u_{r(y)}r_x=\dfrac{2\pi\nu}{c_2}u_{t(y)}r_x\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}u_{i(x)}=\operatorname{sen}\theta_i\\ u_{r(x)}=\operatorname{sen}\theta_r\\ u_{t(x)}=\operatorname{sen}\theta_t\\ u_{i(y)}=u_{r(y)}=u_{t(y)}=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{2\pi\nu}{c_1}u_{i(x)}r_x=\dfrac{2\pi\nu}{c_1}u_{r(x)}r_x=\dfrac{2\pi\nu}{c_2}u_{t(x)}r_x\\ \boxed{\dfrac{u_{i(x)}}{c_1}=\dfrac{u_{r(x)}}{c_1}=\dfrac{u_{t(x)}}{c_2}}\end{array}\right\}\quad \boxed{\dfrac{\operatorname{sen}\theta_i}{c_1}=\dfrac{\operatorname{sen}\theta_r}{c_1}=\dfrac{\operatorname{sen}\theta_t}{c_2}}$$

A partir de estas ecuaciones se demuestra la **ley de la reflexión y la ley de la refracción**:

$$\boxed{\frac{\operatorname{sen}\theta_i}{c_1}=\frac{\operatorname{sen}\theta_r}{c_1}=\frac{\operatorname{sen}\theta_t}{c_2}}\ \Rightarrow\ \boxed{\theta_{\text{incidente}(1)}=\theta_{\text{reflejado}(1)}}\ \Rightarrow\ \boxed{\frac{\operatorname{sen}\theta_{\text{incidente}(1)}}{\operatorname{sen}\theta_{\text{trasmitido}(2)}}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{\frac{c_0}{c_2}}{\frac{c_0}{c_1}}=\frac{n_2}{n_1}=n_{21}}$$

El índice de refracción del segundo medio relativo del primero $\mathbf{n_{21}}$

a. Si $\mathbf{n_{21} > 1}$ ($n_2 > n_1$, $c_1 > c_2$) **implica que** $\boldsymbol{\theta_{i(1)} > \theta_{t(2)}}$, es decir que el ángulo del rayo incidente $\theta_{i(1)}$ es siempre mayor que el ángulo del rayo refractado o transmitido $\theta_{i(1)}$.

b. Si $\mathbf{n_{21} < 1}$**,** ($n_2 < n_1$, $c_1 < c_2$) **implica que** $\boldsymbol{\theta_{i(1)} < \theta_{t(2)}}$, es decir el ángulo del rayo incidente es menor que el ángulo del rayo refractado o transmitido. Si el ángulo del rayo transmitido es de $\boldsymbol{\theta_{t(2)}} = 90^o$ el ángulo del rayo incidente es un ángulo crítico de incidencia que coincide con el propio índice de refracción $\mathbf{n_{21}}$.

Para éste último caso, en el que el índice de refracción relativo de un medio respecto del otro, es menor que uno, para el ángulo crítico la onda refractada emerge tangente a la superficie y no pasa al segundo medio.

Las fibras ópticas se construyen para aprovechar esta ley. Estas fibras, ha de tener un diámetro muy pequeño, de varios micrómetros, están construidas de fibra de vidrio de cuarzo o también de nylon, que es un material de menor índice de refracción. De tal forma que al entrar un rayo de luz, este viaja por el interior sin poder salir de la fibra.

5.12 Superposición de ondas. Nociones sobre los fenómenos de interferencia

Cuando escuchamos un concierto a nuestros oídos llegan simultáneamente muchos sonidos, por lo que frecuentemente dos o más ondas pasan simultáneamente a través de la misma región.

Supongamos que dos ondas viajan simultáneamente a lo largo de una misma cuerda estirada horizontalmente. Sean $y_1(x,t)$ e $y_2(x,t)$ los desplazamientos que la cuerda experimentará si cada una actúa por separado. El desplazamiento de la cuerda cuando actúan las dos ondas será la suma algebraica: $y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$.

Este es otro ejemplo del principio de superposición que ya hemos aplicado a los campos gravitatorio y eléctrico. Este principio nos dice que cuando algunos sucesos ocurren simultáneamente su efecto neto es la suma de los sucesos individuales.

El **principio de la superposición** de ondas fue enunciado por Thomas Young (1773-1829) en 1802 y nos dice que: **"Cuando en un punto del espacio se superponen dos o más ondas la perturbación resultante es la suma de las producidas separadamente por cada componente"**.

Esto nos obliga a admitir que en una región del espacio en la que se propagan simultáneamente dos o más ondas, cada una lo hace con completa independencia de las otras.

Supongamos que enviamos dos ondas sinusoidales, de la misma longitud de onda y amplitud, en la misma dirección a lo largo de una cuerda estirada. Si aplicamos el principio de superposición, podemos preguntarnos ¿cuál será la perturbación resultante en la cuerda?. Todo va a depender del grado en que están en fase las dos ondas. Si las dos ondas están en fase la perturbación resultante será el doble de cada una por separado. Y, si las dos ondas están en oposición de fase se cancelarán siempre y no producen perturbación.

Este fenómeno de cancelación y de refuerzo de ondas le llamamos **interferencia** y se aplica a todos los tipos de ondas. ***Si dos o más ondas coinciden en el espacio y en el tiempo se produce una interferencia***.

La interferencia ocurre en la región donde coinciden las ondas incidente y reflejada, o cuando un movimiento ondulatorio es confinado a una región limitada del espacio. Una cuerda con sus dos extremos fijos, o un líquido en un cauce estrecho, o una onda electromagnética en una cavidad metálica. Dando lugar, estos últimos casos a ondas estacionarias.

Interferencia en una dimensión

Vamos a analizar dos ondas viajando en la misma dirección y sentido. Por ejemplo, una forma de hacerlo es colocando dos altavoces sobre el eje X, separados por una distancia Δx, emiten sonido en el sentido +X provocarán que las dos ondas de sonido solapen al viajar sobre el eje X. Otra forma es colocando dos fuentes de rayos láser, una sobre el eje -X y otra sobre el eje -Y, que emiten luz hacia +X y +Y, respectivamente. Si en el origen de coordenadas hay un espejo plateado, que parcialmente transmite y refleja las ondas, se producen dos ondas de luz que solapan al viajar, sobre el eje +X y sobre el eje +Y.

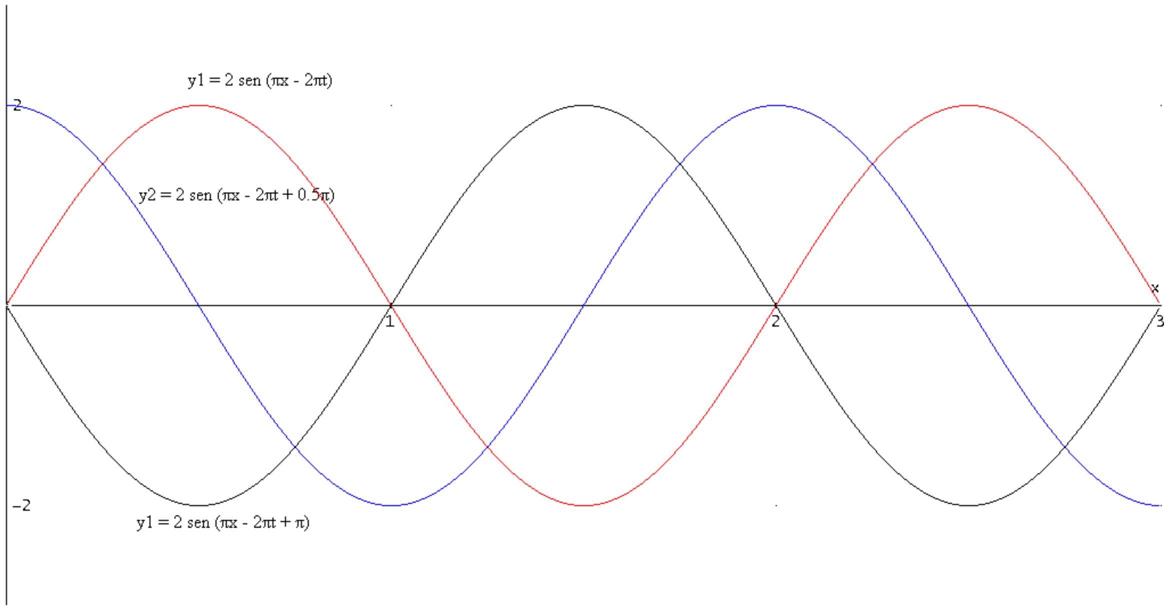
Consideramos que las *dos ondas son sinusoidales, que tienen la misma frecuencia y amplitud, y que viajan en mismo sentido del eje X.* Si el punto en el que se detecta el solapamiento de las ondas está a una distancia x_1 de una fuente y a x_2 de la otra.

Las ecuaciones de las dos ondas son:

$$\psi_1(x_1,t) = A\,\text{sen}(kx_1 - \omega t + \phi_{10}) = A\,\text{sen}\,\phi_1$$
$$\psi_2(x_2,t) = A\,\text{sen}(kx_2 - \omega t + \phi_{20}) = A\,\text{sen}\,\phi_2$$

Siendo ϕ_1 y ϕ_2 las fases de las ondas y las constantes de fase, ϕ_{10} y ϕ_{20}, son características de las fuentes y no del medio.

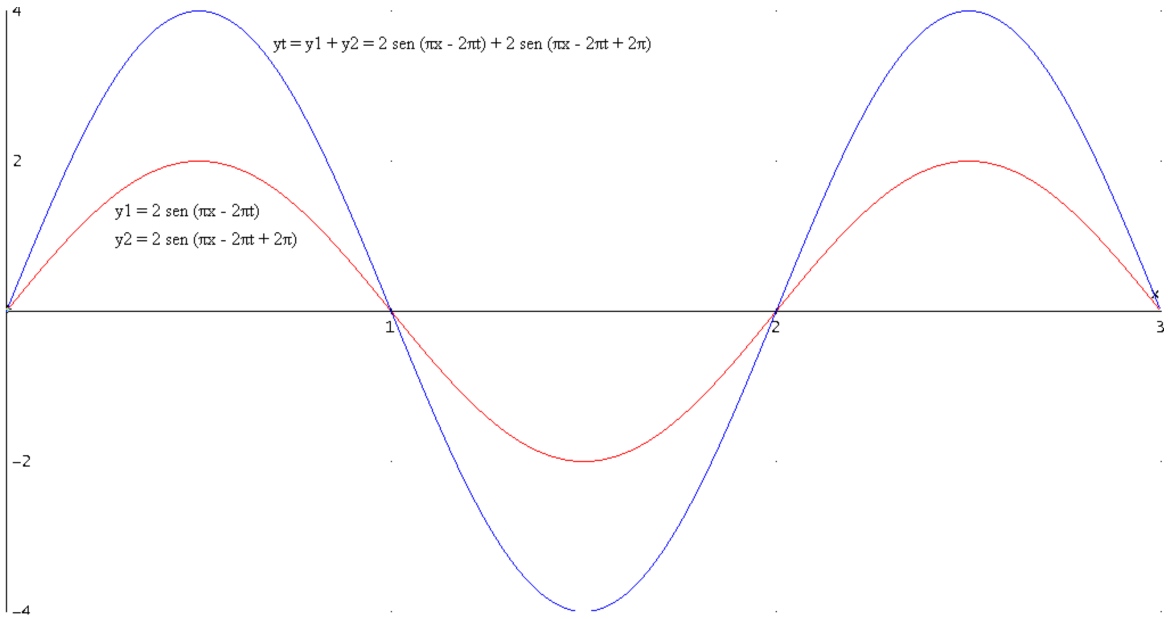
En la gráfica hay tres fuentes con constantes de fase $\phi_{10} = 0$ rad, $\phi_{20} = 0{,}5\cdot\pi$ rad y $\phi_{30} = \pi$ rad. La constante de fase nos dice lo que está haciendo la fuente en el tiempo t = 0. Por ejemplo, si un altavoz emite una onda, $2\,\text{sen}(\pi x - 2\pi t)$, estando en su posición central y moviéndose hacia atrás, en t = 0, tiene de constante de fase 0 rad. Si otro altavoz estuviese retrasado respecto del primero y emite una onda, $2\,\text{sen}(\pi x - 2\pi t + \frac{\pi}{2})$, la constante de fase sería $\phi_{20} = 0{,}5\cdot\pi$ rad. Y el tercer altavoz, emite una onda, $2\,\text{sen}(\pi x - 2\pi t + \pi)$, siendo la constante de fase $\phi_{30} = \pi$ rad, dependiendo de la posición en t = 0.



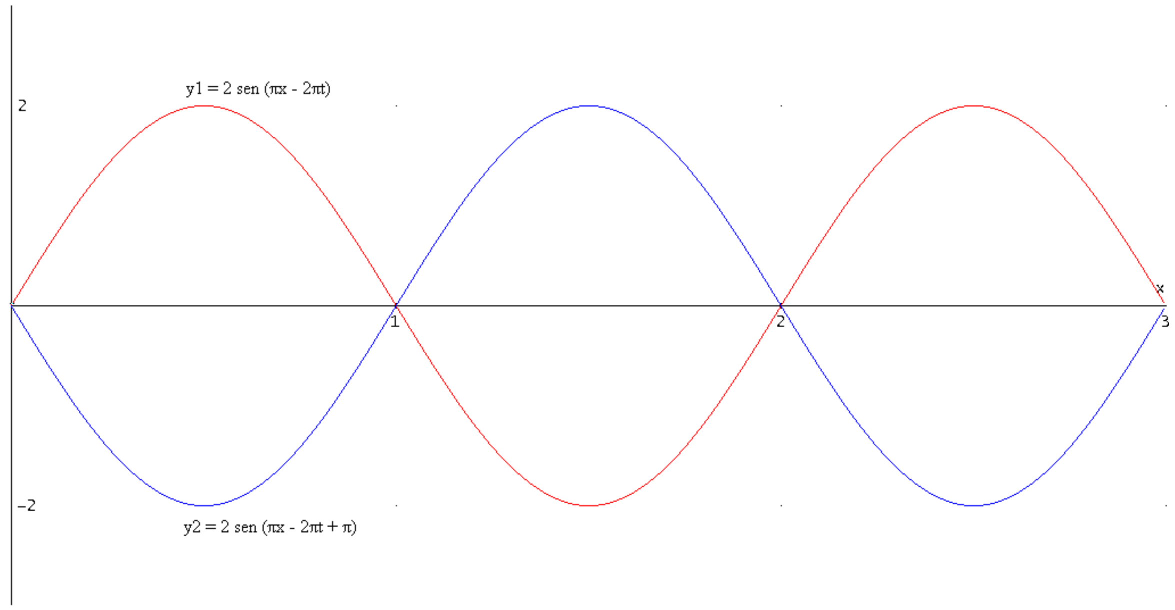
Cuando las fuentes son idénticas significa que las constantes de fase son iguales.

Si combinamos dos ondas en fase, usando el principio de superposición, el desplazamiento neto en cada punto es el doble que el desplazamiento de cada onda individual.

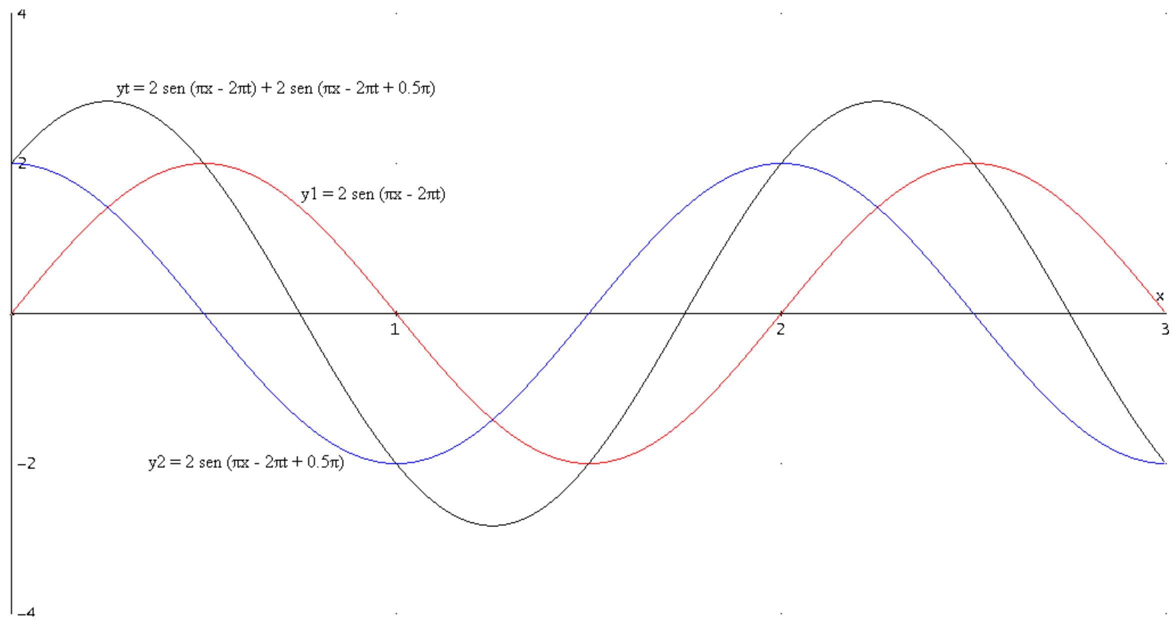
Interferencia constructiva: Si la superposición de las dos ondas crea una onda con una amplitud mayor que la de cada onda individual. Cuando las dos ondas están en la misma fase, la nueva amplitud es 2·A, y tendremos el máximo de la interferencia constructiva.



Interferencia destructiva: Si la superposición de dos ondas crea una onda con una amplitud menor que cada onda individual. Si la diferencia de fase entre las ondas es de 180º las ondas están fuera de fase y se produce una interferencia totalmente destructiva.



La interferencia destructiva perfecta tiene lugar sólo si las dos ondas tienen la misma amplitud. Dos ondas con amplitudes distintas pueden interferir destructivamente si tienen iguales las longitudes de onda, pero la cancelación no será perfecta.



La diferencia de fase:

Para conocer la interferencia debemos centrarnos en las fases de las dos ondas (ϕ_1 y ϕ_2) y sobre todo en la diferencia entre las dos fases $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$:

$$\left.\begin{cases} \phi_1 = kx_1 - \omega t + \phi_{10} \\ \phi_2 = kx_2 - \omega t + \phi_{20} \end{cases}\right\} \begin{cases} \Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = (kx_2 - \omega t + \phi_{20}) - (kx_1 - \omega t + \phi_{10}) = k(x_2 - x_1) + (\phi_{20} - \phi_{10}) \\ \Delta\phi = k\Delta x + \Delta\phi_0 = \dfrac{2\pi}{\lambda}\Delta x + \Delta\phi_0 \end{cases}$$

Hay dos contribuciones a la diferencia de fase: $\Delta\phi = k\cdot\Delta x + \Delta\phi_0$. La distancia entre las fuentes Δx, que es la diferencia en el camino de las dos fuentes y la diferencia de fase inherente entre las fuentes $\Delta\phi_0$.

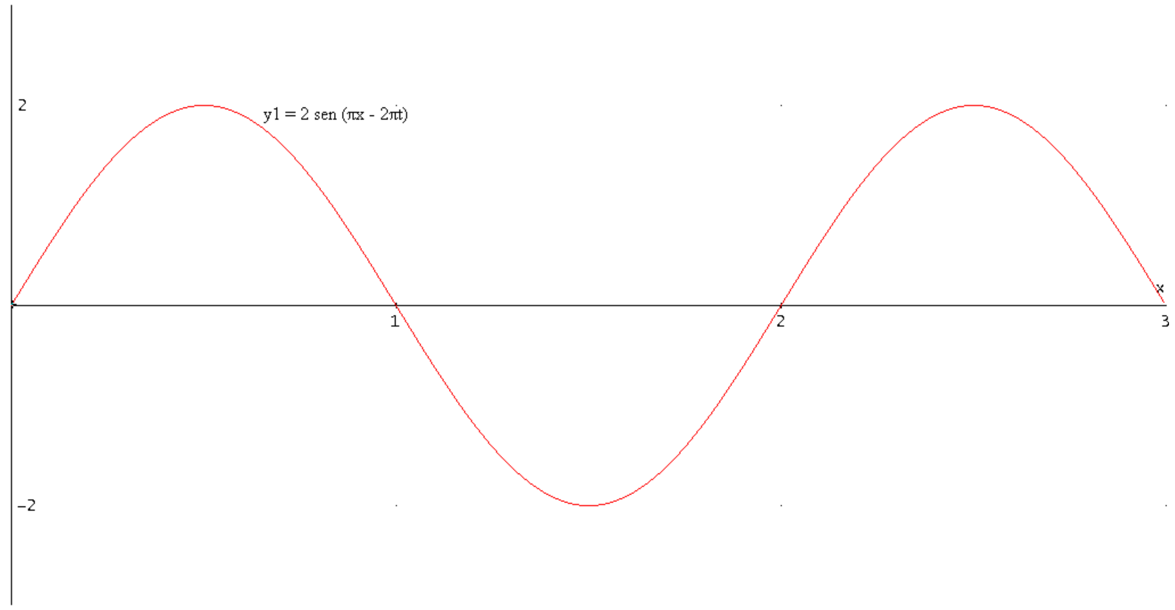
Aunque las fases individuales dependen del tiempo, la variable tiempo no aparece en la diferencia de fase.

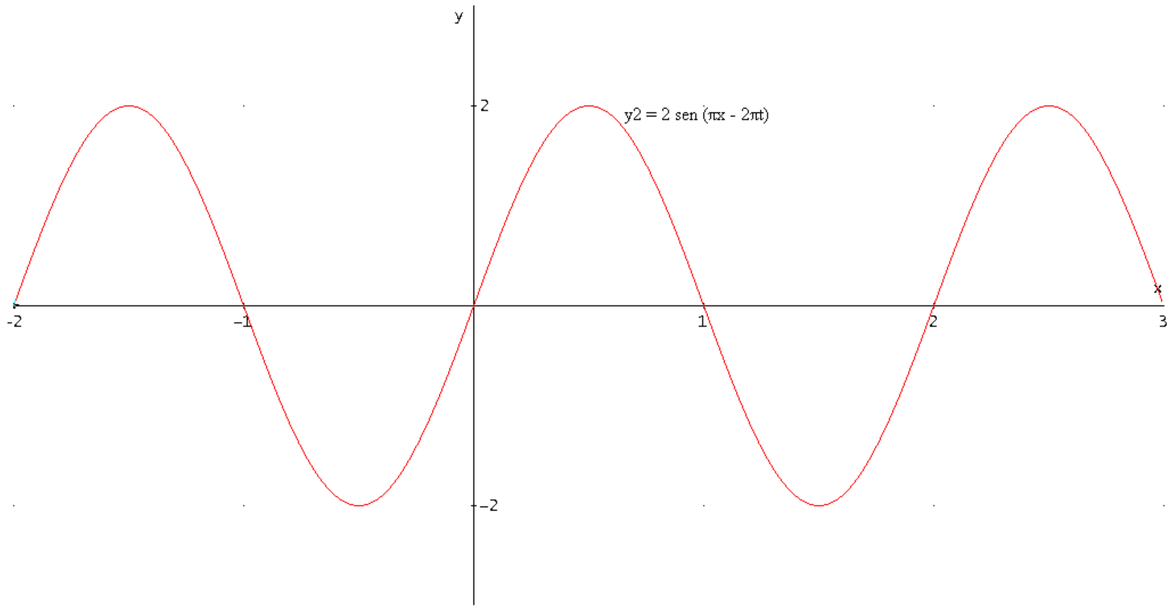
La condición de **estar en fase**, es decir donde las crestas están alineadas con las crestas y los valles con los valles o depresiones de la onda, es cuando $\Delta\phi = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$, o cualquier múltiplo entero de 2π. Así la condición para una **interferencia constructiva máxima** es:

$$\Delta\phi = k\Delta x + \Delta\phi_0 = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x + \Delta\phi_0 = n2\pi \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

Para fuentes idénticas, las que tienen $\Delta\phi_0 = 0\ \text{rad}$, la interferencia constructiva máxima tiene lugar cuando $\Delta x = n\lambda$. Por lo que *dos fuentes idénticas producen un máximo de interferencia constructiva cuando la diferencia en la longitud del camino es un número entero de longitudes de onda*.

Por ejemplo, consideramos dos fuentes idénticas, como dos altavoces sonando al mismo tiempo, por lo que $\Delta\phi_0 = 0\ \text{rad}$. La fuente 1 emite una onda, $y_1(x,t) = 2\,\text{sen}(\pi x_1 - 2\pi t)$ y la fuente 2 emite una onda, $y_2(x,t) = 2\,\text{sen}(\pi x_2 - 2\pi t)$, siendo la diferencia en la longitud de camino, $\Delta x = x_2 - x_1$, que es la distancia extra que viaja la onda 2, desde el altavoz 2, antes de combinarse con el altavoz 1. En este caso $\Delta x = x_2 - x_1 = \lambda$.





Las dos ondas tienen una diferencia de fase:

$$\Delta\phi = (\pi x_2 - 2\pi t) - (\pi x_1 - 2\pi t) = \pi\Delta x = \pi \tfrac{\text{rad}}{\text{m}} \cdot 2\text{ m} = 2\pi\text{ rad}$$

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = (kx_2 - \omega t) - (kx_1 - \omega t) = k(x_2 - x_1) = k\Delta x = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x \quad \left\{\lambda = \frac{2\pi\Delta x}{\Delta\phi} = 2\text{ m}\right.$$

Por lo que las dos ondas tienen una interferencia constructiva para producir una onda de amplitud 2·A = 4 m.

La **interferencia destructiva perfecta**, en la que las crestas de una onda se alinean con los valles de la otra, esto ocurre cuando dos ondas están fuera de fase, es decir, $\Delta\phi = \pi, 3\pi, 5\pi,$ o cualquier múltiplo impar de π. Por lo que la condición para la interferencia destructiva perfecta es:

Interferencia destructiva perfecta:

$$\Delta\phi = k\Delta x + \Delta\phi_0 = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x + \Delta\phi_0 = (2n+1)\pi\text{ rad} \quad (n = 0,1,2,3,\ldots)$$

Para fuentes idénticas, $\Delta\phi_0 = 0$ rad, la interferencia destructiva perfecta tiene lugar cuando $\Delta x = (2n+1)\frac{\lambda}{2} = \left(\frac{2n+1}{2}\right)\lambda = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$. Por lo que *dos fuentes idénticas producen una interferencia destructiva perfecta cuando la diferencia en la longitud de camino es un múltiplo (n + ½) de la longitud de onda. O bien un múltiplo impar de la mitad de la longitud de onda.*

Dos fuentes pueden estar fuera de fase porque las fuentes están localizadas en diferentes posiciones, porque las propias fuentes están fuera de fase, o por una combinación de las dos. Por ejemplo, **a)** dos fuentes están fuera de fase, $\Delta\phi = \pi$ rad, aún estando en el mismo punto, $\Delta x = 0$, pero con una diferencia de fase inherente de 180º, $\Delta\phi_0 = \pi$ rad; **b)** dos fuentes están fuera de fase, $\Delta\phi = \pi$ rad, si están separadas por una distancia que es la mitad de la longitud de onda, $\Delta x = \frac{1}{2}\lambda$, y con una diferencia de fase inherente de 0º, $\Delta\phi_0 = 0$ rad ; **c)** dos fuentes están fuera de fase, $\Delta\phi = \pi$ rad, si están separadas por una distancia que es la cuarta parte de la longitud de onda, $\Delta x = \frac{1}{4}\lambda$, y con una diferencia de fase inherente de 90º, $\Delta\phi_0 = \frac{1}{2}\pi$ rad.

Por todo ello es importante tener en cuenta que la diferencia de fase de las ondas, $\Delta\phi$, no es lo mismo que la diferencia de fase de las fuentes, $\Delta\phi_0$. Siendo la diferencia de fase de las ondas la que gobierna la interferencia.

Ejemplo de interferencia entre dos ondas de sonido:

1) Considera que estamos enfrente de dos altavoces, que están próximos y a la misma distancia de nosotros, y que emiten con la misma frecuencia. Inicialmente casi no hay sonido en ellos, entonces uno de los altavoces se mueve lentamente alejándose de nosotros y la intensidad del sonido se incrementa conforme se aleja alcanzando un máximo cuando están separados 0,75 m. Si seguimos alejando los altavoces la intensidad del sonido decrece, ¿a qué distancia se alcanzará un mínimo?.

Solución:

El cambio en la intensidad del sonido se debe a la interferencia de las dos ondas de sonido que solapan. Si movemos un altavoz respecto del otro cambia la diferencia de fase entre las ondas.

Una intensidad de sonido mínima es debida a que las dos ondas de sonido interfieren destructivamente. Inicialmente los dos altavoces están juntos, $\Delta x = 0\,\text{m}$, con una interferencia destructiva, $\Delta\phi = 2\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ rad, luego las diferencias de fase de las fuentes debe ser $\Delta\phi_0 = \pi$ rad:

$$\Delta\phi = k\Delta x + \Delta\phi_0 = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot 0 + \Delta\phi_0 = (2n+1)\pi \text{ rad} = 2\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\pi \text{ rad} \quad (n = 0,1,2,3,\ldots) \quad \{\Delta\phi_0 = \pi \text{ rad}$$

Moviendo uno de los altavoces no cambia $\Delta\phi_0$, la diferencia de fase entre las fuentes, pero sí lo hace Δx, y así se incrementa la diferencia de fase entre las ondas.

La interferencia constructiva tiene lugar cuando la diferencia de fase es $\Delta\phi = 2\pi$ rad:

$$\Delta\phi = k\Delta x + \Delta\phi_0 = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x + \pi = 2\pi \text{ rad} \quad \left\{\Delta x = \frac{\lambda}{2}\right\} \quad \{\lambda = 2\Delta x = 2\times 0,75 \text{ m} = 1,50 \text{ m}$$

El siguiente punto con interferencia destructiva, n = 1, será cuando:

$$\Delta\phi = k\Delta x + \Delta\phi_0 = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x + \pi = 2\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\pi \text{ rad} = 3\pi \text{ rad} \quad \{\Delta x = \lambda = 1,5 \text{ m}$$

Determinación analítica de la interferencia de dos ondas en una dimensión[*]

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = A_1 \operatorname{sen}(\omega t - kx_1 + \phi_{10}) = A_1 \operatorname{sen}(\omega t - \phi_1) \\ y_2 = A_2 \operatorname{sen}(\omega t - kx_2 + \phi_{20}) = A_2 \operatorname{sen}(\omega t - \phi_2) \end{array}\right\} \quad y_r = A_r \operatorname{sen}(\omega t - \phi_r) = y_1 + y_2$$

$$y_r = A_r \operatorname{sen}(\omega t - \phi_r) = A_r\left[\operatorname{sen}\omega t \cos\phi_r - \cos\omega t \operatorname{sen}\phi_r\right] = \operatorname{sen}\omega t\left[A_r\cos\phi_r\right] - \cos\omega t\left[A_r \operatorname{sen}\phi_r\right]$$

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = A_1 \operatorname{sen}(\omega t - \phi_1) = A_1 \operatorname{sen}\omega t \cos\phi_1 - A_1 \cos\omega t \operatorname{sen}\phi_1 \\ y_2 = A_2 \operatorname{sen}(\omega t - \phi_2) = A_2 \operatorname{sen}\omega t \cos\phi_2 - A_1 \cos\omega t \operatorname{sen}\phi_2 \end{array}\right\}$$

$$y_r = y_1 + y_2 = \operatorname{sen}\omega t\left[A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2\right] - \cos\omega t\left[A_1 \operatorname{sen}\phi_1 + A_2\operatorname{sen}\phi_2\right]$$

$$\left\{\begin{array}{l} A_r\cos\phi_r = A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2 \\ A_r\operatorname{sen}\phi_r = A_1\operatorname{sen}\phi_1 + A_2\operatorname{sen}\phi_2 \end{array}\right\} \quad \frac{A_r\operatorname{sen}\phi_r}{A_r\cos\phi_r} = \tan\phi_r = \frac{A_1\operatorname{sen}\phi_1 + A_2\operatorname{sen}\phi_2}{A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2}$$

Elevando las dos ecuaciones al cuadrado y sumándolas queda:

$$\left.\begin{cases}\left(A_r\cos\phi_r\right)^2=\left(A_1\cos\phi_1+A_2\cos\phi_2\right)^2\\ \left(A_r\,\mathrm{sen}\,\phi_r\right)^2=\left(A_1\,\mathrm{sen}\,\phi_1+A_2\,\mathrm{sen}\,\phi_2\right)^2\\ A_r^2=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\left[\cos\phi_1\cos\phi_2+\mathrm{sen}\,\phi_1\,\mathrm{sen}\,\phi_2\right]\end{cases}\right\}\quad A_r^2=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\left[\phi_2-\phi_1\right]$$

La relación entre diferencia de fase, de las dos ondas, y la amplitud resultante es:

$$\delta=\phi_2-\phi_1=\left(kx_2+\phi_{20}\right)-\left(kx_1+\phi_{10}\right)=k\Delta x+\Delta\phi_0$$
$$A_r^2=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\delta$$

Si la Amplitud es máxima se dice que la interferencia es constructiva y si la amplitud es mínima la interferencia es destructiva**.** Los valores de la amplitud resultante, A_r, máximo y mínimo son:

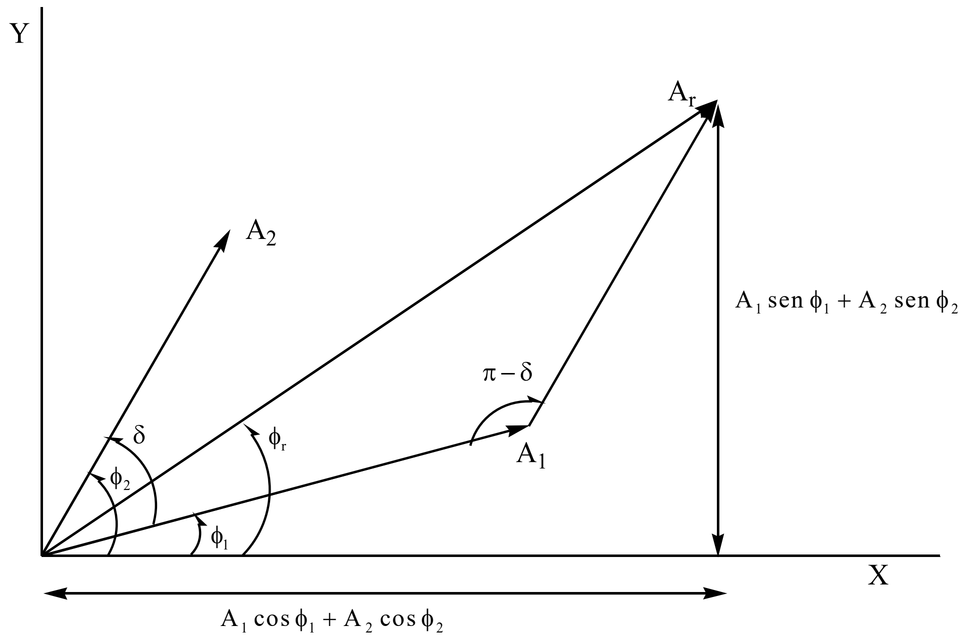
$$A_{r(\text{máximo})}=A_1+A_2\quad\left\{\cos\delta=+1\right\}\quad\left\{k\Delta x+\Delta\phi_0=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x+\Delta\phi_0=2n\pi\ \text{rad}\quad\left(n=0,1,2,3,\ldots\right)\right.$$
$$A_{r(\text{mínimo})}=A_1-A_2\quad\left\{\cos\delta=-1\right\}\quad\left\{k\Delta x+\Delta\phi_0=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x+\Delta\phi_0=\left(2n+1\right)\pi\ \text{rad}\quad\left(n=0,1,2,3,\ldots\right)\right.$$

Para fuentes idénticas, las que tienen $\Delta\phi_0=0\ \text{rad}$, la interferencia constructiva máxima tiene lugar cuando $\Delta x=n\lambda$. Por lo que *dos fuentes idénticas producen un máximo de interferencia constructiva cuando la diferencia en la longitud del camino es un número entero de longitudes de onda*.

Para fuentes idénticas, $\Delta\phi_0=0\ \text{rad}$, la interferencia destructiva perfecta tiene lugar cuando $\Delta x=\left(\frac{2n+1}{2}\right)\lambda=\left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda$. Por lo que *dos fuentes idénticas producen una interferencia destructiva perfecta cuando la diferencia en la longitud de camino es un múltiplo (n + ½) de la longitud de onda*.

<u>Determinación gráfica de la interferencia: Fasores</u>

$$\left.\begin{cases}y_1=A_1\,\mathrm{sen}\left(\omega t-kx_1+\phi_{10}\right)=A_1\,\mathrm{sen}\left(\omega t-\phi_1\right)\\ y_2=A_2\,\mathrm{sen}\left(\omega t-kx_2+\phi_{20}\right)=A_2\,\mathrm{sen}\left(\omega t-\phi_2\right)\end{cases}\right\}\quad y_r=A_r\,\mathrm{sen}\left(\omega t-\phi_r\right)=y_1+y_2$$



$$A_r^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos(\pi-\delta) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta$$

$$\phi_r = \arctan\frac{A_1 \operatorname{sen}\phi_1 + A_2 \operatorname{sen}\phi_2}{A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2}$$

$$A_r^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos[\phi_2-\phi_1] = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos(\pi-\delta)$$

<u>Determinación analítica de la interferencia en una dimensión de dos ondas de amplitud igual</u>

$$\begin{Bmatrix} y_1 = A\operatorname{sen}(kx_1 - \omega t + \phi_{10}) = A\operatorname{sen}\phi_1 \\ y_2 = A\operatorname{sen}(kx_2 - \omega t + \phi_{20}) = A\operatorname{sen}\phi_2 \end{Bmatrix} \quad y_r = y_1 + y_2 = A_r\operatorname{sen}\phi_r = A_r\operatorname{sen}(kx_r - \omega t + \phi_{0r})$$

$$\begin{Bmatrix} \operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) = (\operatorname{sen}a\cdot\cos b + \cos a\cdot\operatorname{sen}b) + (\operatorname{sen}a\cdot\cos b - \cos a\cdot\operatorname{sen}b) \\ \operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) = 2\cdot\operatorname{sen}a\cdot\cos b = 2\cdot\operatorname{sen}\frac{(a+b)+(a-b)}{2}\cdot\cos\frac{(a+b)-(a-b)}{2} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} (a+b)+(a-b) = 2a \quad\Rightarrow\quad a = \frac{(a+b)+(a-b)}{2} \\ (a+b)-(a-b) = 2b \quad\Rightarrow\quad b = \frac{(a+b)-(a-b)}{2} \end{Bmatrix} \quad \boxed{\operatorname{sen}A + \operatorname{sen}B = 2\cdot\cos\frac{A-B}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}}$$

$$y_r = y_1 + y_2 = A(\operatorname{sen}\phi_1 + \operatorname{sen}\phi_2) = A\cdot 2\cdot\cos\frac{\phi_2-\phi_1}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{\phi_1+\phi_2}{2} = A\cdot 2\cdot\cos\frac{\Delta\phi}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{\phi_1+\phi_2}{2}$$

$$y_r = A\cdot 2\cdot\cos\frac{(kx_2 - \omega t + \phi_{20}) - (kx_1 - \omega t + \phi_{10})}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{(kx_1 - \omega t + \phi_{10}) + (kx_2 - \omega t + \phi_{20})}{2}$$

$$y_r = 2\cdot A\cdot\cos\left[k\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) + \frac{\Delta\phi_0}{2}\right]\cdot\operatorname{sen}\left[k\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - \omega t + \left(\frac{\phi_{10}+\phi_{20}}{2}\right)\right]$$

$$A_r = 2\cdot A\cdot\cos\left[k\frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta\phi_0}{2}\right] \qquad \left\{\phi_r = kx_r - \omega t + \phi_{0r} = k\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - \omega t + \left(\frac{\phi_{10}+\phi_{20}}{2}\right)\right.$$

$$\{\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = (kx_2 - \omega t + \phi_{20}) - (kx_1 - \omega t + \phi_{10}) = k(x_2 - x_1) + (\phi_{20} - \phi_{10}) = k\Delta x + \Delta\phi_0\}$$

$$A_r = 2\cdot A\cdot\cos\left[k\frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta\phi_0}{2}\right] = 2\cdot A\cdot\cos\left[\frac{\Delta\phi}{2}\right]$$

$$y_r = y_1 + y_2 = A_r\,\mathrm{sen}\,\phi_r = 2\cdot A\cdot\cos\left[\frac{\Delta\phi}{2}\right]\cdot\mathrm{sen}\left[k\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - \omega t + \left(\frac{\phi_{10}+\phi_{20}}{2}\right)\right]$$

La amplitud tiene su valor máximo, $A_r = 2\cdot A$, si $\cos\left[\frac{\Delta\phi}{2}\right] = \pm 1$, lo que ocurre cuando $\frac{\Delta\phi}{2} = n\pi$, es decir $\Delta\phi = 2n\pi$.

Similarmente, la amplitud es cero si $\cos\left[\frac{\Delta\phi}{2}\right] = 0$, lo que ocurre cuando $\frac{\Delta\phi}{2} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$, es decir $\Delta\phi = (2n+1)\pi = 2\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$.

Ejemplo de interferencia entre dos ondas de sonido:

1) Dos altavoces emiten ondas de sonido a 500 Hz con una amplitud de $1{,}0\cdot 10^{-4}$ m. El altavoz 2 está a 1,0 m por detrás del 1, y la diferencia de fase entre los dos es de 90º. Determina la amplitud de la onda de sonido en un punto a 2,0 m del altavoz 1.

Solución:

La amplitud la determinamos por la interferencia de las dos ondas. Considera que la velocidad del sonido es de 343 m/s.

La amplitud de la onda de sonido es

$$A_r = \left|2\cdot A\cdot\cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)\right| \quad \{A = 1{,}0\cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}$$

Y la diferencia de fase entre las ondas $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = k\Delta x + \Delta\phi_0$

La longitud de onda del sonido es $\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{343\ \frac{m}{s}}{500\ \mathrm{Hz}} = 0{,}686\ \mathrm{m}$

Las distancias medidas desde los altavoces $x_1 = 2{,}0$ m y $x_2 = 3{,}0$ m. La diferencia en la longitud de camino es $\Delta x = 1{,}0\ \mathrm{m}$. Siendo la diferencia de fase inherente $\Delta\phi_0 = 90º = \frac{\pi}{2}\ \mathrm{rad}$. Por lo que la diferencia de fase en el punto de observación es

$$\Delta\phi = k\Delta x + \Delta\phi_0 = \frac{2\pi}{0{,}686\,\mathrm{m}}\times 1{,}0\,\mathrm{m} + \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad} = 10{,}73\,\mathrm{rad}$$

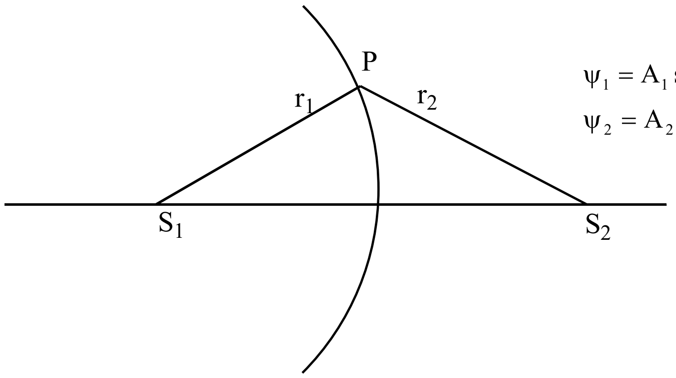
Y la amplitud de la onda en ese punto

$$A_r = \left|2\cdot A\cdot\cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)\right| = \left|2\times 1{,}0\cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}\times\cos\left(\frac{10{,}73\,\mathrm{rad}}{2}\right)\right| = 1{,}2\cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}$$

La interferencia es constructiva porque $A_r > A$.

<u>5.13 Interferencia de ondas producidas por dos fuentes sincronizadas</u>:

Consideremos dos fuentes S_1 y S_2, que oscilan en fase con la misma frecuencia angular (omega) y amplitudes A_1 y A_2 distintas. Sus respectivas ondas esféricas son:



$$\psi_1 = A_1 \operatorname{sen}\left(\omega t - kr_1\right)$$
$$\psi_2 = A_2 \operatorname{sen}\left(\omega t - kr_2\right)$$

Siendo r_1 y r_2 las distancias desde cualquier punto del medio a S_1 y a S_2. Hay que destacar que aunque las dos fuentes sean idénticas no producen la misma amplitud en un punto P si r_1 y r_2 son diferentes, ya que en las ondas esféricas la amplitud va disminuyendo de acuerdo a $1/r$.

<u>Condición de fase</u>: Supongamos que la perturbación es una propiedad escalar, tal como la alteración de la presión. Si la perturbación correspondiese a una magnitud vectorial, tal como un desplazamiento o un campo eléctrico, consideraríamos que las dos perturbaciones se producen en la misma dirección, por lo que la combinación de las dos ondas se puede tratar de una forma escalar. La onda resultante será:

$$\psi_r = \psi_1 + \psi_2 \quad \begin{cases} \psi_r = A_r \operatorname{sen}\left(\omega t - \alpha\right) \\ \psi_1 + \psi_2 = A_1 \operatorname{sen}\left(\omega t - kr_1\right) + A_2 \operatorname{sen}\left(\omega t - kr_2\right) \end{cases}$$

<u>Determinación analítica</u>:

$$\psi_r = A_r\left[\operatorname{sen}\omega t \cos\alpha - \cos\omega t \operatorname{sen}\alpha\right] = \operatorname{sen}\omega t\left[A_r \cos\alpha\right] - \cos\omega t\left[A_r \operatorname{sen}\alpha\right]$$

$$\left\{\begin{array}{l} \psi_1 + \psi_2 = A_1\left[\operatorname{sen}\omega t \cos kr_1 - \cos\omega t \operatorname{sen} kr_1\right] + A_2\left[\operatorname{sen}\omega t \cos kr_2 - \cos\omega t \operatorname{sen} kr_2\right] \\ \psi_1 + \psi_2 = \operatorname{sen}\omega t\left[A_1 \cos kr_1 + A_2 \cos kr_2\right] - \cos\omega t\left[A_1 \operatorname{sen} kr_1 + A_2 \operatorname{sen} kr_2\right] \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} A_r \operatorname{sen}\alpha = A_1 \operatorname{sen} kr_1 + A_2 \operatorname{sen} kr_2 \\ A_r \cos\alpha = A_1 \cos kr_1 + A_2 \cos kr_2 \end{array}\right\} \quad \frac{A_r \operatorname{sen}\alpha}{A_r \cos\alpha} = \frac{A_1 \operatorname{sen} kr_1 + A_2 \operatorname{sen} kr_2}{A_1 \cos kr + A_2 \cos kr_2} = \tan\alpha$$

Elevando las dos ecuaciones al cuadrado y sumándolas queda:

$$\left\{\begin{array}{l} \left(A_r \operatorname{sen}\alpha\right)^2 = \left(A_1 \operatorname{sen} kr_1 + A_2 \operatorname{sen} kr_2\right)^2 \\ \left(A_r \cos\alpha\right)^2 = \left(A_1 \cos kr_1 + A_2 \cos kr_2\right)^2 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} A_r^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\left[\cos kr_1 \cos kr_2 + \operatorname{sen} kr_1 \operatorname{sen} kr_2\right] \\ A_r^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\left[kr_1 - kr_2\right] \end{array}\right.$$

La relación entre diferencia de fase, de las dos ondas, y la amplitud resultante es:

$$\delta = kr_1 - kr_2 = \frac{2\pi}{\lambda}\left(r_1 - r_2\right) \quad \left\{A_r^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\delta\right.$$

Si la Amplitud es máxima se dice que la interferencia es constructiva y si la amplitud es mínima la interferencia es destructiva**.** Los valores de la amplitud resultante, A_r, máximo y mínimo son:

$$A_{r(\text{máximo})} = A_1 + A_2 \quad \{\cos\delta = +1\} \quad \left\{\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = n2\pi\right\} \quad \{(r_1 - r_2) = n\lambda$$

$$A_{r(\text{mínimo})} = A_1 - A_2 \quad \{\cos\delta = -1\} \quad \left\{\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = (2n+1)\pi\right\} \quad \left\{(r_1 - r_2) = (2n+1)\frac{\lambda}{2}\right.$$

- La interferencia de dos ondas será constructiva en aquellos puntos en los que se cumpla que $(r_1 - r_2) = \pm\lambda;\ \pm 2\lambda;\ \pm 3\lambda;...$

- La interferencia de dos ondas será destructiva en aquellos puntos en los que se cumpla que $(r_1 - r_2) = \pm 1\frac{\lambda}{2};\ \pm 3\frac{\lambda}{2};\ \pm 5\frac{\lambda}{2};...$

Coherencia:

El fenómeno de la interferencia nos dice que, en cada punto del espacio, el movimiento ondulatorio resultante tiene una amplitud característica determinada por la ecuación $\psi_r = A_r \operatorname{sen}(\omega t - \alpha)$

Por tanto, el resultado de la interferencia obtenida no tiene la forma de un movimiento ondulatorio avanzando sino el de una situación estacionaria donde en cada punto del espacio, el movimiento oscilatorio tiene unos valores fijos de amplitud y de fase.

La razón para este resultado es que las dos fuentes oscilan con la misma frecuencia y mantienen una diferencia de fase constante, y se dice que son coherentes. Si las fuentes son **incoherentes**, o si **su diferencia de fase cambia con el tiempo** de una forma irregular, aunque tengan la misma frecuencia, no se observan interferencias estacionarias.

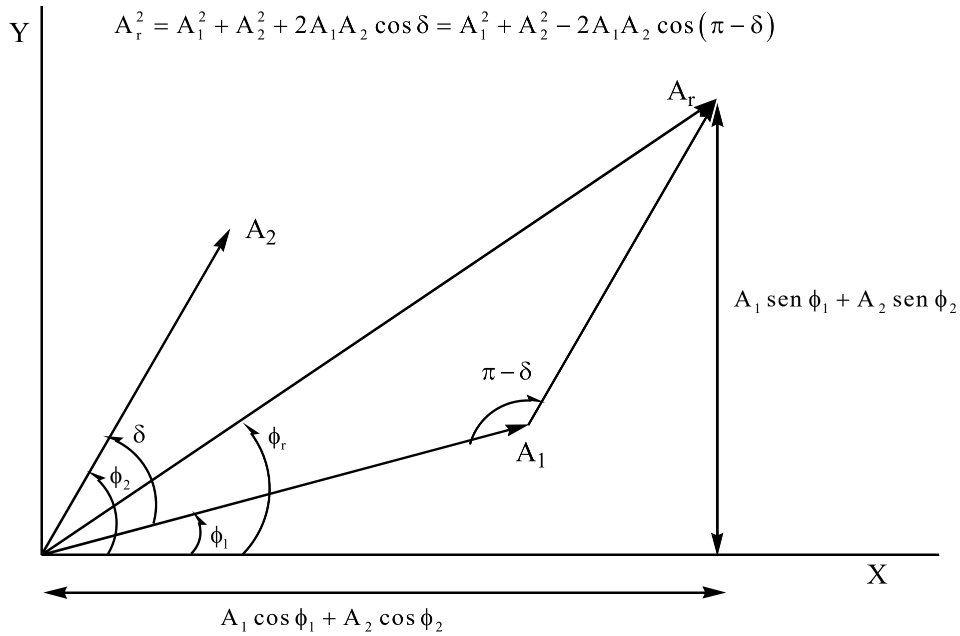
Esto es lo que ocurre con fuentes de luz constituidas de un gran número de átomos del mismo tipo, los cuales emiten luz de la misma frecuencia. Aunque hay muchos átomos constituyendo cada fuente, no oscilan en fase, y no se observa el fenómeno de la interferencia. Por esta razón no se observa interferencia entre dos bombillas de luz.

Para salvar esta dificultad y producir dos rayos de luz coherentes se han diseñado varias fuentes. La forma más sencilla es la utilizada por Thomas Young, quien con sus primeros experimentos demostró que la luz era un fenómeno ondulatorio, su aparato consiste en una pantalla con una fuente de luz situada detrás de ella, en la pantalla hay dos rendijas o agujeros muy próximos. Las rendijas se comportan como dos fuentes coherentes cuyas ondas interfieren sobre la otra zona de la pantalla. Las figuras de difracción se observan sobre una segunda pantalla colocada paralela a la primera. Las figuras observadas son franjas alternativas brillantes y oscuras. Una forma efectiva es dividir un rayo láser en dos y recombinarlos en un punto mediante un biprisma de Fresnel. Otro método es producir interferencias con el interferómetro de Michelson.

Determinación gráfica de la interferencia: Fasores

$$\psi_r = \psi_1 + \psi_2 \quad \left\{\begin{array}{l}\psi_r = A_r \operatorname{sen}\phi_r \\ \psi_1 + \psi_2 = A_1 \operatorname{sen}\phi_1 + A_2 \operatorname{sen}\phi_2\end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l}A_r^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos(\pi - \delta) \\ A_r^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta\end{array}\right.$$

$$\phi_r = \arctan\frac{A_1 \operatorname{sen}\phi_1 + A_2 \operatorname{sen}\phi_2}{A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2}$$



5.14 Interferencia de dos ondas que oscilan con la misma frecuencia y amplitud

Consideremos que las dos fuentes de las ondas (S_1 y S_2) oscilan en fase con la misma frecuencia angular (omega) y la misma amplitud A ($A_1 = A_2$). La perturbación resultante de la interferencia es igual a $\psi_r = A_r\,\mathrm{sen}(\omega t - \alpha)$

$$\psi_r = \psi_1 + \psi_2 \quad \begin{cases} \psi_r = A_r\,\mathrm{sen}(\omega t - \alpha) \\ \psi_1 + \psi_2 = A\,\mathrm{sen}(\omega t - kr_1) + A\,\mathrm{sen}(\omega t - kr_2) \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_r^2 = A^2 + A^2 + 2A^2\cos\delta = 2A^2(1+\cos\delta) \\ A_r^2 = 2A^2\left[1+\cos\left(\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}\right)\right] = 2A^2\left[1+\cos^2\frac{\delta}{2} - \mathrm{sen}^2\frac{\delta}{2}\right] \end{array} \right\} \quad \begin{cases} A_r^2 = 2A^2\,2\cos^2\frac{\delta}{2} \\ A_r = 2A\cos\frac{\delta}{2} \end{cases}$$

$$\tan\alpha = \frac{\mathrm{sen}\,kr_1 + \mathrm{sen}\,kr_2}{\cos kr_1 + \cos kr_2} = \frac{2\,\mathrm{sen}\left(\frac{kr_1+kr_2}{2}\right)\cos\left(\frac{kr_1-kr_2}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{kr_1+kr_2}{2}\right)\cos\left(\frac{kr_1-kr_2}{2}\right)} = \tan\left(\frac{kr_1+kr_2}{2}\right)$$

$$\psi_r = A_r\,\mathrm{sen}(\omega t - \alpha) = 2A\cos\left(\frac{kr_1-kr_2}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\omega t - \frac{kr_1+kr_2}{2}\right)$$

La interferencia es constructiva si la amplitud es máxima y destructiva si es mínima:

$$A_{r(\text{máximo})} = 2A \quad \left\{\cos\left(\frac{kr_1-kr_2}{2}\right) = +1\right\}\left\{\frac{kr_1-kr_2}{2} = n2\pi\right\} \quad \{r_1 - r_2 = n2\lambda$$

$$A_{r(\text{mínimo})} = 0 \quad \left\{\cos\left(\frac{kr_1-kr_2}{2}\right) = 0\right\}\left\{\frac{kr_1-kr_2}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}\right\} \quad \left\{r_1 - r_2 = (2n+1)\frac{\lambda}{2}\right.$$

Fórmulas trigonométricas que se utilizarán:

$$\left\{\begin{array}{l}\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)=(\operatorname{sen} a\cdot\cos b+\cos a\cdot\operatorname{sen} b)+(\operatorname{sen} a\cdot\cos b-\cos a\cdot\operatorname{sen} b)=2\cdot\operatorname{sen} a\cdot\cos b\\ \operatorname{sen}(a+b)-\operatorname{sen}(a-b)=(\operatorname{sen} a\cdot\cos b+\cos a\cdot\operatorname{sen} b)-(\operatorname{sen} a\cdot\cos b-\cos a\cdot\operatorname{sen} b)=2\cdot\cos a\cdot\operatorname{sen} b\\ \cos(a+b)+\cos(a-b)=(\cos a\cdot\cos b-\operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen} b)+(\cos a\cdot\cos b+\operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen} b)=2\cdot\cos a\cdot\cos b\\ \cos(a+b)-\cos(a-b)=(\cos a\cdot\cos b-\operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen} b)-(\cos a\cdot\cos b+\operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen} b)=-2\cdot\operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen} b\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}(a+b)+(a-b)=2a \quad\Rightarrow\quad a=\dfrac{(a+b)+(a-b)}{2}\\ (a+b)-(a-b)=2b \quad\Rightarrow\quad b=\dfrac{(a+b)-(a-b)}{2}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)=2\cdot\operatorname{sen}\dfrac{(a+b)+(a-b)}{2}\cdot\cos\dfrac{(a+b)-(a-b)}{2}\\ \operatorname{sen} A+\operatorname{sen} B=2\cdot\operatorname{sen}\dfrac{A+B}{2}\cdot\cos\dfrac{A-B}{2}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\operatorname{sen}(a+b)-\operatorname{sen}(a-b)=2\cdot\cos\dfrac{(a+b)+(a-b)}{2}\cdot\operatorname{sen}\dfrac{(a+b)-(a-b)}{2}\\ \operatorname{sen} A-\operatorname{sen} B=2\cdot\cos\dfrac{A+B}{2}\cdot\operatorname{sen}\dfrac{A-B}{2}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cdot\cos\dfrac{(a+b)+(a-b)}{2}\cdot\cos\dfrac{(a+b)-(a-b)}{2}\\ \cos A+\cos B=2\cdot\cos\dfrac{A+B}{2}\cdot\cos\dfrac{A-B}{2}\end{array}\right\}$$

5.15 Ondas estacionarias

Vamos a desarrollar la **interferencia para ondas armónicas o monocromáticas**. Las ecuaciones de la perturbación hacia el eje +OX y hacia el eje –OX son

$$\psi_{+OX}=\psi_m\operatorname{sen}(\omega t-kx)$$
$$\psi_{-OX}=\psi_m\operatorname{sen}(\omega t+kx)$$

Ahora analizaremos lo que le ocurre a una onda que se restringe a viajar en una región limitada del espacio que es un problema de gran aplicación práctica y teórica. Para hacer los cálculos más sencillos consideraremos sólo ondas en una dimensión.

Ondas estacionaras sobre una cuerda: Una cuerda estirada situada sobre el eje X, con uno de sus extremos fijo en el origen O y el otro puede oscilar transversalmente en el eje Y.

Una onda transversal incidente se mueve hacia el extremo fijo en el punto O, es decir, en el sentido -X (hacia la izquierda). Al llegar la onda al punto fijo O es reflejada y se produce una nueva onda (reflejada) propagándose en el sentido +X (hacia la derecha).

La onda incidente tiene la ecuación y la onda reflejada tiene de ecuación

$$y_i(x,t)=A_i\operatorname{sen}(\omega t+kx)$$
$$y_r(x,t)=A_r\operatorname{sen}(\omega t-kx)$$

Escribimos una amplitud diferente para las ondas incidente (A_i) y reflejada (A_r) para tener en cuenta el posible cambio de amplitud en la reflexión. El desplazamiento en algún punto de la cuerda, perpendicular al eje X, es el resultado de la interferencia o superposición de las dos ondas. Por tanto:

$$y_t(x,t) = y_i + y_r = A_i \operatorname{sen}(\omega t + kx) + A_r \operatorname{sen}(\omega t - kx)$$

En el extremo fijo de la cuerda (punto O) el valor de la coordenada x es cero. Además el punto O está fijo, lo que quiere decir que la perturbación total en ese punto es siempre cero $y_{total}(0,t) = 0$.

$$y_{total}(0,t) = 0 = A_i \operatorname{sen}(\omega t + k0) + A_r \operatorname{sen}(\omega t - k0) \quad \Rightarrow \quad A_i = -A_r$$

Por tanto, las amplitudes de la onda incidente (A_i) y de la onda reflejada (A_r) son iguales y de distinto signo. En otras palabras, cuando la onda incidente se refleja en el extremo o punto fijo la onda sufre un cambio de fase de 180º aunque no cambia el valor de la amplitud.

La ecuación resultante de la perturbación será si $A_i = - A_r = A$:

$$\left.\begin{cases} y_i(x,t) = A \operatorname{sen}(\omega t + kx) \\ y_r(x,t) = -A \operatorname{sen}(\omega t - kx) \end{cases}\right\} \quad y_{total}(x,t) = A \operatorname{sen}(\omega t + kx) - A \operatorname{sen}(\omega t - kx)$$

$$y_{total}(x,t) = A\left[\operatorname{sen}(\omega t + kx) - \operatorname{sen}(\omega t - kx)\right]$$

$$y_{total}(x,t) = A\left[\operatorname{sen}\omega t \cdot \cos kx + \cos \omega t \cdot \operatorname{sen} kx - \operatorname{sen}\omega t \cdot \cos kx + \cos \omega t \cdot \operatorname{sen} kx\right] = A\left[2 \cos \omega t \operatorname{sen} kx\right]$$

$$\boxed{y_{total}(x,t) = 2A \operatorname{sen}(kx) \cos(\omega t) = A_{total} \cos \omega t}$$

Sin embargo, en la ecuación anterior, la fase de la onda resultante sólo es función del tiempo y no de la posición. Por lo que en cualquier instante, tiene el mismo valor en todos los puntos del medio. La magnitud $\boxed{A_{total} = 2A \operatorname{sen} kx}$, se puede ver como la amplitud de oscilación del elemento de una cuerda localizado en la posición x. Sin embargo, mientras una amplitud es siempre positiva y $\operatorname{sen} kx$ puede ser negativa se debe tomar el valor absoluto.

En una onda viajera sinusoidal, la amplitud de la onda es la misma para todos los elementos de la cuerda. Esto no es cierto **para una onda estacionaria**, en la que **la amplitud varía con la posición**. Este resultado significa que no existe velocidad de fase y el perfil de la onda no se desplaza, es decir, es estacionario. Por tanto, no hay transporte de energía de un punto a otro.

La expresión de una onda viajera es de la forma: $y = A_m \operatorname{sen}\phi = A_m \operatorname{sen}(\omega t \pm kx)$

La ecuación obtenida representa una onda estacionaria, es decir, es la expresión de un movimiento armónico simple cuya amplitud varía desde punto a punto, y está dada por la amplitud resultante: $A_{total} = A_{resultante} = 2A \operatorname{sen}(kx)$.

En una onda viajera sinusoidal la amplitud de la onda es la misma para todos los elementos de la cuerda. Esto no ocurre en una onda estacionaria, en la que la amplitud varía con la posición. En la ecuación de la onda estacionaria anterior la amplitud varía como lo haga sen (kx). Por ejemplo, la amplitud es cero para los valores de kx en los que el seno sea cero.

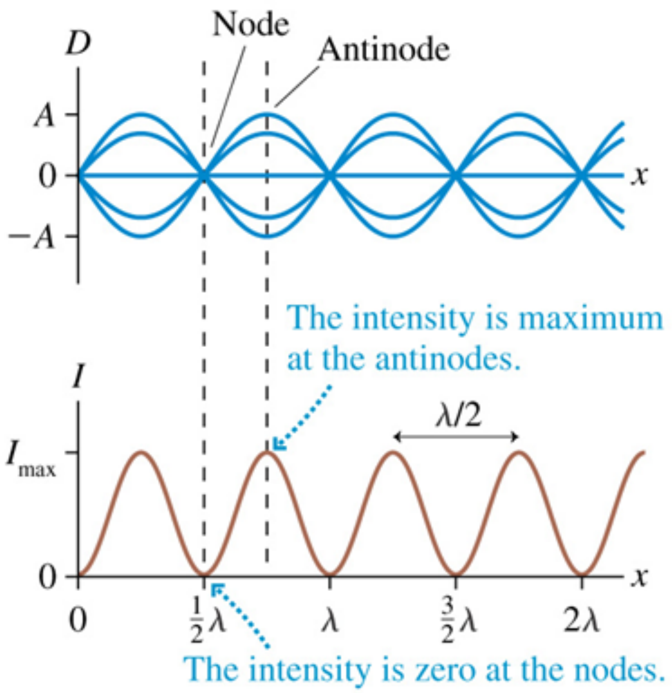
5.16 Concepto de nodo y de antinodo

Nodo: Los puntos en los que la amplitud resultante es cero $A_{resultante} = 2 \cdot A \cdot \operatorname{sen}(k \cdot x) = 0$:

$$A_{resultante} = 0 = 2A \operatorname{sen}(kx) \left.\begin{cases} \operatorname{sen}(kx) = 0 \\ kx = n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \end{cases}\right\} x_{nodo} = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}} = n\frac{\lambda}{2} \quad \begin{cases} x_{nodo(1)} = 1 \cdot \frac{\lambda}{2} \\ x_{nodo(2)} = 2 \cdot \frac{\lambda}{2} \end{cases}$$

Antinodo: Los puntos en los que la amplitud resultante es máxima $A_{resultante} = \pm 2A$:

$$A_{resultante} = \pm 2A = 2A\,\mathrm{sen}(kx)\left\{\begin{array}{l}\mathrm{sen}(kx) = \pm 1 \\ \dfrac{2\pi}{\lambda}x = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}\quad (n = 0,1,2,...)\end{array}\right\} x_{antinodo} = (2n+1)\frac{\lambda}{4}\left\{\begin{array}{l}x_{antinodo(1)} = 1\cdot\frac{\lambda}{4} \\ x_{antinodo(2)} = 3\cdot\frac{\lambda}{4}\end{array}\right.$$



5.17 Ondas estacionarias y resonancia

Cuando la frecuencia de las excitaciones exteriores es muy próxima a la frecuencia propia del oscilador aparece la resonancia. Es un fenómeno de ampliación de las oscilaciones que se presentan en el oscilador armónico.

El fenómeno de la resonancia aparece si imponemos la condición que el otro punto extremo de la cuerda estirada, $y_{total}(x,t) = 2A\,\mathrm{sen}(kx)\cos(\omega t)$, de longitud L esté fijo también, obtenemos el siguiente resultado:

$$y_{total}(x,t) = 2A\,\mathrm{sen}(kx)\cos(\omega t)$$

$$y_{total}(0,t) = 0 = 2A\,\mathrm{sen}(k\cdot 0)\cos(\omega t)\quad \{\mathrm{sen}(k\cdot 0) = 0$$

$$y_{total}(L,t) = 0 = 2A\,\mathrm{sen}(kL)\cos(\omega t)\quad \left\{\begin{array}{l}\mathrm{sen}(kL) = 0\ \{L \neq 0\} \\ \dfrac{2\pi}{\lambda}L = n\pi\ (n = 1,2,...)\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}L = n\dfrac{\lambda}{2} \\ \lambda = \dfrac{2L}{n}\end{array}\right.$$

Las longitudes de onda posibles para una determinada longitud de la cuerda L dada estarán determinadas por: $\lambda = \frac{2L}{n}$, siendo n = 1,2,3,....

También, la longitud de la cuerda L debe ser un múltiplo de la mitad de la longitud de onda $L = n\frac{1}{2}\lambda$.

Por tanto, la restricción de que los extremos de la cuerda estén fijos limita las longitudes de ondas de las ondas estacionarias que pueden existir sobre esta cuerda a los valores dados por

$$\lambda = \frac{2L}{n} \quad \left\{\lambda_{1(n=1)} = 2L\,; \quad \lambda_{2(n=2)} = L\,; \quad \lambda_{3(n=3)} = \frac{2}{3}L\,; ...\right\}$$

$$\nu_{\text{cuerda}} = \frac{c}{\lambda} = \frac{n}{2L}\cdot c = \frac{n}{2L}\cdot\sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad \left\{\nu_{1(n=1)} = \frac{1}{2L}\cdot c\,; \quad \nu_{2(n=2)} = \frac{2}{2L}\cdot c\,; \quad \nu_{3(n=3)} = \frac{3}{2L}\cdot c\,; ...\right\}$$

Para n = 1 se obtiene la frecuencia fundamental o primer armónico, c/(2L). El segundo armónico es el modo de oscilación con n = 2, y así sucesivamente. Las posibles frecuencias de oscilación, llamados armónicos, son todos múltiplos de la frecuencia fundamental. El sistema es resonante a estas frecuencias. Si la cuerda vibra a otras frecuencias de las frecuencias resonantes no es posible una onda estacionaria y las oscilaciones de la cuerda no son importantes.

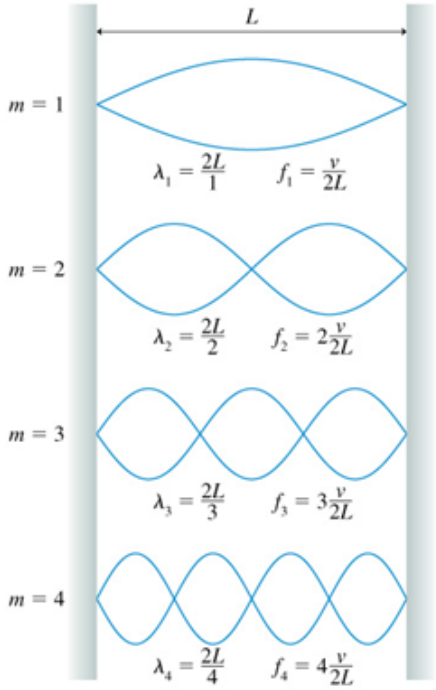
Si la cuerda se está moviendo a una frecuencia no resonante no será posible transferir energía eficazmente a la cuerda desde el agente oscilante externo. Durante algunos intervalos de tiempo, el agente externo, como un vibrador mecánico, hará trabajo sobre la cuerda; durante otros intervalos de tiempo, la cuerda trabajará sobre el vibrador. Sin embargo, en resonancia, es decir, en todas las frecuencias resonantes, el flujo de energía enteramente va del vibrador a la cuerda.

De este importante resultado se deduce:

1. Que las frecuencias y las longitudes de onda están cuantizadas, es decir, son múltiplos de una frecuencia fundamental.

2. La cuantización es el resultado de las condiciones límites impuestos en los extremos de la cuerda.

El fenómeno de la resonancia es común a todos los sistemas oscilantes. En física cuántica los estados en los que los átomos pueden existir se interpretan como modos de oscilación de las ondas de materia que representan los electrones atómicos.



Ejemplo de onda estacionaria: Una cuerda tensa de 0,50 m de longitud, con sus extremos fijos, vibra con una frecuencia de valor 30 Hz, en su modo fundamental. La amplitud del antinodo es de 0,05 m. La ecuación de la onda estacionaria es: $y = 0,05\,\text{sen}(2\pi x)\cos(60\pi t)$.

Los **antinodos** son los puntos en los que la amplitud resultante es máxima: ± 2A.

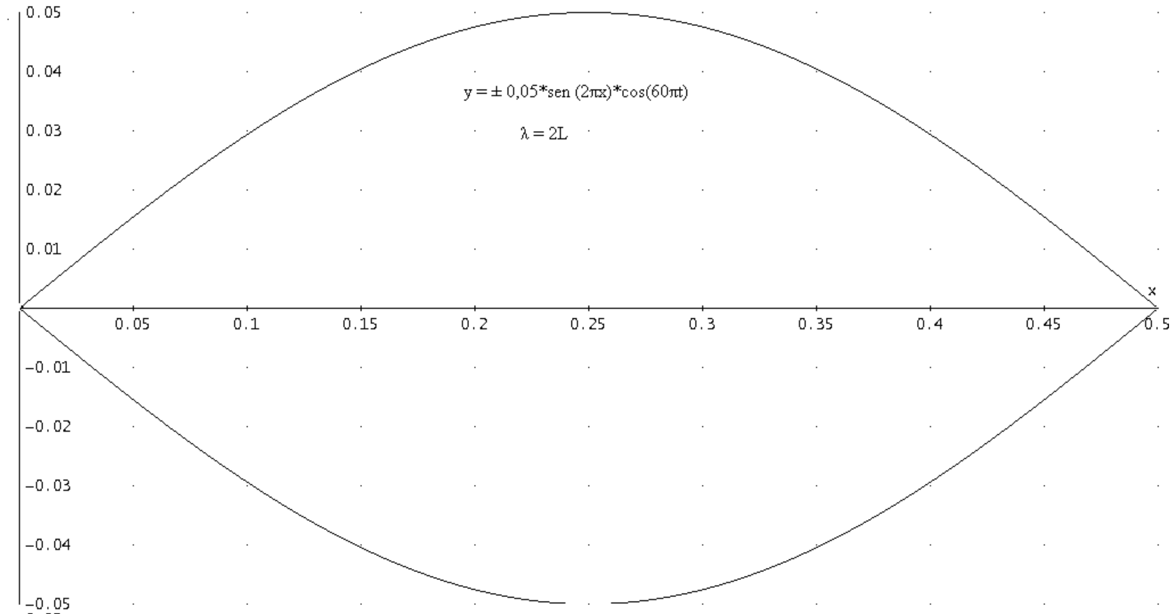
$$y_{total}(x,t) = 2A\,\text{sen}(kx)\cos(\omega t) \quad \{y = 0,05\,\text{sen}(2\pi x)\cos(60\pi t)\}$$

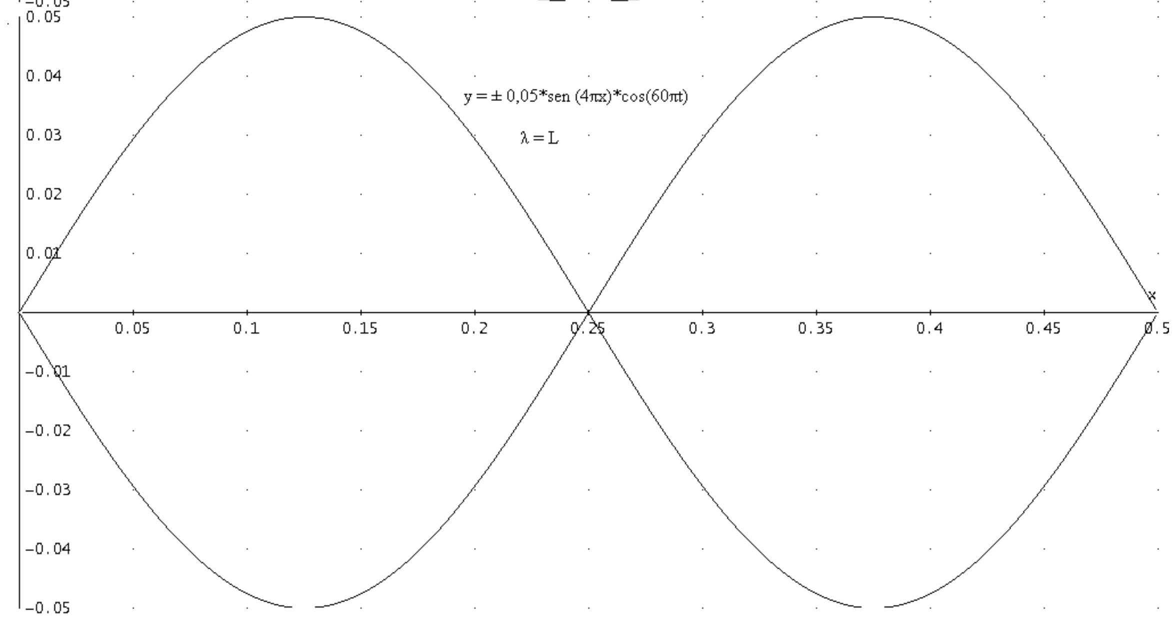
$$\{2A = 0,05\,\text{m}\}\left\{k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{2\pi}{2L} = \frac{\pi}{0,5} = 2\pi\,\tfrac{\text{rad}}{\text{m}}\right\}\left\{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu_{cuerda} = 60\pi\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}}\right\}$$

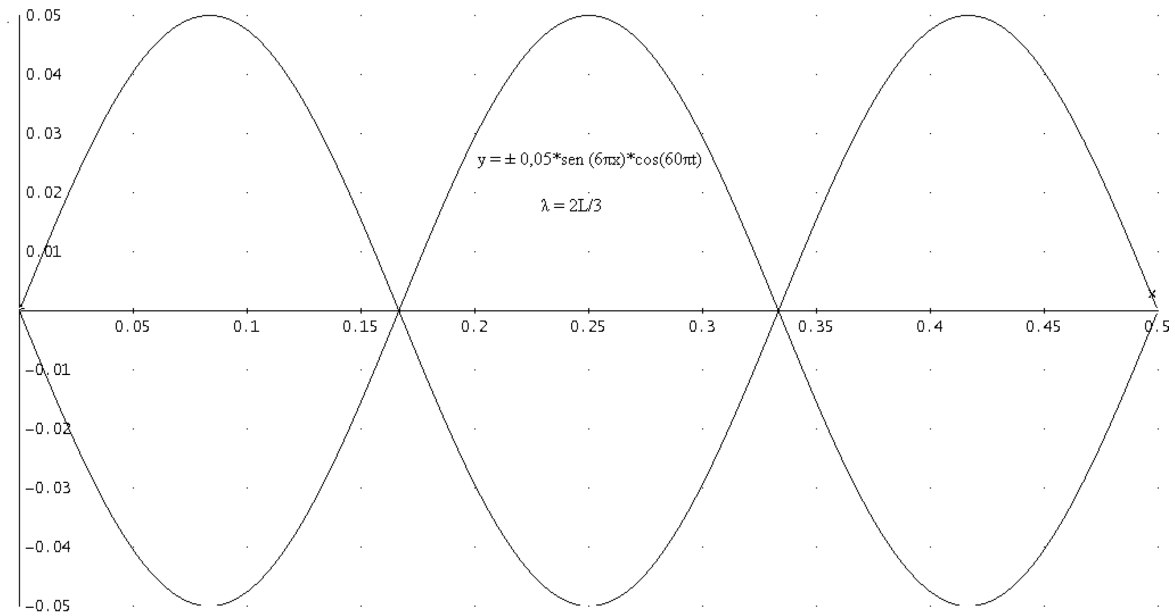
$$\left\{\begin{array}{l} y_{total}(0,t) = 0 = 2A\,\text{sen}(k\cdot 0)\cos(\omega t) \\ \text{sen}(k\cdot 0) = 0 \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} y_{total}(L,t) = 0 = 2A\,\text{sen}(kL)\cos(\omega t) \\ \text{sen}(kL) = 0 \end{array}\right\}$$

$$\{kL = n\pi\,(n = 0,1,2,...)\} \quad \left\{L = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}} = n\frac{\lambda}{2}\right\} \quad \left\{\lambda = \frac{2L}{n}\right.$$

$$\lambda = \frac{2L}{n} \quad \left\{\lambda_1 = 2L\,; \quad \lambda_2 = L\,; \quad \lambda_3 = \frac{2}{3}L\,; ...\right\} \quad \nu_{cuerda} = \frac{c}{\lambda} = \frac{n\cdot c}{2L}$$


y = ± 0,05*sen (2πx)*cos(60πt)
λ = 2L
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
−0.01
−0.02
−0.03
−0.04
−0.05
0.05 0.1 0.15 0.2 0.25 0.3 0.35 0.4 0.45 0.5
x


y = ± 0,05*sen (4πx)*cos(60πt)
λ = L
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
−0.01
−0.02
−0.03
−0.04
−0.05
0.05 0.1 0.15 0.2 0.25 0.3 0.35 0.4 0.45 0.5
x



5.18 Ondas electromagnéticas. Espectro electromagnético

Las ondas electromagnéticas fueron predichas por J.C. Maxwell en 1873 como resultado del análisis realizado con lo que se conoce con el nombre de las ecuaciones de Maxwell o ecuaciones del campo electromagnético. La interacción electromagnética entre las partículas que componen la materia está asociada con una propiedad llamada carga eléctrica. La interacción electromagnética se describe por el campo electromagnético, caracterizado por dos vectores, el campo eléctrico y el campo magnético o de inducción magnética.

Ecuaciones de Maxwell:

1ª: Ley de Gauss para el campo eléctrico: $\Phi = \oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$

$$\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS = \oint\!\!\oint\!\!\oint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,dV \quad \left\{\Phi = \oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \oint\!\!\oint\!\!\oint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}dV\right\}$$

$$\left\{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \tfrac{\partial}{\partial x}E_x + \tfrac{\partial}{\partial y}E_y + \tfrac{\partial}{\partial z}E_z = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right\} \quad \begin{cases}\rho = 0\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0\end{cases}$$

2ª: Ley de Gauss para el campo magnético $\Phi = \oint\!\!\oint_S \vec{B}\cdot\vec{n}\,dS = 0$

$$\Phi = \oint\!\!\oint_S \vec{B}\cdot\vec{n}\,dS = 0 \quad \left\{\oint\!\!\oint_S \vec{B}\cdot\vec{n}\,dS = \oint\!\!\oint\!\!\oint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{B}\,dV\right\} \quad \left\{\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \tfrac{\partial}{\partial x}B_x + \tfrac{\partial}{\partial y}B_y + \tfrac{\partial}{\partial z}B_z = 0\right.$$

3ª: Ley de Lenz-Faraday de la inducción electromagnética: $\varepsilon = -\dfrac{d\Phi_m}{dt} = -\dfrac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot\vec{n}\,dS$

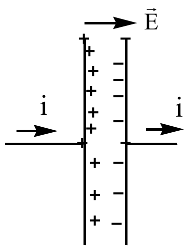
$$\varepsilon = \oint_L \vec{E}'\cdot d\vec{l} = \iint_S \left(\vec{\nabla}\times\vec{E}'\right)\cdot\vec{n}\,dS = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot\vec{n}\,dS \quad \left\{\vec{\nabla}\times\vec{E}' = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right.$$

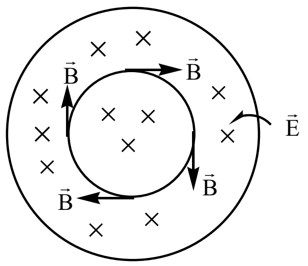
4ª: Ley de **Ampère-Maxwell**: $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\iint \vec{E}\cdot d\vec{S}$

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \iint_S \left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{n}\,dS = \mu_0\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\iint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS \quad \left\{\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right.$$

La 4ª ley de Ampère-Maxwell es simétrica a la ley de Lenz-Faraday. Por esta última sabemos que la variación de flujo magnético induce un campo eléctrico, y por la ley de Ampère-Maxwell sabemos que la variación de flujo eléctrico induce un campo magnético.

Como ejemplo considera un condensador, de placas paralelas y circulares, que se está cargando con una intensidad, i, de corriente eléctrica. Por lo que entre las placas está aumentando el campo eléctrico. En la figura de la derecha vemos la placa de la derecha del condensador, en la que se representa el sentido del campo eléctrico hacia detrás del papel. Si consideramos un lazo circular concéntrico al capacitor, al estar el campo eléctrico cambiando través del lazo está cambiando también el flujo eléctrico a través del mismo, por lo que se induce un campo magnético alrededor del lazo.





$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \iint_S \left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{n}dS = \mu_0\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\iint_S \vec{E}\cdot\vec{n}dS$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

<u>Ecuación de onda electromagnética</u>:

Con las ecuaciones de Maxwell 3ª y 4ª, que son dos ecuaciones que varían con el tiempo, son matemáticamente suficientes para obtener separadamente las ecuaciones de onda para los campos eléctrico y magnético, E y B: $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, y $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$.

Estas ecuaciones demuestran que las variaciones de E en tiempo y espacio afectan a B, y viceversa. E y B no pueden considerarse magnitudes aisladas aunque sean independientes.

Consideremos un sistema de ondas planas en el plano XY como aquella región en la que las propiedades ondulatorias son constantes. Estas propiedades no variarán con respecto a X y Y y todas las derivadas $\frac{\partial}{\partial x}$ y $\frac{\partial}{\partial y}$ serán cero:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left[\tfrac{\partial}{\partial y}E_z - \tfrac{\partial}{\partial z}E_y\right]\vec{i} - \left[\tfrac{\partial}{\partial x}E_z - \tfrac{\partial}{\partial z}E_x\right]\vec{j} + \left[\tfrac{\partial}{\partial x}E_y - \tfrac{\partial}{\partial y}E_x\right]\vec{k}$$

$$\left[\tfrac{\partial}{\partial y}E_z - \tfrac{\partial}{\partial z}E_y\right]\vec{i} - \left[\tfrac{\partial}{\partial x}E_z - \tfrac{\partial}{\partial z}E_x\right]\vec{j} + \left[0\right]\vec{k} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}\vec{i} - \frac{\partial B_y}{\partial t}\vec{j} - \frac{\partial B_z}{\partial t}\vec{k} \quad \left\{-\frac{\partial B_z}{\partial t} = 0\right.$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \tfrac{\partial}{\partial x}B_x + \tfrac{\partial}{\partial y}B_y + \tfrac{\partial}{\partial z}B_z = 0 \quad \left\{\tfrac{\partial}{\partial z}B_z = 0\right\} \quad \left\{B_z = 0\right.$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=\left[\tfrac{\partial}{\partial y}B_z-\tfrac{\partial}{\partial z}B_y\right]\vec{i}-\left[\tfrac{\partial}{\partial x}B_z-\tfrac{\partial}{\partial z}B_x\right]\vec{j}+\left[\tfrac{\partial}{\partial x}B_y-\tfrac{\partial}{\partial y}B_x\right]\vec{k}$$

$$\left[\tfrac{\partial}{\partial y}B_z-\tfrac{\partial}{\partial z}B_y\right]\vec{i}-\left[\tfrac{\partial}{\partial x}B_z-\tfrac{\partial}{\partial z}B_x\right]\vec{j}+\left[0\right]\vec{k}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t}\vec{i}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E_y}{\partial t}\vec{j}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E_z}{\partial t}\vec{k}\quad\left\{\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E_z}{\partial t}=0\right.$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\tfrac{\partial}{\partial x}E_x+\tfrac{\partial}{\partial y}E_y+\tfrac{\partial}{\partial z}E_z=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\quad\{\rho=0\}\quad\left\{\tfrac{\partial}{\partial z}E_z=0\right\}\quad\{E_z=0$$

La ausencia de variación en B_z y E_z significa que las oscilaciones o variaciones en B y E tienen lugar en direcciones perpendiculares a la dirección z. Lo que nos llevará a que las ondas electromagnéticas son ondas transversales. Si añadimos la simplificación de que las ondas están polarizadas eligiendo que el campo E solamente lo haga en el eje x, por lo que $E_y = 0$:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\Rightarrow\left\{\frac{\partial}{\partial z}E_x\vec{j}=-\frac{\partial B_y}{\partial t}\vec{j}\right\}\qquad\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\Rightarrow\left\{\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t}\vec{i}=-\frac{\partial}{\partial z}B_y\vec{i}\right\}$$

Usando la propiedad: $\dfrac{\partial^2}{\partial z\partial t}=\dfrac{\partial^2}{\partial t\partial z}$, obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Rightarrow\left\{\frac{\partial^2}{\partial t\partial z}E_x=-\frac{\partial^2}{\partial t^2}B_y\right\}\quad\frac{\partial}{\partial z}\Rightarrow\left\{\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial z\partial t}E_x=-\frac{\partial^2}{\partial z^2}B_y\right\}\Rightarrow\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}B_y=\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\frac{\partial^2}{\partial z^2}B_y\right.$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\Rightarrow\left\{\frac{\partial^2}{\partial z^2}E_x=-\frac{\partial^2}{\partial z\partial t}B_y\right\}\quad\frac{\partial}{\partial t}\Rightarrow\left\{\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_x=-\frac{\partial^2}{\partial t\partial z}B_y\right\}\Rightarrow\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_x=\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\frac{\partial^2}{\partial z^2}E_x\right.$$

Siendo **las ecuaciones de las ondas**: $\left\{\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}B_y=c^2\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}B_y\right\}\ \left\{\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}E_x=c^2\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}E_x\right\}$, c es la velocidad de la onda, que en el vacío es: $c_0=\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=\dfrac{1}{\sqrt{4\pi10^{-7}\,\frac{H}{m}\times8{,}85\cdot10^{-12}\,\frac{F}{m}}}=2{,}998\cdot10^8\,\frac{m}{s}$.

Las soluciones de las ecuaciones de las ondas electromagnéticas para ondas planas:

$$E_x=E_m\,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{\lambda}(ct-z);\quad B_y=B_m\,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{\lambda}(ct-z)$$

Siendo la relación entre E_x y B_y:

$$\left\{\begin{matrix}E_x=E_m\,\mathrm{sen}\dfrac{2\pi}{\lambda}(ct-z)\\ B_y=B_m\,\mathrm{sen}\dfrac{2\pi}{\lambda}(ct-z)\end{matrix}\right\}\left\{\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial z}B_y\right\}\left\{\begin{matrix}\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial E_x}{\partial t}=\mu_0\varepsilon_0\dfrac{2\pi}{\lambda}cE_x\\ -\dfrac{\partial}{\partial z}B_y=+\dfrac{2\pi}{\lambda}B_y\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\mu_0\varepsilon_0cE_x=B_y\\ E_x=cB_y\\ \varepsilon_0E_x^2=\frac{1}{\mu_0}B_y^2\end{matrix}\right.$$

Intensidad de una onda electromagnética: Es la cantidad de energía que cruza la unidad de área en la unidad de tiempo.

Para obtener la expresión de la intensidad, I, recordamos que la energía total almacenada en un condensador a un potencial V, siendo A el área de las placas y d la distancia a que se encuentran:

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon A}{d}\right)E^2d^2 = \frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2\right)Ad$$

Por lo que la energía eléctrica por unidad de volumen almacenada en el condensador es $\frac{1}{2}\varepsilon E^2$, resultado del flujo de energía electromagnética durante el proceso de carga.

Para un dieléctrico la energía eléctrica por unidad de volumen en una onda electromagnética es igual a la energía magnética por unidad de volumen, y la energía total es la suma: $\frac{1}{2}\varepsilon E_x^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu}B_y^2$. Esta expresión nos da el valor instantáneo de la energía por unidad de volumen, por lo que el valor promedio de la energía por unidad de volumen es:

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon \overline{E}_x^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu}\overline{B}_y^2 = \frac{1}{4}\varepsilon E_m^2 + \frac{1}{4}\frac{1}{\mu}B_m^2 = \frac{1}{2}\varepsilon E_m^2 \quad \left\{\frac{F}{m}\times\frac{V^2}{m^2} = \frac{J}{m^3}\right.$$

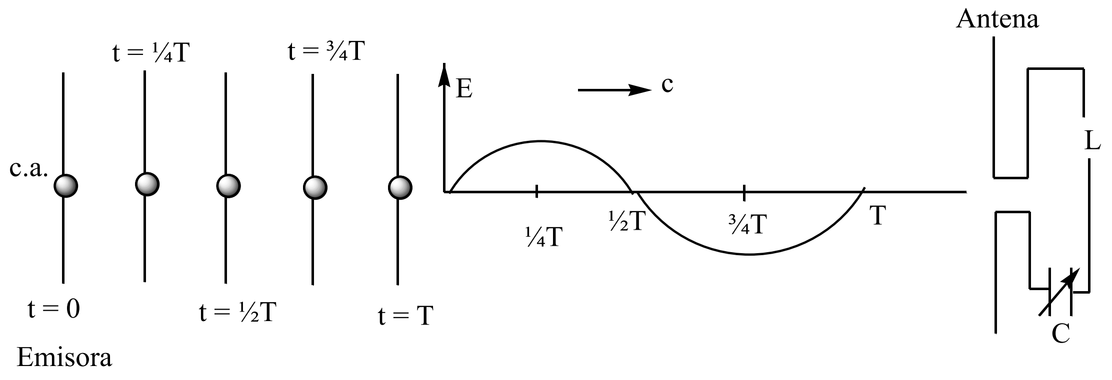
Siendo la Intensidad igual a:

$$\text{Intensidad} = \frac{\text{Flujo}}{\text{Superficie}} = \frac{\frac{U}{t}}{S} \equiv \frac{\frac{J}{s}}{m^2} = \frac{W}{m^2} = \frac{\frac{J}{s}m}{m^2\,m} = \frac{J}{m^3}\frac{m}{s}$$

$$I = \frac{1}{2}\varepsilon E_m^2 c \quad \left\{I = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E_m^2 = \frac{1}{2}c\frac{1}{\mu_0}B_m^2 \ \frac{W}{m^2}\right.$$

Generación y detección de las ondas electromagnéticas:

Casi al final del siglo XIX, Hertz demostró experimentalmente, que el campo electromagnético se propaga en el vacío a la velocidad de la luz. Tal como suponía Maxwell, Hertz originó las ondas electromagnéticas con campos eléctricos variables periódicamente, esto es, conectando dos varillas metálicas a los terminales de un generador de corriente alterna y, que van a servir de antena



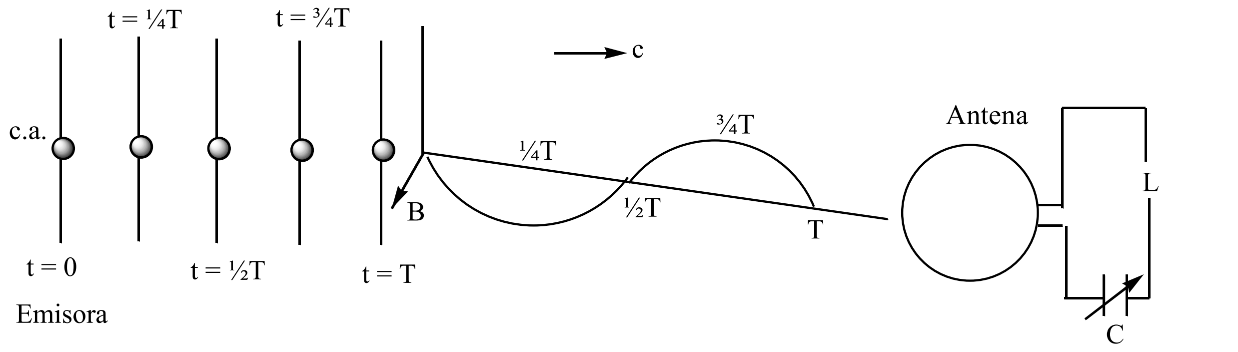
Análisis:

- El campo eléctrico E se crea por las cargas sobre las varillas de la antena emisora, y el flujo de las cargas constituye una corriente eléctrica que crea un campo magnético B ($E = c\cdot B$).

- La frecuencia de la onda electromagnética se determina por la frecuencia de la vibración de las cargas eléctricas en la fuente de la onda (el generador).

- El campo eléctrico E que llega a la antena receptora fuerza a los electrones a oscilar y se crea una corriente alterna que por ajuste del condensador se determina la frecuencia.

- El campo B de la onda se determina por la otra antena, que tiene forma de lazo para que el flujo magnético variable induzca una corriente eléctrica en el lazo.



Espectro electromagnético:

Las ondas electromagnéticas cubren un rango muy amplio de frecuencias y longitudes de onda por lo que se clasifican de acuerdo a sus principales fuentes y efectos cuando actúan sobre la materia.

- Radiofrecuencias: las longitudes de onda varían desde unos pocos km hasta 0,3 m y las frecuencias desde unos pocos Hz hasta 1 GHz. Estas ondas son usadas en TV y radio y son generadas por dispositivos electrónicos que son circuitos oscilantes.

- Microondas: las longitudes de onda varían desde 0,3 m hasta 1 mm y las frecuencias desde 1 GHz hasta 30 THz (30 Terahercios). Estas ondas son usadas en radar y otras comunicaciones.

- Infrarrojos: las longitudes de onda desde 1 mm hasta 780 nm y las frecuencias desde 30 THz hasta 0,4 PHz (Pentahercios). Son producidas por las moléculas a alta temperatura.

- Luz visible: las longitudes de onda desde 780 nm hasta 380 nm. Es producida por átomos y moléculas como resultado de su ajuste interno, principalmente de los electrones.

- Ultravioleta: las longitudes de onda desde 380 nm hasta 0,6 nm. Son producidas por átomos excitados y moléculas en descargas eléctricas. La energía asociada es del orden de la ionización atómica y la disociación molecular.

- Rayos X: las longitudes de onda desde 0,6 nm hasta 6 pm.

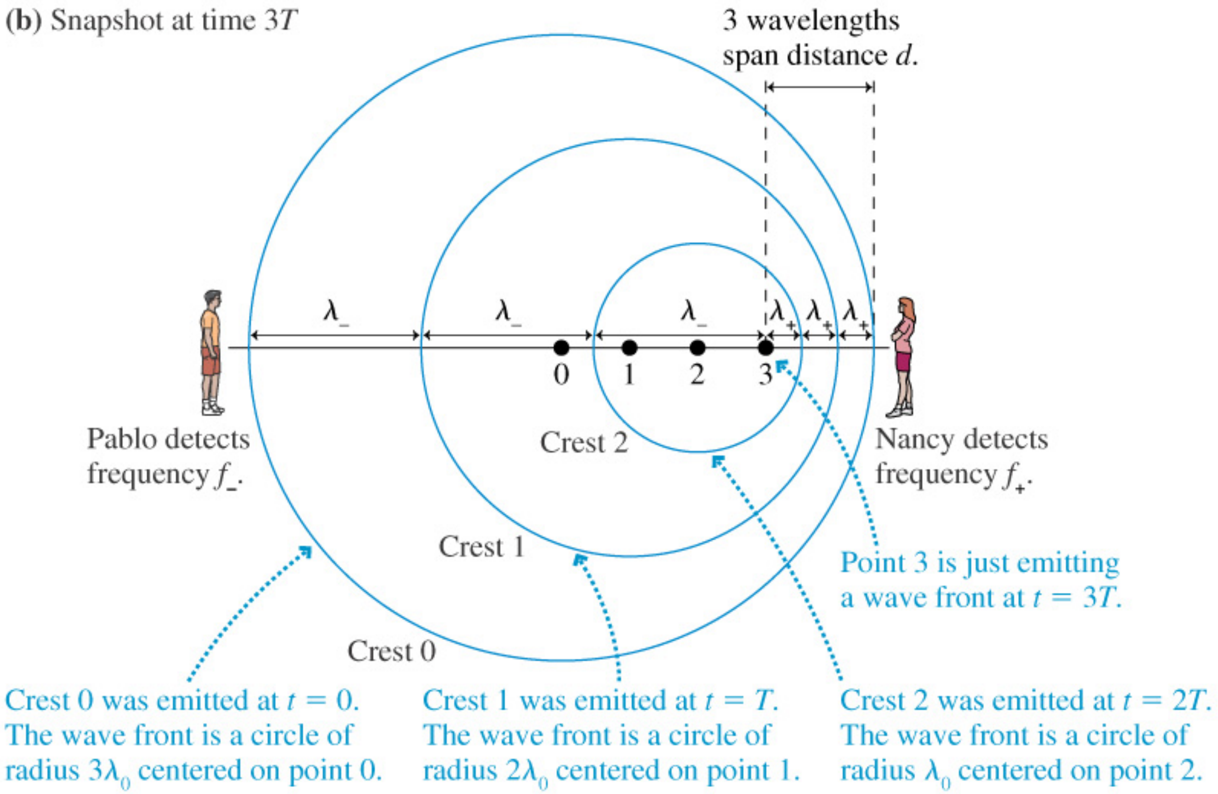
- Rayos gamma: de origen nuclear.

El efecto Doppler.-

Este efecto se pone de manifiesto cuando estamos en movimiento relativo con la fuente de la onda y se llama efecto Doppler. Este efecto lo notamos cuando percibimos el pitido de una ambulancia que se acerca y luego se aleja, cuando se acerca es mayor y cuando se aleja disminuye.

Si una fuente de sonido se mueve a una **velocidad $\mathbf{v_s}$** desde un punto 1 hacia un punto 2. Siendo v_s la velocidad de la fuente (source) no la velocidad de las ondas. La fuente cuando viaja está emitiendo ondas de sonido de frecuencia ν_0. La fuente viaja y podemos representarla por puntos 0,1,2,3 que indican t = 0, t = T, t = 2·T: t = 3·T; siendo $T = 1/\nu_0$ el período de las ondas.

Desde el punto 2, hacia donde se dirige la fuente se mide la frecuencia de la onda emitida por la fuente que se aproxima ν_+. Al mismo tiempo, desde el punto 1 se mide la frecuencia de la onda emitida alejándose como ν_-.



Ahora el objetivo es relacionar las frecuencias medidas de la fuente ν_- y ν_+, con la frecuencia de la fuente ν_0 y con la velocidad v_s.

Después de que la cresta de la onda salga de la fuente, su movimiento depende de las propiedades del medio. Es decir, el movimiento de la fuente no puede afectar a las ondas que ya ha emitido. Así cada frente de onda circular está centrado en el punto en el que fue emitido. La cresta de la onda emitida desde el punto 3 fue emitida justo cuando se hizo la figura, pero no le ha dado tiempo a viajar ninguna distancia.

Podemos ver que las crestas de las ondas están agrupadas en la dirección en la que la fuente se está moviendo, y estiradas detrás de ella. La distancia entre una cresta y la siguiente es una longitud de onda, así la longitud de onda λ_+ que mide desde el punto 2 es menor que la longitud de onda que sería emitida por la fuente si estuviera en reposo $\lambda_0 = v/\nu_0$. De la misma forma λ_- medida detrás de la fuente es mayor que λ_0.

Estas crestas se mueven a través del medio a la velocidad de la onda v. Consecuentemente, la frecuencia $\nu_+ = v/\lambda_+$ detectada por el observador 2 hacia el que se aproxima la fuente es superior que la frecuencia ν_0 emitida por la fuente. Similarmente, $\nu_- = v/\lambda_-$ detectada detrás de la fuente es menor que la frecuencia ν_0.

Este cambio de frecuencia cuando una fuente se mueve respecto de un observador se llama el efecto Doppler.

La longitud de onda detectada por el punto 2 hacia donde va la fuente es $\lambda_+ = d/3$, donde d es la diferencia entre la distancia recorrida por la onda y la fuente en el tiempo t = 3T. Estas distancias son:

$\Delta x_{onda} = vt = 3vT$

$\Delta x_{fuente} = v_s t = 3v_s T$

Así la longitud de onda de la onda emitida por una fuente aproximándose es:

$\lambda_+ = d/3 = (\Delta x_{onda} - \Delta x_{fuente})/3 = (3vT - 3v_sT)/3 = (v - v_s)\cdot T$

Podemos comprobar que la elección arbitraria de tres períodos no es relevante porque el 3 se cancela.

Las frecuencias detectadas hacia la dirección del punto 2 es:

$\nu_+ = v/\lambda_+ = v/[(v - v_s)\cdot T] = v\cdot\nu_0/(v - v_s)$

<u>Frecuencias detectadas por un observador fijo</u>:

Fuente aproximándose: $\nu_+ = \nu_0/(1 - v_s/v)$

Fuente alejándose: $\nu_- = \nu_0/(1 + v_s/v)$

Frecuencias detectadas por un observador moviéndose a una velocidad v_0 relativa a una fuente estacionaria emitiendo a una frecuencia ν_0:

Aproximándose $\nu_+ = (1 + v_s/v)\ \nu_0$

Alejándose: $\nu_- = (1 - v_s/v)\ \nu_0$

El efecto Doppler para ondas de luz:

El efecto Doppler se observa en todos los tipos de ondas, no solamente en las ondas de sonido. Si una fuente de ondas de luz se alejando de nosotros la longitud de onda λ_- que detectamos es mayor que la longitud de onda λ_0 emitida por la fuente. Cuando la longitud de onda se desplaza hacia el rojo del espectro visible, que son las mayores longitudes de onda de la luz, este efecto se llama desplazamiento hacia el rojo. El caso contrario es un desplazamiento hacia el azul, a longitudes de ondas más cortas.

Aunque la razón del desplazamiento de la luz es el mismo que con las ondas de sonido, hay una diferencia fundamental. Para el sonido hemos obtenido las ecuaciones del efecto Doppler por medida de la velocidad de la onda v relativa al medio. Para el electromagnetismo las ondas en el espacio está vacío y no hay medio. Por lo que habrá que utilizar la teoría de la relatividad de Einstein para determinar la frecuencia de ondas de luz desde una fuente moviéndose:

$$\lambda_{red} = \sqrt{\frac{1+\frac{v_s}{c}}{1-\frac{v_s}{c}}}\cdot\lambda_0$$

$$\lambda_{blue} = \sqrt{\frac{1-\frac{v_s}{c}}{1+\frac{v_s}{c}}}\cdot\lambda_0$$

Problemas de «Ondas»

1) Un movimiento ondulatorio, que se propaga a lo largo del eje OX, tiene de período $3\cdot10^{-3}$ s. Los dos puntos más próximos, cuya diferencia de fase es de $\frac{1}{2}\pi$ rad, se encuentran a 30 cm. Calcule: a) la longitud de onda; b) la velocidad de propagación. [a) 1,2 m; b) 400 m/s]

2) Escribe la expresión de una onda sinusoidal que se propaga por una cuerda en el sentido positivo del eje OX, con las siguientes características: la amplitud de 2 cm, la frecuencia de 60 Hz y la velocidad de propagación de 10 m/s. [$y(x,t) = 0,02\cos 2\pi(60t - 6x)\,m$]

3) La ecuación de una onda transversal es $y(z,t) = 10\,\text{sen}(2\pi t - 10\pi z)$ en el S.I. de unidades. Calcule: a) la velocidad de propagación de la onda; b) la velocidad y la aceleración máxima de las partículas de la cuerda; c) la frecuencia, el período, la pulsación, el vector de onda y la longitud de onda. [a) 0,2 m/s; b) 20π m/s y $40\pi^2$ m/s^2 ; c) 1 Hz; 1 s; 2π rad/s ; 10π rad/m; 0,20 m]

4) Una onda sinusoidal se propaga a lo largo de una cuerda. El tiempo que transcurre entre el instante de elongación máxima y el de elongación nula en un punto de la cuerda es de 0,17 s. Calcule: a) el período y la frecuencia de la onda; b) la velocidad de propagación de la onda si su longitud de onda es de 1,4 m. [a) 0,68 s; 1,47 Hz; b) 2,06 m/s]

5) Una onda longitudinal se propaga a lo largo de un resorte en el sentido negativo del eje OX y la distancia entre los dos puntos más próximos en fase es de 20 cm. El foco emisor, fijo a un extremo del resorte vibra con una amplitud de 3 cm y una frecuencia de 25 Hz. Determinar: a) la velocidad de propagación de la onda; b) la expresión de la onda sabiendo que la perturbación en el instante inicial en x = 0 es nula; c) velocidad y aceleración máximas de un punto del resorte. [a) -5 m/s; b) $y(x,t) = 0,03\,\text{sen}\, 2\pi(25t + 5x)\,m$; c) $1,5\pi$ m/s y $75\pi^2$ m/s^2]

6) Calcula la perturbación resultante, en el punto x = 0,4 m, al superponerse las dos ondas: $y_1 = 0,04\,\text{sen}(2\pi t - 0,5\pi x)$, $y_2 = 0,04\,\text{sen}(2\pi t - 0,5\pi x + \frac{\pi}{6})$. $\left[y = 0,08\cos(\frac{\pi}{12})\text{sen}(2\pi t - 0,12\pi)\right]$

7) Escribe la expresión de la onda resultante si en un medio interfieren las dos ondas (y_1; y_2). Posteriormente determina sus características. $y_1 = 0,04\,\text{sen}\,\pi(2t - 0,1x)$, $y_2 = 0,04\,\text{sen}\,\pi(2t + 0,1x)$. [$y_r = 0,08\cos(0,1\pi x)\text{sen}(2\pi t)$]

8) La vibración de una cuerda viene descrita por la expresión: $y = 0,5\,\text{sen}(\frac{1}{3}\pi x)\cos(40\pi t)$, donde los valores x,y en centímetros y t en segundos. Calcular: a) la distancia entre los nodos; b) la velocidad de una partícula de la cuerda situada en $x = 1,5$ cm en el instante $t = 9/8$ s: c) la amplitud y la velocidad de propagación de las ondas cuya superposición podría generar la vibración. [a) 3 cm; b) 0 cm/s; c) 0,25 cm y 120 cm/s]

9) La ecuación de una onda transversal en una cuerda es: $y = 10\cos\pi(2x - 10t)$, siendo x,y en cm y t en segundos. a) Escribe la expresión de la onda que, al interferir con ella, produciría una onda estacionaria; b) indica la distancia entre nodos de dicha onda y la amplitud en un antinodo. [a) igual con signo +; b) 0,5 cm; 20 cm]

10) Una onda transversal se propaga por una cuerda: $y = 0,4\cos(100t - 0,5\pi x)$ en el S.I. Calcula: a) la longitud de onda y la velocidad de la onda; b) el estado de perturbación de la partícula a 20 cm en el tiempo 0,5 s después de empezar la vibración. [a) 4 m; 63,66 m/s; b) 0,38 m]

11) La ecuación de una onda viene dada en el S.I. por: $y = 0,5\cos 4\pi(10t - x)$. Calcula la diferencia de fase que existirá entre dos puntos del medio de propagación separados por la distancia de 0,5 m y por la distancia de 0,25 m. [En fase 2π rad; en oposición de fase π rad]

12) Sean las ondas: $y_1 = 0,3\cos(200t - 0,05x_1)$, $y_2 = 0,3\cos(200t - 0,05x_2)$. Halla la onda resultante de la interferencia de las dos ondas. Posteriormente, determina la amplitud resultante en un punto a 10 m (x_1) y a 12,5 m (x_2) de los centros emisores. [y_r = 0,6·cos [200t – 0,025(x_1 + x_2)]·cos [0,025(x_2 – x_1)]; 0,60 m]

13) Sean las ondas: $y_1 = 0,04\,\text{sen}(50t - 0,5x)$, $y_2 = 0,04\,\text{sen}(50t + 0,05x)$ en unidades del SI. Halla la onda resultante de la interferencia de las ondas siguientes. Posteriormente determina la velocidad de propagación de cada onda y la distancia de separación entre los nodos 2º y 5º. [y_r = 0,08·cos (0,5x)·sen (50t); +100 m/s y -100 m/s; 18,85 m]

14) La ecuación: $y = 2\,\text{sen}\,2\pi(10t - 0,1x)$, en unidades del SI es la de una onda transversal que se propaga en una cuerda tensa. Determina: a) período, longitud de onda y velocidad de propagación de la onda; b) velocidad y aceleración máximas de un punto de la cuerda. [a) 0,10 s; 10 m; 100 m/s; b) 125,66 m/s y 7.895,7 m/s^2]

15) Una cuerda tensa de 0,50 m de longitud, con sus extremos fijos, vibra con una frecuencia de valor 30 Hz, en su modo fundamental. La amplitud del antinodo es de 0,05 m. a) Escribe la ecuación de la onda estacionaria. b) Calcula la velocidad máxima del punto medio de la cuerda y la velocidad de propagación de una onda viajera transversal que se propaga en dicha cuerda. [a) $y = 0,05\,\text{sen}(2\pi x)\cos(60\pi t)$; b) -9,4 m/s; 30 m/s]

16) Una onda transversal de 0,05 m de amplitud y 600 Hz se propaga en el sentido negativo del eje OX con una velocidad de 300 m/s. a) Escribe la ecuación de la onda si en t = 0 la elongación en el punto x = 0 es máxima. b) Calcula el cambio de fase, en una misma posición, al cabo de dos segundos y el desfase entre las elongaciones, en un mismo instante, en dos posiciones distantes 100 m. [a) $y = 0,05\cos(1200\pi t + 4\pi x)$; b) 2.400π rad; 400π rad]

17) La ecuación: $y = 0,4\,\text{sen}\,\pi(100t - 4x)$, en unidades del SI, corresponde a una onda transversal que se propaga a lo largo de una cuerda. Determine: a) la velocidad de propagación de la onda, la longitud de onda y el sentido de propagación; b) la velocidad máxima de una partícula de la cuerda y los instantes en que el punto que está a 5 cm del origen alcanza dicha velocidad máxima. [a) 25 m/s; ½ m; +OX; b) 40π m/s; 0,002 + n·0,01 s (n = 0,1,2,)]

18) La ecuación de una onda es $y = 3\cos\pi(6t + 6x)$ SI. Determine: a) las características de esta onda; b) calcule la elongación y la velocidad de un punto situado a 1 m del foco 1s después de iniciarse el movimiento ondulatorio. [a) Amplitud de 3 m, frecuencia de 3 Hz, número de onda de 3 m^{-1}, velocidad de la onda 1 m/s; b) la elongación es de 3 m]

19) Una onda electromagnética cuya frecuencia es de 10^{14} Hz y cuyo campo eléctrico de 2 V/m de amplitud, está polarizado en la dirección del eje OY, se propaga en el vacío, en el sentido negativo del eje OX. a) Escribe la expresión del campo eléctrico de la onda electromagnética; b) calcula la longitud de onda e indica la dirección del campo magnético de la onda. [a) $E = 2\frac{V}{m}\,\text{sen}\,2\pi\left(10^{14}t + \frac{1}{3}10^{6}x\right)$; b) $3\cdot10^{-6}$ m en OZ]

20) Considera la siguiente onda: y (x,t) = A sen (bt – cx). a) ¿Qué representan los coeficientes A, b, c?; ¿cuáles son sus unidades?; b) ¿qué interpretación tendría que la función fuera coseno en lugar de seno?, ¿y que el signo dentro del paréntesis fuera más en lugar de menos?.

21) a) Explique los fenómenos de reflexión y refracción de la luz. b) El índice de refracción del agua respecto del aire n > 1. Razone cuáles de las siguientes magnitudes cambian, y cómo, al pasar un haz de luz del aire al agua: frecuencia, longitud de onda, velocidad de propagación.

22) Los rayos X, la luz visible y los rayos infrarrojos son radiaciones electromagnéticas. Ordénelas en orden creciente de sus frecuencias e indique algunas diferencias entre ellas. ¿Qué es una onda electromagnética?. Explique sus características.

23) Considere la onda estacionaria: $y(x,t) = A\cos(bx)\operatorname{sen}(ct)$. a) ¿Qué representan los coeficientes A, b, c?, ¿cuáles son sus unidades?, ¿cuál es el significado del factor Acos(bx)?; b) ¿qué son los vientres y los nodos?, ¿qué distancia hay entre vientres y nodos consecutivos?.

24) Haga un análisis cualitativo de las ondas estacionarias indicando cómo se producen, qué las caracteriza y qué las diferencia de las ondas viajeras. En una cuerda se forma una onda estacionaria. Explique por qué no se transmite energía a lo largo de la cuerda.

25) Un rayo de luz pasa del agua al aire con un ángulo de incidencia de 30º respecto a la normal. Dibuje en un esquema los rayos incidente y refractado y calcule el ángulo de refracción. ¿Cuál debería ser el ángulo de incidencia para que el rayo refractado fuera paralelo a la superficie de separación agua-aire?. Dato: índice de refracción del agua respecto al aire n = 1,3. [40,5º en el agua; 50,3º el ángulo de incidencia]

26) Una onda plana viene dada por la ecuación: $y(x,t) = 2\cos(100t - 5x)\,\text{SI}$. a) Haga un análisis razonado del movimiento ondulatorio representado por la ecuación anterior y explique si es longitudinal o transversal y cuál es su sentido de propagación; b) calcule la frecuencia, el período, la longitud de onda y el número de onda, así como el módulo, dirección y sentido de la velocidad de propagación de la onda. [a) onda transversal de amplitud 2 m y con sentido de propagación +X; b) la frecuencia 15,9 Hz, el período 0,0628 s, longitud de onda 1,26 m y el número de onda 0,79 m^{-1}, la velocidad de la onda +20 m/s]

27) Un haz de luz de $5{,}0\cdot 10^4$ Hz viaja por el interior de un diamante. a) Determine la velocidad de propagación y la longitud de onda de esa luz en el diamante. b) Si la luz emerge del diamante al aire con un ángulo de refracción de 10º, dibuje la trayectoria del haz y determine el ángulo de incidencia. Datos: $c = 3\cdot 10^8$ m/s; $n_{diamante} = 2{,}42$. [a) $1{,}24\cdot 10^8$ m/s; 2.480 m; b) 4,11º]

28) Un rayo de luz monocromática incide en una de las caras de una lámina de vidrio, de caras planas y paralelas, con un ángulo de incidencia de 30º. La lámina está situada en el aire, su espesor es de 5 cm y su índice de refracción 1,5. a) Dibuje el camino seguido por el rayo y calcule el ángulo que forma el rayo que emerge de la lámina con la normal. b) Calcule la longitud recorrida por el rayo en el interior de la lámina. [a) 30º; b) 5,3 cm]

29) La ecuación de una onda es: y(x,t) = 0,16·cos(0,8x)·cos(100t) (SI). a) Con la ayuda de un dibujo, explique las características de dicha onda. b) Determine la amplitud, longitud de onda, frecuencia y velocidad de propagación de las ondas cuya superposición podría generar dicha onda.

30) El láser de un reproductor de CD genera luz con una longitud de onda de 780 nm medida en el aire. a) Explique qué características de la luz cambian al penetrar en el plástico del CD y calcule la velocidad de la luz en él. b) Si la luz láser incide en el plástico con un ángulo de 30º, determine el ángulo de refracción. Datos: $c = 3·10^8$ m/s; $n_{aire} = 1$; $n_{plástico} = 1,55$. [a) $1,9355·10^8$ m/s; b) 18,82º]

31) Indique si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, razonando las respuestas: a) La velocidad de propagación de una onda armónica es proporcional a su longitud de onda. b) Cuando una onda incide en la superficie de separación de dos medios, las ondas reflejada y refractada tienen igual frecuencia e igual longitud de onda que la onda incidente.

32) a) ¿Cuál es la longitud de onda de una estación de radio que emite con una frecuencia de 100 MHz?. b) Si las ondas emitidas se propagaran por el agua, razone si tendrían la misma frecuencia y la misma longitud de onda. En el caso de que varíe alguna de estas magnitudes, determine su valor. Datos: $c = 3·10^8$ m s $^{-1}$; $n_{agua/aire} = 1,3$.

33) Un rayo de luz pasa de un medio a otro, e n el que se propaga a mayor velocidad. a) Indique cómo varían la longitud de onda, la frecuencia y el ángulo que forma dicho rayo con la normal a la superficie de separación, al pasar del primero al segundo medio. b) Razone si el rayo de luz pasará al segundo medio, independientemente de cuál sea el valor del ángulo de incidencia.

34) a) Razone si tres haces de luz visible de colores azul, amarillo y rojo, respectivamente: i) tienen la misma frecuencia; ii) tienen la misma longitud de onda; iii) se propagan en el vacío con la misma velocidad. ¿Cambiaría alguna de estas magnitudes al propagarse en el agua?. b) ¿Qué es la reflexión total de la luz? ¿Cuándo puede ocurrir?.

35) Un rayo de luz monocromática incide en una de las caras de una lámina de vidrio, de caras planas y paralelas, con un ángulo de incidencia de 30º. La lámina está situada en el aire, su espesor es de 5 cm y su índice de refracción 1,5. a) Dibuje el camino seguido por el rayo y calcule el ángulo que forma el rayo que emerge de la lámina con la normal. b) Calcule la longitud recorrida por el rayo en el interior de la lámina.

36) a) Explique los fenómenos de reflexión y refracción de la luz con ayuda de un esquema. b) Un haz de luz pasa del aire al agua. Razone cómo cambian su frecuencia, longitud de onda y velocidad de propagación.

37) El ángulo límite vidrio-agua es de 60º. Un rayo de luz, que se propaga por el vidrio, incide sobre la superficie de separación con un ángulo de 45º y se refracta dentro del agua. a) Explique qué es el ángulo límite y determine el índice de refracción del vidrio. b) Calcule el ángulo de refracción en el agua. Dato: $n_{agua} = 1,33$.

38) Un foco luminoso puntual está situado bajo la superficie de un estanque de agua. a) Un rayo de luz pasa del agua al aire con un ángulo de incidencia de 30º. Dibuje en un esquema los rayos incidente y refractado y calcule el ángulo de refracción. b) Explique qué es el ángulo límite y determine su valor para este caso. Datos: $n_{aire} = 1$; $n_{agua} = 1,33$.

39) Razone las respuestas a las siguientes cuestiones: a) Cuando un rayo pasa a un medio con mayor índice de refracción, ¿se acerca o se aleja de la normal?. b) ¿Qué es el ángulo límite? ¿Existe este ángulo en la situación anterior?.

40) a) Enuncie las leyes de la reflexión y de la refracción de la luz, explicando las diferencias entre ambos fenómenos. b) Un rayo de luz pasa de un medio a otro más denso. Indique cómo varían las siguientes magnitudes: amplitud, frecuencia, longitud de onda y velocidad de propagación.

41) Un haz de luz de $5·10^4$ Hz viaja por el interior de un diamante. a) Determine la velocidad de propagación y la longitud de onda de esa luz en el diamante. b) Si la luz emerge del diamante al aire con un ángulo de refracción de 10º, dibuje la trayectoria del haz y determine el ángulo de incidencia. Datos: $c = 3\cdot10^8$ m s $^{-1}$; $n_{diamante} = 2{,}42$.

42) Un teléfono móvil opera con ondas electromagnéticas de frecuencia $f = 9\cdot10^8$ Hz.a) Determine la longitud de onda y el número de onda en el aire. b) Si la onda entra en un medio en el que su velocidad de propagación se reduce a 3c/4, razone qué valores tienen la frecuencia y la longitud de onda en ese medio y el índice de refracción del medio. Datos: $c = 3\cdot10^8$ m s^{-1}; $n_{aire} = 1$.

43) Una antena emite una onda de radio de $6\cdot10^7$ Hz. a) Explique las diferencias entre esa onda y una onda sonora de la misma longitud de onda y determine la frecuencia de esta última. b) La onda de radio penetra en un medio material y su velocidad se reduce a 0,75 c. Determine su frecuencia y su longitud de onda en ese medio. Datos: $c = 3\cdot10^8$ m s^{-1}; v(sonido en el aire*)* = 340 m s^{-1}.

44) Un teléfono móvil opera con ondas electromagnéticas cuya frecuencia es $1{,}2\cdot10^9$ Hz. a) Determine la longitud de onda. b) Esas ondas entran en un medio en el que la velocidad de propagación se reduce a 5c/6. Determine el índice de refracción del medio y la frecuencia y la longitud de onda en dicho medio. Datos: $c = 3\cdot10^8$ m s^{-1}; $n_{aire} = 1$; $v_{sonido} = 340$ m s^{-1}.

45) Una onda electromagnética tiene en el vacío una longitud de onda de $5\cdot10^{-7}$ m. a) Explique qué es una onda electromagnética y determine la frecuencia y el número de onda de la onda indicada. b) Al entrar la onda en un medio material su velocidad se reduce a 3c/4. Determine el índice de refracción del medio y la frecuencia y la longitud de onda en ese medio. Datos: $c = 3\cdot10^8$ m s^{-1}.

46) Un radar emite una onda de radio de $6\cdot10^7$ Hz. a) Explique las diferencias entre esa onda y una onda sonora de la misma longitud de onda y determine la frecuencia de esta última. b) La onda emitida por el radar tarda $3\cdot10^{-6}$ s en volver al detector después de reflejarse en un obstáculo. Calcule la distancia entre el obstáculo y el radar. Datos: $c = 3\cdot10^8$ m s^{-1} ; $v_{sonido} = 340$ m s^{-1}.

Preguntas de teoría de Vibraciones y Ondas

1. Indique si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, razonando las respuestas: a) Si la aceleración de una partícula es proporcional a su desplazamiento respecto de un punto y de sentido opuesto, el movimiento de la partícula es armónico simple. b) En un movimiento armónico simple la amplitud y la frecuencia aumentan si aumenta la energía.

2. a) Enuncie y explique, utilizando los esquemas adecuados, las leyes de la reflexión y refracción de la luz. b) Un rayo láser pasa de un medio a otro, de menor índice de refracción. Explique si el ángulo de refracción es mayor o menor que el de incidencia ¿Podría existir reflexión total?

3. a) ¿Qué se entiende por refracción de la luz? Explique que es el ángulo límite y, utilizando un diagrama de rayos, indique cómo se determina. b) Una fibra óptica es un hilo transparente a lo largo del cual puede propagarse la luz, sin salir al exterior. Explique por qué la luz “no se escapa” a través de las paredes de la fibra.

4. Indique si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, razonando las respuestas: a) La velocidad de propagación de una onda armónica es proporcional a su longitud de onda. b) Cuando una onda incide en la superficie de separación de dos medios, las ondas reflejada y refractada tienen igual frecuencia e igual longitud de onda que la onda incidente.

5. a) Defina: onda, velocidad de propagación, longitud de onda, frecuencia, amplitud, elongación y fase. b) Dos ondas viajeras se propagan por un mismo medio y la frecuencia de una es doble que la de la otra. Explique la relación entre las diferentes magnitudes de ambas ondas.

6. a) Represente gráficamente las energías cinética, potencial y mecánica de una partícula que vibra con movimiento armónico simple. b) ¿Se duplicaría la energía mecánica de la partícula si se duplicase la frecuencia del movimiento armónico simple? Razone la respuesta.

7. a) Explique los fenómenos de reflexión y refracción de una onda. b) ¿Tienen igual frecuencia, longitud de onda y velocidad de propagación la onda incidente, la reflejada y la refractada?

8. a) Explique en qué consiste la reflexión total. ¿En qué condiciones se produce? b) ¿Por qué la profundidad real de una piscina llena de agua es mayor que la profundidad aparente?

9. a) Explique las diferencias entre ondas transversales y ondas longitudinales y ponga algún ejemplo. b) ¿Qué es una onda estacionaria? Comente sus características.

10. a) ¿Qué características debe tener una fuerza para que al actuar sobre un cuerpo le produzca un movimiento armónico simple? b) Represente gráficamente el movimiento armónico simple de una partícula dado por: $y = 5 \cos (10 t + \pi/2)$ (S I) y otro movimiento armónico que tenga una amplitud doble y una frecuencia mitad que el anterior.

11. a) Explique los fenómenos de reflexión y refracción de la luz. b) Describa, con la ayuda de un esquema, qué ocurre cuando un haz de luz monocromática incide con un cierto ángulo sobre una superficie de separación de dos medios de distinto índice de refracción. Si el segundo medio tiene menor índice de refracción que el primero, ¿podemos garantizar que se producirá siempre refracción?

12. a) Explique las diferencias entre ondas longitudinales y ondas transversales y ponga algún ejemplo de onda de cada tipo. b) ¿Qué es una onda estacionaria? Comente sus características.

13. Dos fenómenos físicos vienen descritos por las expresiones siguientes: $y = A\cdot \text{sen}\,(b\cdot t)$; $y = A\cdot \text{sen}\,(b\cdot t - c\cdot x)$; en las que "x" e "y" son coordenadas espaciales y "t" el tiempo. a) Explique de qué tipo de fenómeno físico se trata en cada caso e identifique los parámetros que aparecen en dichas expresiones, indicando sus respectivas unidades. b) ¿Qué diferencia señalaría respecto de la periodicidad de ambos fenómenos?

14. Considere la ecuación de onda: $y\,(x, t) = A\,\text{sen}\,(b\,t - c\,x)$. a) ¿Qué representan los coeficientes A, b y c? ¿Cuáles son sus unidades?. b) ¿Qué cambios supondría que la función fuera "cos" en lugar de "sen"? ¿Y que el signo dentro del paréntesis fuera "+" y no "-"?

15. a) ¿Cuáles son las longitudes de onda posibles de las ondas estacionarias producidas en una cuerda tensa, de longitud L, sujeta por ambos extremos? Razone la respuesta. b) ¿En qué lugares de la cuerda se encuentran los puntos de amplitud máxima? ¿Y los de amplitud nula? Razone la respuesta.

16. a) Explique, con ayuda de un esquema, los fenómenos de refracción de la luz y de reflexión total. b) El índice de refracción de las sustancias disminuye al aumentar la longitud de onda. ¿Se desviará más la luz roja o la azul cuando los rayos inciden en el agua desde el aire? Razone la respuesta.

17. Por una cuerda se propaga un movimiento ondulatorio caracterizado por la función de onda: $y = A\,\text{sen}\,2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)$. Razone a qué distancia se encuentran dos puntos de esa cuerda si: a) La diferencia de fase entre ellos es de π radianes. b) Alcanzan la máxima elongación con un retardo de un cuarto de periodo.

18. a) ¿Por qué la profundidad real de una piscina llena de agua es siempre mayor que la profundidad aparente? b) Explique qué es el ángulo límite y bajo qué condiciones puede observarse.

19. a) ¿Qué es una onda armónica o sinusoidal? ¿De cuáles de sus características depende la energía que transporta? b) ¿Qué diferencias existen entre el movimiento de una onda a través de un medio y el movimiento de las partículas del propio medio?

20. Razone las respuestas a las siguientes cuestiones: a) ¿En qué consiste la refracción de ondas? Enuncie sus leyes. b) ¿Qué características de la onda varían al pasar de un medio a otro?

21. La ecuación de una onda armónica en una cuerda tensa es: $y(x,t) = A\cdot \text{sen}\,(?\cdot t - k\cdot x)$. a) Indique el significado de las magnitudes que aparecen en dicha expresión. b) Escriba la ecuación de otra onda que se propague en la misma cuerda en sentido opuesto, de amplitud mitad y frecuencia doble que la anterior.

22. Un rayo de luz pasa de un medio a otro, en el que se propaga a mayor velocidad. a) Indique cómo varían la longitud de onda, la frecuencia y el ángulo que forma dicho rayo con la normal a la superficie de separación, al pasar del primero al segundo medio. b) Razone si el rayo de luz pasará al segundo medio, independientemente de cuál sea el valor del ángulo de incidencia.

23. Una partícula describe un movimiento armónico simple de amplitud A y frecuencia f. a) Represente en un gráfico la posición, la velocidad y la aceleración de la partícula en función del tiempo y comente sus características. b) Explique cómo varían la amplitud y la frecuencia del movimiento y la energía mecánica de la partícula al duplicar el periodo de oscilación.

24. a) Comente la siguiente afirmación: "las ondas estacionarias no son ondas propiamente dichas" y razone si una onda estacionaria transporta energía. b) Al arrojar una piedra a un estanque con agua y al pulsar la cuerda de una guitarra se producen fenómenos ondulatorios. Razone qué tipo de onda se ha producido en cada caso y comente las diferencias entre ambas.

25. a) Razone si tres haces de luz visible de colores azul, amarillo y rojo, respectivamente: i) tienen la misma frecuencia; ii) tienen la misma longitud de onda; iii) se propagan en el vacío con la misma velocidad. ¿Cambiaría alguna de estas magnitudes al propagarse en el agua?. b) ¿Qué es la reflexión total de la luz? ¿Cuándo puede ocurrir?

26. a) Explique los fenómenos de reflexión y refracción de la luz con ayuda de un esquema. b) Un haz de luz pasa del aire al agua. Razone cómo cambian su frecuencia, longitud de onda y velocidad de propagación.

27. a) Demuestre que en un oscilador armónico simple la aceleración es proporcional al desplazamiento pero de sentido contrario. b) Una partícula realiza un movimiento armónico simple sobre el eje OX y en el instante inicial pasa por la posición de equilibrio. Escriba la ecuación del movimiento y razone cuándo es máxima la aceleración.

28. Razone las respuestas a las siguientes cuestiones: a) Cuando un rayo pasa a un medio con mayor índice de refracción, ¿se acerca o se aleja de la normal?. b) ¿Qué es el ángulo límite? ¿Existe este ángulo en la situación anterior?

29. Un movimiento armónico simple viene descrito por la ecuación $x(t) = A\,\text{sen}(\omega t + \delta)$. a) Escriba la velocidad y la aceleración de la partícula en función del tiempo y explique cómo varían a lo largo de una oscilación. b) Deduzca las expresiones de las energías cinética y potencial en función de la posición y explique sus cambios a lo largo de la oscilación.

30. a) Explique qué es una onda armónica y escriba su ecuación. b) Una onda armónica es doblemente periódica. ¿Qué significado tiene esa afirmación? Haga esquemas para representar ambas periodicidades y coméntelos.

31. a) Enuncie las leyes de la reflexión y de la refracción de la luz, explicando las diferencias entre ambos fenómenos. b) Un rayo de luz pasa de un medio a otro más denso. Indique cómo varían las siguientes magnitudes: amplitud, frecuencia, longitud de onda y velocidad de propagación.

32. a) Defina qué es una onda estacionaria e indique cómo se produce y cuáles son sus características. Haga un esquema de una onda estacionaria y coméntelo. b) Explique por qué, cuando en una guitarra se acorta la longitud de una cuerda, el sonido resulta más agudo.

33. a) Explique qué son ondas estacionarias y describa sus características. b) En una cuerda se ha generado una onda estacionaria. Explique por qué no se propaga energía a través de la cuerda.

34. a) Describa el movimiento armónico simple y comente sus características cinemáticas y dinámicas. b) Una masa oscila verticalmente suspendida de un muelle. Describa los tipos de energía que intervienen y sus respectivas transformaciones.

35. a) Explique los fenómenos de reflexión y refracción de una onda en la superficie que separa dos medios. b) Razone qué magnitudes de una onda cambian cuando pasa de un medio a otro.

36. a) Describa los fenómenos de reflexión y de refracción de la luz. b) Explique las condiciones que deben cumplirse entre dos medios para que el rayo incidente no se refracte.

37. a) Qué mide el índice de refracción de un medio? ¿Cómo cambian la frecuencia y la longitud de onda de un rayo láser al pasar del aire a una lámina de vidrio?. b) Explique la dispersión de la luz por un prisma.

38. a) Enuncie las leyes de la reflexión y de la refracción de la luz. Explique qué es el ángulo límite e indique para qué condiciones puede definirse. b) ¿Tienen igual frecuencia, longitud de onda y velocidad de propagación el rayo incidente y el refractado? Razone la respuesta.

39. a) Escriba la ecuación de un movimiento armónico simple y explique el significado físico de cada una de las variables que aparecen en ella. b) ¿Cómo cambiarían las variables de dicha ecuación si se duplicaran el período de movimiento y la energía mecánica de la partícula.?

40. a) Razone qué características deben tener dos ondas, que se propagan por una cuerda tensa con sus dos extremos fijos, para que su superposición origine una onda estacionaria. b) Explique qué valores de la longitud de onda pueden darse si la longitud de la cuerda es L.

41. a) Explique qué magnitudes describen las periodicidad espacial y temporal de una onda e indique si están relacionadas entre sí. b) Razone qué tipo de movimiento efectúan los puntos de una cuerda por la que se propaga una onda armónica.

42. a) Explique los fenómenos de reflexión y refracción de la luz. b) ¿Tienen igual frecuencia, longitud de onda y velocidad de propagación la luz incidente, reflejada y refractada? Razone sus respuestas.

43. La ecuación de una onda armónica es: y(x,t) = A sen (bt – cx). a) Indique las características de dicha onda y lo que representa cada uno de los parámetros A, b y c. b) ¿Cómo cambiarían las características de la onda si el signo negativo fuera positivo?

44. a) Explique qué es un movimiento armónico simple y cuáles son sus características dinámicas. b) Razone cómo cambiarían la amplitud y la frecuencia de un movimiento armónico simple si: i) aumentara la energía mecánica, ii) disminuyera la masa oscilante.

45. a) Explique qué es el ángulo límite y qué condiciones deben cumplirse para que pueda observarse. b) Razone por qué la profundidad real de una piscina llena de agua es mayor que la profundidad aparente.

46. a) Explique qué son ondas longitudinales y transversales. b) ¿Qué diferencias señalaría entre las características de las ondas luminosas y sonoras?

47. a) Explique el fenómeno de dispersión de la luz. b) ¿Qué es el índice de refracción de un medio? Razone cómo cambian la frecuencia y la longitud de onda de una luz láser al pasar del aire al interior de una lámina de vidrio.

48. a) Escriba la ecuación de una onda estacionaria en una cuerda con sus dos extremos fijos, y explique el significado físico de cada una de los parámetros que aparecen en ella. b) Explique qué puntos de la cuerda del apartado anterior permanecen en reposo. ¿Qué puntos oscilan con amplitud máxima?

49. a) Explique los fenómenos de reflexión y refracción de una onda en la superficie de separación entre dos medios. b) ¿Son iguales la frecuencia, velocidad de propagación y longitud de onda de la luz incidente que las de la luz reflejada y transmitida? Razone la respuesta.

50. a) Escriba la ecuación de un movimiento armónico simple y explique el significado de cada una de las variables que aparecen en ella. b) ¿Cómo cambiarían las variables de dicha ecuación si el periodo del movimiento fuera doble? ¿Y si la energía mecánica fuera doble?

51. a) Describa con ayuda de un esquema los fenómenos de reflexión y refracción de la luz y enuncie sus leyes. b) Explique en qué consiste la reflexión total y en qué condiciones se produce.

52. a) Movimiento armónico simple; características cinemáticas y dinámicas. b) Un bloque unido a un resorte efectúa un movimiento armónico simple sobre una superficie horizontal. Razone cómo cambiarían las características del movimiento al depositar sobre el bloque otro de igual masa.

53. a) Movimiento armónico simple; características cinemáticas y dinámicas. b) Razone si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: En un movimiento armónico simple la amplitud y la frecuencia aumentan si aumenta la energía mecánica.

54. a) Explique en qué consiste el fenómeno de reflexión total e indique en qué condiciones se puede producir. b) Razone con la ayuda de un esquema por qué al sumergir una varilla recta en agua su imagen parece quebrada.

55. a) Explique los fenómenos de reflexión y refracción de una onda en la superficie de separación de dos medios. b) Razone si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: "las ondas reflejada y refractada tienen igual frecuencia, igual longitud de onda y diferente amplitud que la onda incidente".

56. a) Defina el concepto de onda e indique las características de las ondas longitudinales y transversales. Ponga un ejemplo de cada tipo. b) ¿Qué es una onda polarizada? Comente la siguiente frase: "las ondas sonoras no se pueden polarizar".

57. a) Escriba la ecuación de un movimiento armónico simple y explique cómo varían con el tiempo la velocidad y la aceleración de la partícula. b) Comente la siguiente afirmación: "si la aceleración de una partícula es proporcional a su desplazamiento respecto de un punto y de sentido opuesto, su movimiento es armónico simple".

58. a) Energía mecánica de un oscilador armónico simple. Utilice una representación gráfica para explicar la variación de las energías cinética, potencial y mecánica en función de la posición. b) Dos partículas de masas m_1 y m_2 ($m_2 > m_1$), unidas a resortes de la misma constante k, describen movimientos armónicos simples de igual amplitud. ¿Cuál de las dos partículas tiene mayor energía cinética al pasar por su posición de equilibrio? ¿Cuál de las dos pasa por esa posición a mayor velocidad? Razone las respuestas.