# Problemas resueltos de electrostática, magnetismo e inducción electromagnética

## Problemas resueltos de «Interacción Electrostática»

$K_e = 9\cdot10^9$ N·m²/C²; $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ F/m; $q_e = -1{,}6\cdot10^{-19}$ C; $m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$ kg.

**1)** Un objeto pequeño tiene una masa de $2{,}0\cdot10^{-3}$ kg y una carga negativa de $-2{,}5\cdot10^{-5}$ C. Está situado en un cierto lugar donde hay un campo eléctrico. Cuando se libera, el objeto experimenta una aceleración de 3.500 m/s² en la dirección del eje OX (+X). Determina la dirección y la magnitud del campo eléctrico. [$2{,}8\cdot10^5$ N/C en la dirección del eje OX(-X)]

**Respuesta**:

$$\vec{F}_e = q\vec{E} = m\vec{a} \quad \left\{ \vec{E} = \frac{m\vec{a}}{q} = \frac{2{,}0\cdot10^{-3}\,\text{kg}\times3{,}5\cdot10^{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\,\vec{i}}{-2{,}5\cdot10^{-5}\,\text{C}} = -2{,}8\cdot10^{5}\,\tfrac{\text{N}}{\text{C}}\,\vec{i} \right.$$

**2)** Tenemos tres cargas puntuales: $q_1 = 3{,}0\cdot10^{-6}$ C, $q_2 = -4{,}0\cdot10^{-6}$ C y $q_3 = -7{,}0\cdot10^{-6}$ C, situadas respectivamente en los puntos (0;0), (-0,20 m; 0 m) y (0,15 m; 0 m). Determina la magnitud y la dirección de la fuerza eléctrica neta sobre la carga primera. [5,7 N en + OX]

**Respuesta**:

$$\vec{F}_{1(\text{neta})} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} = K_e\frac{q_1q_2}{r_{12}^2}\vec{u}_{12} + K_e\frac{q_1q_3}{r_{13}^2}\vec{u}_{13}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = 0{,}2\,\text{m}\,\vec{i} \\ \vec{u}_{12} = \dfrac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = \vec{i} \end{array} \right\} \quad \vec{F}_{12} = 9\cdot10^{9}\,\frac{\text{N}\,\text{m}^2}{\text{C}^2}\,\frac{3\cdot10^{-6}\,\text{C}\times\left(-4\cdot10^{-6}\,\text{C}\right)}{\left(0{,}2\,\text{m}\right)^2}\,\vec{i} = -2{,}7\,\text{N}\,\vec{i}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_{13} = \vec{r}_1 - \vec{r}_3 = -0{,}15\,\text{m}\,\vec{i} \\ \vec{u}_{13} = \dfrac{\vec{r}_{13}}{r_{13}} = -\vec{i} \end{array} \right\} \quad \left\{ \vec{F}_{13} = 9\cdot10^{9}\,\frac{\text{N}\,\text{m}^2}{\text{C}^2}\,\frac{3\cdot10^{-6}\,\text{C}\times\left(-7\cdot10^{-6}\,\text{C}\right)}{\left(0{,}15\,\text{m}\right)^2}\left(-\vec{i}\right) = 8{,}4\,\text{N}\,\vec{i} \right.$$

$$\vec{F}_{1(\text{neta})} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} = -2{,}7\,\text{N}\,\vec{i} + 8{,}4\,\text{N}\,\vec{i} = 5{,}7\,\text{N}\,\vec{i}$$

**3)** Dos cargas positivas, de $1{,}6\cdot10^{-6}$ C y $4{,}0\cdot10^{-6}$ C, están separadas por una distancia de 3,0 m. Encuentra el punto sobre la línea entre las cargas donde el campo eléctrico es cero. [a 1,16 m de la menor]

**Respuesta**:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_1 = -\vec{E}_2 \\ \left|\vec{E}_1\right| = \left|\vec{E}_2\right| \end{array} \right\} \quad \left\{ K_e\frac{q_1}{\left|\vec{r}_1\right|^2} = K_e\frac{q_2}{\left|\vec{r}_2\right|^2} \right\} \quad \frac{q_1}{\left|\vec{r}_1\right|^2} = \frac{q_2}{\left|\vec{r}_2\right|^2}$$

$$\frac{\sqrt{q_1}}{\left|\vec{r}_1\right|} = \frac{\sqrt{q_2}}{3-\left|\vec{r}_1\right|} \quad \left\{ \left|\vec{r}_1\right| = \frac{3\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}} = \frac{3\times\sqrt{1{,}6\cdot10^{-6}}}{\sqrt{1{,}6\cdot10^{-6}}+\sqrt{4{,}0\cdot10^{-6}}}\,\text{m} = 1{,}16\,\text{m} \right.$$

**4)** Un triángulo equilátero tiene de lado 0,15 m y en sus extremos tiene tres cargas: $q_1 = -9{,}0\cdot10^{-6}$ C, en el vértice inferior izquierdo (0;0) m, $q_2 = 8{,}0\cdot10^{-6}$ C, en el vértice superior (0,075;0,13) m, y $q_3 = -2{,}0\cdot10^{-6}$ C, en el vértice inferior derecho (0,15;0) m. Determina el vector, en módulo y dirección, de la fuerza eléctrica ejercida sobre la última carga. [$F_x$ = 4 N; $F_y$ = 5,55 N; $F_{neta}$ = 6,84 N dirigida a 54,2º del eje +OX]

**Respuesta**:

$$\vec{F}_{3(neta)} = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} = K_e \frac{q_3 q_1}{\left|\vec{r}_{31}\right|^2}\vec{u}_{31} + K_e \frac{q_3 q_2}{\left|\vec{r}_{32}\right|^2}\vec{u}_{32}$$

$$\begin{cases} \vec{u}_{31} = \dfrac{\vec{r}_{31}}{\left|\vec{r}_{31}\right|} = \dfrac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{\left|\vec{r}_{31}\right|} = \dfrac{0{,}15\,\text{m}\,\vec{i}}{0{,}15\,\text{m}} = \vec{i} \\ \vec{u}_{32} = \dfrac{\vec{r}_{32}}{\left|\vec{r}_{32}\right|} = \dfrac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{\left|\vec{r}_{32}\right|} = \dfrac{0{,}15\,\text{m}\,\vec{i} - \left(0{,}075\,\text{m}\,\vec{i} + 0{,}13\,\text{m}\,\vec{j}\right)}{0{,}15\,\text{m}} = \dfrac{0{,}075\,\text{m}\,\vec{i} - 0{,}13\,\text{m}\,\vec{j}}{0{,}15\,\text{m}} = 0{,}5\,\vec{i} - 0{,}86\,\vec{j} \end{cases}$$

$$\vec{F}_{31} = 9\cdot 10^9\ \tfrac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \times \frac{\left(-2\cdot 10^{-6}\ \text{C}\right)\times\left(-9\cdot 10^{-6}\ \text{C}\right)}{\left(0{,}15\,\text{m}\right)^2}\vec{i} = 7{,}2\ \text{N}\ \vec{i}$$

$$\vec{F}_{32} = 9\cdot 10^9\ \tfrac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \times \frac{\left(-2\cdot 10^{-6}\ \text{C}\right)\times 8\cdot 10^{-6}\text{C}}{\left(0{,}15\ \text{m}\right)^2}\left(0{,}5\,\vec{i} - 0{,}86\,\vec{j}\right) = -3{,}20\,\text{N}\,\vec{i} + 5{,}55\,\text{N}\,\vec{j}$$

$$\vec{F}_{3(neta)} = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} = 7{,}2\ \text{N}\ \vec{i} - 3{,}20\,\text{N}\,\vec{i} + 5{,}55\,\text{N}\,\vec{j} = 4{,}0\,\text{N}\,\vec{i} + 5{,}55\,\text{N}\,\vec{j} \quad \left\{\alpha = \arctan\frac{5{,}55\,\text{N}}{4{,}0\,\text{N}} = 54{,}2^{\text{o}}\right.$$

**5)** Un agente físico mueve una carga positiva de $1{,}8\cdot 10^{-4}$ C, a una velocidad constante, desde un punto A hasta un punto B y realiza un trabajo de $5{,}8\cdot 10^{-3}$ J sobre la carga. Calcula: a) ¿cuál es la diferencia de energía potencial eléctrica de la carga en los dos puntos?; b) la diferencia de potencial entre los dos puntos, y c) ¿cuál punto está a un potencial mayor?. [a) $5{,}8\cdot 10^{-3}$ J; b) 32,2 V; c) el punto B]

**Respuesta**:

El agente físico mueve la carga contra el campo eléctrico: $W^{B}_{A(contra-campo)} = -W^{B}_{A(por-campo)}$

$$\begin{cases} W^{B}_{A(contra-campo)} = -W^{B}_{A(por-campo)} = \Delta E_{p(e)} \\ \Delta E_{p(e)} = W^{B}_{A(contra-campo)} = 5{,}8\cdot 10^{-3}\ \text{J} \end{cases} \begin{cases} \Delta E_{p(e)} = E_{p(B)} - E_{p(A)} = qV_B - qV_A = q\Delta V \\ \Delta V = \dfrac{\Delta E_p}{q} = \dfrac{5{,}8\cdot 10^{-3}\ \text{J}}{0{,}18\cdot 10^{-3}\ \text{C}} = 32{,}2\,\text{V} = V_B - V_A \end{cases} \{V_B > V_A$$

**6)** El ánodo, que es el terminal positivo, de un tubo de Rayos X, está a un potencial de 125 kV con respecto al cátodo, que es el terminal negativo. Calcula: a) el trabajo que se realiza sobre un electrón que es acelerado desde el cátodo a el ánodo; b) la energía cinética que tiene el electrón cuando llega al ánodo, si el electrón estaba inicialmente en reposo. [$2{,}0\cdot 10^{-14}$ J]

**Respuesta**:

$$\text{cátodo}(-) \rightarrow \text{ánodo}(+) \quad \left\{q_e = -1{,}6\cdot 10^{-19}\ \text{C}\right\} \quad \Delta V = V_{\text{ánodo}(+)} - V_{\text{cátodo}(-)} = 125.000\,\text{V}$$

$$W_{por-campo} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(e)} = -q_e \Delta V_{(e)}$$

$$W^{\text{ánodo}(+)}_{\text{cátodo}(-)} = -\Delta E_{p(e)} = -\left(E_{p(+)} - E_{p(-)}\right) = -q_e\left(V_{\text{ánodo}(+)} - V_{\text{cátodo}(-)}\right)$$

$$W_{por-campo} = -q_e \Delta V_{(e)} = -\left(-1,6\cdot 10^{-19}\,C\right)\times\left(125.000\,V\right) = 2,0\cdot 10^{-14}\,J$$
$$\Delta E_c = -\Delta E_{p(e)} = -q_e \Delta V_{(e)} = 2,0\cdot 10^{-14}\,J$$

**7**) Dos cargas eléctricas ($q_1$ y $q_2$) están fijas en un lugar del espacio a una distancia d. Una tercera carga $q_3$ está fija en la línea que une las cargas $q_1$ y $q_2$, a una distancia d de la carga $q_2$ y a una distancia 2·d de la carga $q_1$. La tercera carga $q_3$ es elegida de tal forma que la energía potencial del grupo es cero, esto es, la energía potencial tiene el mismo valor como si las tres cargas estuvieran muy separadas. Determina el valor de la tercera carga $q_3$ asumiendo que: a) las dos cargas primeras son iguales y tienen de valor q: $q = q_1 = q_2$; b) las dos cargas primeras son de distinto signo pero de igual valor q: $q = q_1 = -q_2$. [a) $q_3 = -\frac{2}{3}\cdot q$; b) $q_3 = -2q$]

**Respuesta**:

$$E_p = K_e \frac{q_1 q_2}{r_{21}} + K_e \frac{q_1 q_3}{r_{31}} + K_e \frac{q_2 q_3}{r_{32}} = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} q_1 = q_2 = q \\ r_{21} = r_{32} = d \\ r_{31} = 2d \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} 0 = K_e \frac{qq}{d} + K_e \frac{qq_3}{2d} + K_e \frac{qq_3}{d} = \frac{K_e q}{d}\left(q + \frac{q_3}{2} + q_3\right) \\ 0 = q + \frac{q_3}{2} + q_3 = q + q_3\left(\frac{1}{2}+1\right) = q + \frac{3}{2}\cdot q_3 \end{array}\right\} \quad q_3 = \frac{-q}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}q$$

$$\left\{\begin{array}{l} q_1 = -q_2 = q \\ r_{21} = r_{32} = d \\ r_{31} = 2d \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} 0 = K_e \frac{-qq}{d} + K_e \frac{qq_3}{2d} + K_e \frac{-qq_3}{d} = \frac{K_e q}{d}\left(-q + \frac{q_3}{2} - q_3\right) \\ 0 = -q + \frac{q_3}{2} - q_3 = -q - q_3\left(-\frac{1}{2}+1\right) = -q - \frac{1}{2}q_3 \end{array}\right\} \quad q_3 = \frac{q}{-\frac{1}{2}} = -2q$$

**8)** La capacidad de un condensador vacío es de $1,2\cdot 10^{-6}$ F. El condensador se conecta a una batería de 12 V y se carga totalmente. Con el condensador conectado a la batería, una barra de material dieléctrico se introduce entre los platos del condensador. El resultado es que desde la batería fluye hacia los platos una carga adicional de $2,6\cdot 10^{-5}$ C. ¿Cuál es la constante dieléctrica del material?. [2,8]

**Respuesta**:

Al introducir el material dieléctrico el condensador admite más carga manteniendo la diferencia de potencial en 12 V. Como la diferencia de potencial entre los platos es la misma, y no cambia la distancia entre ellos, la intensidad del campo eléctrico sin dieléctrico y con dieléctrico es la misma.

$$\Delta V_0 = \Delta V = 12\,V \quad \left\{\Delta V_0 = E_0 d = Ed\right\} \quad \left\{E_0 = E\right.$$

$$E_0 = \frac{\sigma_{libre}}{\varepsilon_0} = E = \frac{\sigma'_{libre}}{\varepsilon} = \frac{\sigma'_{libre}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \quad \left\{\frac{\frac{q_{libre}}{S}}{\varepsilon_0} = \frac{\frac{q'_{libre}}{S}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}\right\} \quad \left\{q'_{libre} = \varepsilon_r q_{libre}\right.$$

$$\varepsilon_r = \frac{q'_{libre}}{q_{libre}} = \frac{C\Delta V}{C_0 \Delta V_0} = \frac{C_0 \Delta V_0 + q_{fluye}}{C_0 \Delta V_0} = 1 + \frac{q_{fluye}}{C_0 \Delta V_0} = 1 + \frac{2,6\cdot 10^{-5}\,C}{1,2\cdot 10^{-6}\,F\times 12\,V} = 1 + \frac{2,6\cdot 10^{-5}\,C}{1,44\cdot 10^{-5}\,C} = 2,805$$

**9)** La gran mayoría de los teclados de los computadores aplican la idea de capacidad. Así las teclas son condensadores de capacidad variable en función de su pulsación. Cuando la tecla se pulsa los platos se acercan y aumentan la capacidad. Sin pulsar la distancia es de 5,00 mm y al pulsar pasa a 0,150 mm. El área de los platos es de 0,95 $cm^2$ y el condensador tiene un dieléctrico cuya constante dieléctrica vale 3,50. Determina el cambio en la capacidad que es detectado por el computador. [19,0 pF]

**Respuesta**:

$$\left\{\begin{array}{l} E = \dfrac{\sigma_{libre}}{\varepsilon} = \dfrac{\sigma_{libre}}{\varepsilon_0\varepsilon_r} \\ \Delta V = Ed \end{array}\right\} \quad C = \frac{Q_{libre}}{\Delta V} = \frac{\sigma_{libre}\cdot S}{E\cdot d} = \frac{\sigma_{libre}\cdot S}{\frac{\sigma_{libre}}{\varepsilon}\cdot d} = \varepsilon\frac{S}{d} = \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{S}{d}$$

$$C = \frac{Q_{libre}}{\Delta V} = \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{S}{d} = 8,85\cdot 10^{-12}\,\frac{F}{m}\times 3,5\times\frac{0,95\cdot 10^{-4}\,m^2}{5\cdot 10^{-3}\,m} = 5,88\cdot 10^{-13}\,F$$

$$C' = \varepsilon_r\varepsilon_0\frac{A}{d'} = 3,5\times 8,85\cdot 10^{-12}\,\frac{F}{m}\times\frac{0,95\cdot 10^{-4}\,m^2}{0,150\cdot 10^{-3}\,m} = 1,96\cdot 10^{-11}\,F$$

$$\Delta C = C' - C = 1,96\cdot 10^{-11}\,F - 5,88\cdot 10^{-13}\,F = 1,90\cdot 10^{-11}\,F$$

**10)** ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los platos de un condensador de 3,3 F que almacena suficiente energía como para dar luz a una lámpara de 75 W durante 1 minuto?. [52,2 V]

**Respuesta**:

$$W = \Delta E_{p(e)} = P\cdot t = 75\,W\times 60\,s = 4500\,J \quad \left\{\Delta E_{p(e)} = 4500\,J = \tfrac{1}{2}CV^2\right\} \quad \Delta V = \sqrt{\frac{2\times 4500\,J}{3,3\,F}} = 52,2\,V$$

**11)** Se desea trasladar, una a una, cuatro cargas de valor $q_1$ = 1 μC, $q_2$ = 2 μC, $q_3$ = 3 μC y $q_4$ = 4 μC, situadas en el infinito, hasta los cuatro vértices de un cuadrado de lado a = 1 m. Estando $q_1$ en (0;0); $q_2$ en (a;0); $q_3$ en (a;a) y $q_4$ en (0;a). Calcula: a) el trabajo realizado contra el campo eléctrico para el desplazamiento sucesivo de cada una de las cargas; b) la energía potencial eléctrica del sistema de cargas en la situación final; c) el potencial eléctrico debido a las cuatro cargas en el centro del cuadrado C(a/2;a/2). Dato: $K_e = 9\cdot 10^9\ N\cdot m^2/C^2$. [a) $W(q_2)$ = 0,018 J; $W(q_3)$ = 0,0731 J; $W(q_4)$ = 0,195 J; $W_{neto}$ = 0,2861 J; b) $E_{p(e)}$ = 0,2861 J; c) $V_C$ = 127.279,22 V]

**Respuesta**:

$$W_{\infty(contra-campo)}^{(a;0)}(q_2) = +\Delta E_{p(e)} = E_{p(21)} - 0 = q_2V_2 = q_2K_e\frac{q_1}{a} = 0,018\,J$$

$$W_{\infty(contra-campo)}^{(a;a)}(q_3) = +\Delta E_{p(e)} = E_{p(31)} + E_{p(32)} - 0 = q_3\left(V_{31} + V_{32}\right) = q_3\left(K_e\frac{q_1}{\sqrt{2}a} + K_e\frac{q_2}{a}\right) = 0,0731\,J$$

$$W_{\infty(contra-campo)}^{(0;a)}(q_4) = +\Delta E_{p(e)} = E_{p(41)} + E_{p(42)} + E_{p(43)} - 0 = q_4\left(V_{41} + V_{42} + V_{43}\right)$$

$$W_{\infty(contra-campo)}^{(0;a)}(q_4) = q_4\left(K_e\frac{q_1}{a} + K_e\frac{q_2}{\sqrt{2}a} + K_e\frac{q_3}{a}\right) = 0,195\,J$$

$$W_{neto(contra-campo)} = +\Delta E_{p(e)} = E_{p(21)} + E_{p(31)} + E_{p(32)} + E_{p(41)} + E_{p(42)} + E_{p(43)}$$

$$W_{neto(contra-campo)} = \Delta E_{p(e)} = 0,018\,J + 0,0731\,J + 0,195\,J = 0,2861\,J$$

$$V_C = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$$

$$V_C = K_e\frac{q_1}{\frac{1}{2}\sqrt{2}a} + K_e\frac{q_2}{\frac{1}{2}\sqrt{2}a} + K_e\frac{q_3}{\frac{1}{2}\sqrt{2}a} + K_e\frac{q_4}{\frac{1}{2}\sqrt{2}a} = K_e\frac{2}{\sqrt{2}a}\left(q_1 + q_2 + q_3 + q_4\right)$$

$$V_C = 9\cdot 10^9\,\frac{2}{\sqrt{2}\times 1}\left(1+2+3+4\right)\cdot 10^{-6} = 127.279,22\,V$$

**12)** Dos cargas positivas, $q_1 = 2\cdot10^{-6}$ C y $q_2 = 4\cdot10^{-6}$ C, están situadas, respectivamente, en los puntos (0 m; 2 m) y (0 m; -2 m). Calcular: a) el campo y el potencial eléctricos en el punto (4 m; 0 m); b) el trabajo necesario para trasladar una carga de $6\cdot10^{-3}$ C desde el infinito hasta el punto (4 m; 0 m). [a) $E_x$ = 2.415 N/C; $E_y$ = 402,5 N/C; V = 12.075 V; b) 72,45 J]

**Respuesta**:

$$\left.\begin{cases} \vec{r}_{p1} = \vec{r}_p - \vec{r}_1 = \left(4\,\mathrm{m}\,\vec{i} + 0\,\mathrm{m}\,\vec{j}\right) - \left(0\,\mathrm{m}\,\vec{i} + 2\,\mathrm{m}\,\vec{j}\right) = 4\,\mathrm{m}\,\vec{i} - 2\,\mathrm{m}\,\vec{j} \\ \vec{r}_{p2} = \vec{r}_p - \vec{r}_2 = \left(4\,\mathrm{m}\,\vec{i} + 0\,\mathrm{m}\,\vec{j}\right) - \left(0\,\mathrm{m}\,\vec{i} - 2\,\mathrm{m}\,\vec{j}\right) = 4\,\mathrm{m}\,\vec{i} + 2\,\mathrm{m}\,\vec{j} \end{cases}\right\} \quad \left|\vec{r}_{p1}\right| = \left|\vec{r}_{p2}\right| = \sqrt{20}\,\mathrm{m}$$

$$\vec{E}_p = \vec{E}_{p1} + \vec{E}_{p2} = K_e \frac{q_1}{r_{p1}^2}\vec{u}_1 + K_e \frac{q_2}{r_{p2}^2}\vec{u}_2 = K_e \frac{q_1}{r_{p1}^2}\frac{\vec{r}_{p1}}{\left|\vec{r}_{p1}\right|} + K_e \frac{q_2}{r_{p2}^2}\frac{\vec{r}_{p2}}{\left|\vec{r}_{p2}\right|} = 2.415\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\vec{i} + 402,5\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\vec{j}$$

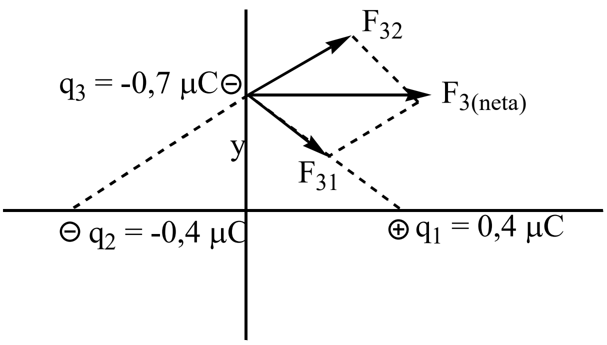
$$\vec{E}_p = 9\cdot10^9\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}} \times \frac{2\cdot10^{-6}\,\mathrm{C}}{20\,\mathrm{m^2}} \times \frac{\left(4\,\mathrm{m}\,\vec{i} - 2\,\mathrm{m}\,\vec{j}\right)}{\sqrt{20}\,\mathrm{m}} + 9\cdot10^9\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}} \times \frac{4\cdot10^{-6}\,\mathrm{C}}{20\,\mathrm{m^2}} \times \frac{\left(4\,\mathrm{m}\,\vec{i} + 2\,\mathrm{m}\,\vec{j}\right)}{\sqrt{20}\,\mathrm{m}}$$

$$\begin{cases} V_p = V_{p1} + V_{p2} = K_e \frac{q_1}{r_{p1}} + K_e \frac{q_2}{r_{p2}} = K_e \frac{q_1}{\left|\vec{r}_{p1}\right|} + K_e \frac{q_2}{\left|\vec{r}_{p2}\right|} \\ V_p = 9\cdot10^9\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}} \times \frac{2\cdot10^{-6}\,\mathrm{C}}{\sqrt{20}\,\mathrm{m}} + 9\cdot10^9\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}} \times \frac{4\cdot10^{-6}\,\mathrm{C}}{\sqrt{20}\,\mathrm{m}} = 12.075\,\frac{\mathrm{N\,m}}{\mathrm{C}} = 12.075\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}} = 12.075\,\mathrm{V} \end{cases}$$

$$W^{p}_{\infty(\text{sobre}-\text{campo})} = \Delta E_{p(e)} = q\Delta V_{(e)} = q\left(V_{p(e)} - 0\right) = qV_{p(e)} = 72,45\,\mathrm{J}$$

**13)** Dos cargas, una de valor $q_1$ = 0,4 μC en (5·cm; 0), y $q_2$ = -0,4 μC en (-5·cm; 0). Una carga negativa de valor $q_3$ = -0,7 μC, se encuentra fija en un punto de la mediatriz del segmento que une las cargas $q_1$ y $q_2$. La fuerza que actúa sobre la carga $q_3$ es de $1,4\cdot10^{-3}$ N. Calcule: a) la dirección y sentido de la fuerza sobre $q_3$ y la distancia a que se encuentra $q_3$ del segmento que une las otras dos cargas; b) haga el mismo cálculo considerando que las cargas $q_1$ y $q_2$ son las dos positivas. [a) La fuerza neta sobre $q_3$ es paralela al eje OX y $q_3$ está en la posición (0; ±0,5624·m); b) hacia el punto medio y posición (0; ±1,896378·m]

**Respuesta**:




$$\vec{F}_{3(\text{neta})} = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} = K_e \frac{q_3 q_1}{r_{31}^3}\vec{r}_{31} + K_e \frac{q_3 q_2}{r_{32}^3}\vec{r}_{32}$$

$$\left.\begin{cases} \vec{r}_{31} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1 = y\,\vec{j} - 0,05\,\vec{i} \;\Rightarrow\; \left|\vec{r}_{31}\right| = \sqrt{y^2 + 0,05^2} \\ \vec{r}_{32} = \vec{r}_3 - \vec{r}_2 = y\,\vec{j} + 0,05\,\vec{i} \;\Rightarrow\; \left|\vec{r}_{32}\right| = \sqrt{y^2 + 0,05^2} \end{cases}\right\} \left|\vec{r}_{31}\right| = \left|\vec{r}_{32}\right|$$

$$\vec{F}_{31} = K_e \frac{q_3 q_1}{r_{31}^3}\vec{r}_{31} = 9\cdot 10^9 \times \frac{\left(-0,7\cdot 10^{-6}\right)\times\left(0,4\cdot 10^{-6}\right)}{r_{31}^3}\left(y\,\vec{j} - 0,05\,\vec{i}\right) = \frac{-2,52\cdot 10^{-3}}{r_{31}^3}\left(y\,\vec{j} - 0,05\,\vec{i}\right)$$

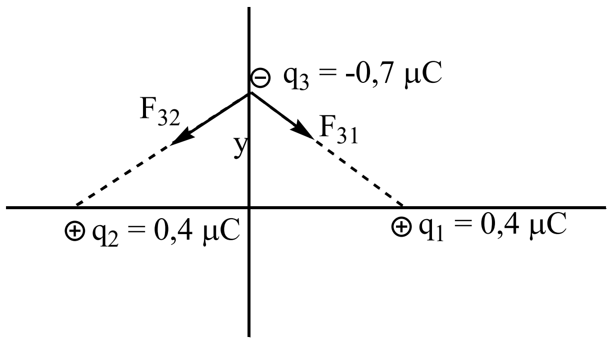
$$\vec{F}_{32} = K_e \frac{q_3 q_2}{r_{32}^3}\vec{r}_{32} = 9\cdot 10^9 \times \frac{\left(-0,7\cdot 10^{-6}\right)\times\left(-0,4\cdot 10^{-6}\right)}{r_{32}^3}\left(y\,\vec{j} + 0,05\,\vec{i}\right) = \frac{+2,52\cdot 10^{-3}}{r_{32}^3}\left(y\,\vec{j} + 0,05\,\vec{i}\right)$$

$$\vec{F}_{3(\text{neta})} = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} = \frac{2,52\cdot 10^{-3}}{r_{31}^3}\left(-y\,\vec{j} + 0,05\,\vec{i}\right) + \frac{2,52\cdot 10^{-3}}{r_{32}^3}\left(y\,\vec{j} + 0,05\,\vec{i}\right) \quad \left\{\left|\vec{r}_{31}\right| = \left|\vec{r}_{32}\right|\right\}$$

$$\vec{F}_{3(\text{neta})} = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} = \frac{2,52\cdot 10^{-3}}{r_{31}^3}\times 2\times 0,05\,\vec{i} = \frac{2,52\cdot 10^{-4}}{r_{31}^3}\,\vec{i}$$

$$\left|\vec{F}_{3(\text{neta})}\right| = 1,4\cdot 10^{-3}\,\text{N} = \frac{2,52\cdot 10^{-4}}{r_{31}^3} \quad\Rightarrow\quad r_{31}^3 = \frac{2,52\cdot 10^{-4}}{1,4\cdot 10^{-3}} = 0,18\,\text{m}^3$$

$$r_{31}^3 = \left(\sqrt{y^2 + 0,05^2}\right)^3 = 0,18 \quad\Rightarrow\quad \left(y^2 + 0,05^2\right)^{3/2} = 0,18 \quad \begin{cases} y^2 + 0,05^2 = 0,18^{2/3} \\ y = \sqrt{0,18^{2/3} - 0,05^2} = \pm 0,5624\,\text{m} \end{cases}$$




$$\vec{F}_{3(\text{neta})} = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} = K_e \frac{q_3 q_1}{r_{31}^3}\vec{r}_{31} + K_e \frac{q_3 q_2}{r_{32}^3}\vec{r}_{32}$$

$$\left.\begin{cases} \vec{r}_{31} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1 = y\,\vec{j} - 0,05\,\vec{i} \;\Rightarrow\; \left|\vec{r}_{31}\right| = \sqrt{y^2 + 0,05^2} \\ \vec{r}_{32} = \vec{r}_3 - \vec{r}_2 = y\,\vec{j} + 0,05\,\vec{i} \;\Rightarrow\; \left|\vec{r}_{32}\right| = \sqrt{y^2 + 0,05^2} \end{cases}\right\} \left|\vec{r}_{31}\right| = \left|\vec{r}_{32}\right|$$

$$\vec{F}_{31} = K_e \frac{q_3 q_1}{r_{31}^3}\vec{r}_{31} = 9\cdot 10^9 \times \frac{\left(-0,7\cdot 10^{-6}\right)\times\left(0,4\cdot 10^{-6}\right)}{r_{31}^3}\left(y\,\vec{j} - 0,05\,\vec{i}\right) = \frac{-2,52\cdot 10^{-3}}{r_{31}^3}\left(y\,\vec{j} - 0,05\,\vec{i}\right)$$

$$\vec{F}_{32} = K_e \frac{q_3 q_2}{r_{32}^3}\vec{r}_{32} = 9\cdot 10^9 \times \frac{\left(-0,7\cdot 10^{-6}\right)\times\left(0,4\cdot 10^{-6}\right)}{r_{32}^3}\left(y\,\vec{j} + 0,05\,\vec{i}\right) = \frac{-2,52\cdot 10^{-3}}{r_{32}^3}\left(y\,\vec{j} + 0,05\,\vec{i}\right)$$

$$\vec{F}_{3(\text{neta})} = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} = -\frac{2,52\cdot 10^{-3}}{r_{31}^3}\left(y\,\vec{j} - 0,05\,\vec{i}\right) - \frac{2,52\cdot 10^{-3}}{r_{32}^3}\left(y\,\vec{j} + 0,05\,\vec{i}\right) \quad \left\{\left|\vec{r}_{31}\right| = \left|\vec{r}_{32}\right|\right\}$$

$$\vec{F}_{3(\text{neta})} = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} = -\frac{2,52\cdot 10^{-3}}{r_{31}^3}\cdot 2\cdot y\,\vec{j} = -\frac{5,04\cdot 10^{-3}}{r_{31}^3}\cdot y\,\vec{i}$$

$$\left|\vec{F}_{3(\text{neta})}\right| = 1,4\cdot 10^{-3}\,\text{N} = \frac{5,04\cdot 10^{-3}}{r_{31}^3}\cdot y = \frac{5,04\cdot 10^{-3}}{\left(y^2 + 0,05^2\right)^{3/2}}\cdot y$$

$$\frac{y}{\left(y^2 + 0,05^2\right)^{3/2}} = \frac{1,4\cdot 10^{-3}}{5,04\cdot 10^{-3}} = \frac{1,4}{5,04}$$

Ecuación: $\dfrac{y}{\left(y^2+0,05^2\right)^{3/2}}=\dfrac{1,4}{5,04}=0,2777777778$

| y | Ecuación | resultado | Tanto por 1 |
|---|---|---|---|
| 1,89637 | 0,277780106 | 0,277777778 | -8,38103E-06 |
| 1,896371 | 0,277779813 | 0,277777778 | -7,32747E-06 |
| 1,896372 | 0,277779521 | 0,277777778 | -6,27392E-06 |
| 1,896373 | 0,277779228 | 0,277777778 | -5,22037E-06 |
| 1,896374 | 0,277778935 | 0,277777778 | -4,16682E-06 |
| 1,896375 | 0,277778643 | 0,277777778 | -3,11327E-06 |
| 1,896376 | 0,27777835 | 0,277777778 | -2,05972E-06 |
| 1,896377 | 0,277778057 | 0,277777778 | -1,00617E-06 |
| 1,896378 | 0,277777765 | 0,277777778 | 4,73692E-08 |
| 1,896379 | 0,277777472 | 0,277777778 | 1,10091E-06 |
| 1,89638 | 0,277777179 | 0,277777778 | 2,15445E-06 |
| 1,896381 | 0,277776887 | 0,277777778 | 3,20799E-06 |
| 1,896382 | 0,277776594 | 0,277777778 | 4,26153E-06 |
| 1,896383 | 0,277776301 | 0,277777778 | 5,31506E-06 |
| 1,896384 | 0,277776009 | 0,277777778 | 6,3686E-06 |
| 1,896385 | 0,277775716 | 0,277777778 | 7,42213E-06 |
| 1,896386 | 0,277775423 | 0,277777778 | 8,47566E-06 |
| 1,896387 | 0,277775131 | 0,277777778 | 9,52919E-06 |
| 1,896388 | 0,277774838 | 0,277777778 | 1,05827E-05 |

**El valor con más precisión es y = 1,896378 m**

**14)** Dos esferas muy pequeñas, de radio despreciable, pesan 4 N cada una y están suspendidas de un mismo punto por sendos hilos de 5 cm de longitud. Al cargar cada una de las esferas con la misma carga negativa, los hilos se separan y, en la situación de equilibrio, forman un ángulo de 45º con la vertical. Calcula: a) el valor de la fuerza eléctrica entre las esferas; b) el valor de la carga sobre cada esfera. [a) 4 N; b) q = -1,50 μC]

**Respuesta**:

$$\vec{F}_{neta}=\vec{P}+\vec{F}_e+\vec{T}=m\vec{a}=0 \quad \begin{cases} F_{x(neta)}=F_e-T\,\mathrm{sen}\,45^{o}=0 \\ F_{y(neta)}=T\cos 45^{o}-P=0 \end{cases}$$

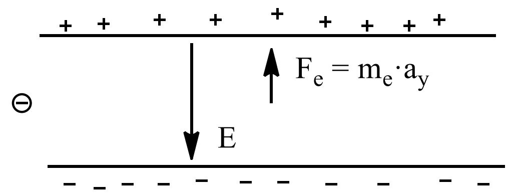
$$\begin{Bmatrix} T\,\mathrm{sen}\,45^{o}=F_e \\ T\cos 45^{o}=P \end{Bmatrix} \Rightarrow \tan 45^{o}=\frac{F_e}{P} \Rightarrow F_e=P\cdot\tan 45^{o}=4\,\mathrm{N}$$

$$F_e=K_e\frac{qq}{d^2}=K_e\frac{q^2}{d^2} \Rightarrow q^2=\frac{F_e\cdot d^2}{K_e}=\frac{4\,\mathrm{N}\times\left(0,05^2+0,05^2\right)\mathrm{m}^2}{9\cdot 10^9\,\frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{C^2}}}=2,22\cdot 10^{-12}\,\mathrm{C}^2$$

$$q=1,50\cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}=1,50\,\mu\mathrm{C}$$

**15)** Un electrón, con una velocidad de 10 km/s, penetra en la región comprendida entre dos conductores planos y paralelos, de 8 cm de longitud y separados entre sí 1 cm, en la que existe un campo eléctrico uniforme. El electrón penetra en la región por un punto equidistante de los dos conductores planos y, a la salida, pasa justamente por el borde del conductor superior. Calcular: a) el campo eléctrico que existe entre los dos conductores y la diferencia de potencial entre ellos; b) la variación de energía cinética del electrón. Datos: $q_e = -1,6\cdot 10^{-19}$ C; $m_e = 9,1\cdot 10^{-31}$ kg. [a) $8,887\cdot 10^{-4}$ V/m; $8,887\cdot 10^{-6}$ V; b) $7,1\cdot 10^{-25}$ J = $4,44\cdot 10^{-6}$ eV]

**Respuesta**:




$\Delta x = v_x \cdot t$

$\Delta y = 0{,}5 \cdot a_y \cdot t^2$

$$\vec{F}_e = q_e\vec{E} = m_e\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{m_e}{q_e}\vec{a} \quad \Rightarrow \quad E_y = \frac{m_e}{q_e}a_y$$

$$\left.\begin{cases} \Delta x = 8\,\text{cm} \\ \Delta y = 0{,}5\,\text{cm} \\ v_{0x} = 10.000\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}\right\} \begin{cases} \Delta x = v_{0x}t \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{\Delta x}{v_{0x}} = \dfrac{0{,}08\,\text{m}}{10.000\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 8{,}0\cdot 10^{-6}\,\text{s} \\ \Delta y = \dfrac{1}{2}a_y t^2 \quad \Rightarrow \quad a_y = \dfrac{2\cdot\Delta y}{t^2} = \dfrac{0{,}01\,\text{m}}{\left(8{,}0\cdot 10^{-6}\,\text{s}\right)^2} = 1{,}5625\cdot 10^{8}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{cases}$$

$$E_y = \frac{m_e}{q_e}a_y = \frac{9{,}1\cdot 10^{-31}\,\text{kg}}{-1{,}6\cdot 10^{-19}\,\text{C}}\times 1{,}5625\cdot 10^{8}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = -8{,}887\cdot 10^{-4}\,\frac{\text{N}}{\text{C}} = -8{,}887\cdot 10^{-4}\,\frac{\frac{\text{J}}{\text{m}}}{\text{C}} = -8{,}887\cdot 10^{-4}\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$\Delta V = -\vec{E}\cdot\Delta\vec{r}$$

$$\Delta V = V_+ - V_- = -\left(\left|E_y\right|\cdot\left|\Delta y\right|\cdot\cos 180^{\text{o}}\right) = \left|E_y\right|\cdot\left|\Delta y\right| = 8{,}887\cdot 10^{-4}\,\frac{\text{V}}{\text{m}}\times 0{,}01\,\text{m} = 8{,}887\cdot 10^{-6}\,\text{V}$$

$$\Delta V = V_- - V_+ = -\left(\left|E_y\right|\cdot\left|\Delta y\right|\cdot\cos 0^{\text{o}}\right) = -\left|E_y\right|\cdot\left|\Delta y\right| = -8{,}887\cdot 10^{-4}\,\frac{\text{V}}{\text{m}}\times 0{,}01\,\text{m} = -8{,}887\cdot 10^{-6}\,\text{V}$$

$$W_{\text{neto}} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(e)} = -q_e\Delta V_{(e)} \quad \left\{\Delta V'_{(e)} = \left|\vec{E}\right|d = \left|\vec{E}\right|\frac{1}{2}\Delta y = \frac{1}{2}\times 8{,}887\cdot 10^{-6}\,\text{V} = 4{,}44\cdot 10^{-6}\,\text{V}\right.$$

$$\Delta E_{p(e)} = q_e\Delta V'_{(e)} = \left(-1{,}6\cdot 10^{-19}\,\text{C}\right)\times 4{,}44\cdot 10^{-6}\,\text{V} = -7{,}10\cdot 10^{-25}\,\text{J}$$

$$\Delta E_c = -\Delta E_{p(e)} = +7{,}10\cdot 10^{-25}\,\text{J} = 7{,}10\cdot 10^{-25}\,\text{J}\times\frac{1\,\text{eV}}{1{,}6\cdot 10^{-19}\,\text{J}} = 4{,}44\cdot 10^{-6}\,\text{eV}$$

**16)** Una carga positiva de valor $4{,}0\cdot 10^{-6}$ C está distribuida uniformemente sobre una superficie esférica de 10 cm de radio. Calcula: a) el trabajo realizado por el campo eléctrico para desplazar radialmente una carga de $3{,}0\cdot 10^{-6}$ C, desde un punto situado a 10 cm de la superficie esférica a una distancia de 15 cm ; b) en qué puntos sería nulo el campo si colocamos una carga puntual de $6\cdot 10^{-6}$ C a 20 cm de distancia de la superficie esférica. [a) 0,108 J; b) 3,5 cm de la superficie esférica y a 16,5 cm de la carga puntual]

**Respuesta**:

$$W^{B}_{A(\text{por-campo})} = -W^{B}_{A(\text{sobre-campo})} = -\Delta E_{p(e)} = -q\Delta V_{(e)} = -q\left(V_B - V_A\right)$$

$$\begin{cases} V_B = K_e\dfrac{Q}{r_B} = 9\cdot 10^{9}\times\dfrac{4{,}0\cdot 10^{-6}}{\left(0{,}10+0{,}15\right)}\,\text{V} = 1{,}44\cdot 10^{5}\,\text{V} \\ V_A = K_e\dfrac{Q}{r_A} = 9\cdot 10^{9}\times\dfrac{4{,}0\cdot 10^{-6}}{\left(0{,}10+0{,}10\right)}\,\text{V} = 1{,}80\cdot 10^{5}\,\text{V} \end{cases}$$

$$W^{B}_{A(\text{por-campo})} = -q\left(V_B - V_A\right) \quad = -3{,}0\cdot 10^{-6}\,\text{C}\times\left(1{,}44\cdot 10^{5}\,\text{V} - 1{,}80\cdot 10^{5}\,\text{V}\right) = 0{,}108\,\text{J}$$

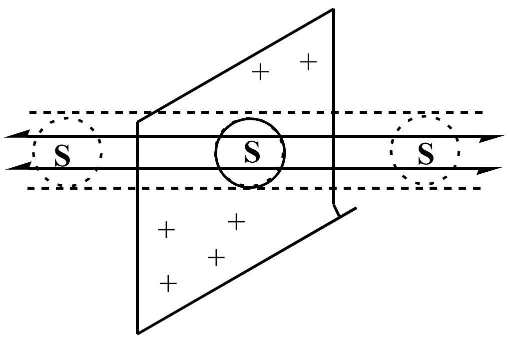
$$E_1 = E_2 \quad \begin{cases} K_e \dfrac{q_1}{r^2} = K_e \dfrac{q_2}{(0,30-r)^2} \\ \dfrac{4,0\cdot 10^{-6}}{r^2} = \dfrac{6,0\cdot 10^{-6}}{(0,30-r)^2} \end{cases} \begin{cases} \dfrac{0,30-r}{r} = \sqrt{1,5} \\ 0,30 - r = \sqrt{1,5}r \end{cases} \begin{cases} r = \dfrac{0,30}{\sqrt{1,5}+1} = 0,1350\,\text{m} \\ d = r - R_{esfera} = 0,0350\,\text{m} \end{cases}$$

**17)** a) Determinar, aplicando la ley de Gauss, el campo eléctrico creado por una distribución plana uniforme, de densidad de carga $\sigma_+ = 7,0\cdot 10^{-6}\,\frac{C}{m^2}$, en un punto situado a una distancia 1 cm del plano. b) Calcula la dirección y el valor del campo eléctrico en el punto medio entre dos planos paralelos, separados por una distancia de 1 cm, y cargados con densidades de carga: $\sigma_+ = 7,0\cdot 10^{-6}\,\frac{C}{m^2}$ y $\sigma_- = -7,0\cdot 10^{-6}\,\frac{C}{m^2}$; c) Calcula la dirección y el valor del campo eléctrico en el punto medio y en los laterales entre dos planos paralelos, separados por una distancia de 1 cm, y cargados con densidades de carga: $\sigma_+ = 7,0\cdot 10^{-6}\,\frac{C}{m^2}$ y $\sigma_- = -4,0\cdot 10^{-6}\,\frac{C}{m^2}$.. [a) E = 3,95·10$^5$ V/m; b) de la positiva a la negativa E = 7,90·10$^5$ V/m; c) en el punto medio de la positiva a la negativa y de valor E = 6,21·10$^5$ V/m; en el lateral de la negativa de alejamiento de la negativa y valor E = 1,69·10$^5$ V/m; en el lateral de la positiva de alejamiento de la positiva y de valor E = 1,69·10$^5$ V/m]

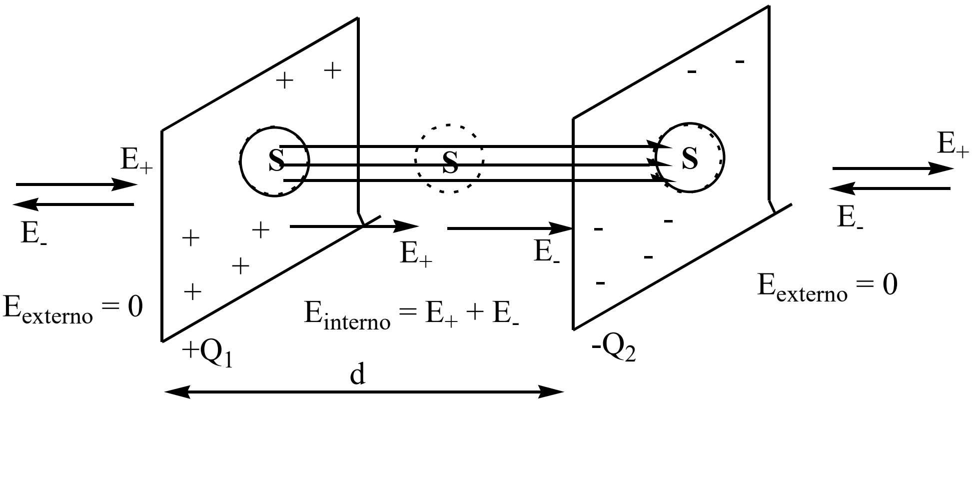
**Respuesta**:

a) El campo es independiente de la distancia al plano y es por tanto uniforme.

$$\Phi_{total} = \iint \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\cdot S + E\cdot S = 2ES = \frac{q_{superficie}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_+ S}{\varepsilon_0} \left\{ E = \frac{\sigma_+}{2\varepsilon_0} = \frac{7,0\cdot 10^{-6}\,\frac{C}{m^2}}{2\times 8,85\cdot 10^{-12}\,\frac{F}{m}} = 3,95\cdot 10^5\,\frac{V}{m} \right.$$



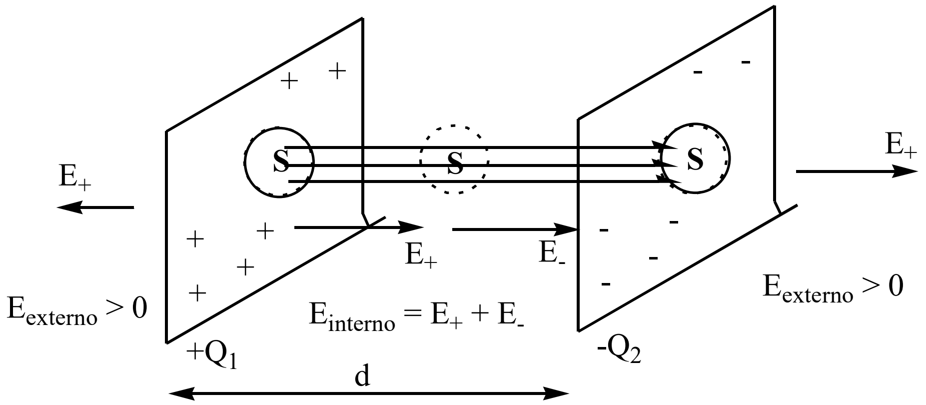

b) Calcula el campo eléctrico producido por dos superficies planas, iguales y paralelas, que están uniformemente cargadas, una positivamente y la otra negativamente: en la zona comprendida entre las dos:



$$\left\{E_+ = \frac{\sigma_+}{2\varepsilon_0} = \frac{7,0\cdot 10^{-6}\ \frac{C}{m^2}}{2\times 8,85\cdot 10^{-12}\ \frac{F}{m}} = 3,95\cdot 10^5\ \tfrac{V}{m}\right\} \quad \left\{E_- = \frac{\sigma_-}{2\varepsilon_0} = \frac{-7,0\cdot 10^{-6}\ \frac{C}{m^2}}{2\times 8,85\cdot 10^{-12}\ \frac{F}{m}} = -3,95\cdot 10^5\ \tfrac{V}{m}\right\}$$

$$\vec{E}_{interno} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- \quad \left\{\left|\vec{E}_{interno}\right| = \left|\vec{E}_+\right| + \left|\vec{E}_-\right| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 3,95\cdot 10^5\ \tfrac{V}{m} + 3,95\cdot 10^5\ \tfrac{V}{m} = 7,9\cdot 10^5\ \tfrac{V}{m}\right.$$

c)




$$\left\{E_+ = \frac{\sigma_+}{2\varepsilon_0} = \frac{7,0\cdot 10^{-6}\ \frac{C}{m^2}}{2\times 8,85\cdot 10^{-12}\ \frac{F}{m}} = 3,95\cdot 10^5\ \tfrac{V}{m}\right\} \quad \left\{E_- = \frac{\sigma_-}{2\varepsilon_0} = \frac{-4,0\cdot 10^{-6}\ \frac{C}{m^2}}{2\times 8,85\cdot 10^{-12}\ \frac{F}{m}} = -2,26\cdot 10^5\ \tfrac{V}{m}\right\}$$

$$\vec{E}_{medio} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- \quad \left\{\left|\vec{E}_{interno}\right| = \left|\vec{E}_+\right| + \left|\vec{E}_-\right| = \frac{\sigma_+}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_-}{2\varepsilon_0} = 3,95\cdot 10^5\ \tfrac{V}{m} + 2,26\cdot 10^5\ \tfrac{V}{m} = 6,21\cdot 10^5\ \tfrac{V}{m}\right.$$

$$\vec{E}_{negativa} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- \quad \left\{\left|\vec{E}_{negativa}\right| = \left|\vec{E}_+\right| - \left|\vec{E}_-\right| = \frac{\sigma_+}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_-}{2\varepsilon_0} = 3,95\cdot 10^5\ \tfrac{V}{m} - 2,26\cdot 10^5\ \tfrac{V}{m} = 1,69\cdot 10^5\ \tfrac{V}{m}\right.$$

$$\vec{E}_{positiva} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- \quad \left\{\left|\vec{E}_{positiva}\right| = \left|\vec{E}_+\right| - \left|\vec{E}_-\right| = \frac{\sigma_+}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_-}{2\varepsilon_0} = 3,95\cdot 10^5\ \tfrac{V}{m} - 2,26\cdot 10^5\ \tfrac{V}{m} = 1,69\cdot 10^5\ \tfrac{V}{m}\right.$$

**18)** Dos esferas metálicas de radios 4 cm y 6 cm, muy alejadas entre sí, se cargan con $3\cdot 10^{-6}$ C cada una. Calcular: a) diferencia de potencial entre ambas esferas; b) potencial y carga de cada esfera después de unirlas mediante un hilo conductor de capacidad despreciable. [a) $\Delta V = 6,75\cdot 10^5$ V - $4,50\cdot 10^5$ V = $2,25\cdot 10^5$ V; b) $5,4\cdot 10^5$ V; $2,4\cdot 10^{-6}$ C y $3,6\cdot 10^{-6}$ C]

**Respuesta**:

$$\left\{\begin{array}{l} V_B = K_e \dfrac{Q}{R_B} = 9\cdot 10^9 \times \dfrac{3,0\cdot 10^{-6}}{0,04}\ V = 6,75\cdot 10^5\ V \\ V_A = K_e \dfrac{Q}{R_A} = 9\cdot 10^9 \times \dfrac{3,0\cdot 10^{-6}}{0,06}\ V = 4,50\cdot 10^5\ V \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \Delta V = V_B - V_A \\ \Delta V = 6,75\cdot 10^5\ V - 4,50\cdot 10^5\ V = 2,25\cdot 10^5\ V \end{array}\right.$$

$$V_B = V_A \quad \left\{\begin{array}{l} K_e \dfrac{Q'_B}{R_B} = K_e \dfrac{Q'_A}{R_A} \\ Q'_B + Q'_A = 2Q \end{array}\right\} \quad \left\{\frac{Q'_B}{0,04} = \frac{6,0\cdot 10^{-6} - Q'_B}{0,06}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} Q'_B = 2,4\cdot 10^{-6}\ C \\ Q'_A = 2Q - Q'_B = 3,6\cdot 10^{-6}\ C \end{array}\right.$$

$$V_B = V_A = K_e \frac{Q'_A}{R_A} = 9\cdot 10^9\ \frac{N\,m^2}{C^2} \times \frac{3,6\cdot 10^{-6}\ C}{0,06\,m} = 5,4\cdot 10^5\ V$$

**19)** Calcula la fuerza de atracción entre un ion cloruro y un ion sodio a una distancia de $2{,}0\cdot 10^{-10}$ m el uno del otro, si se encuentran: a) en el vacío (la constante dieléctrica es uno); b) en agua (la constante dieléctrica es 81). Dato: $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\ C^2\ N^{-1}\ m^{-2}$ . [a) 5,76 nN; b) 0,0711 nN]

**Respuesta**:

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Qq}{|\vec{r}|^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Qq}{r^2} \quad \begin{cases} \varepsilon_r(\text{vacío}) = 1 \ \Rightarrow\ F_{e(\text{vacío})} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Qq}{r^2} \\ \varepsilon_r(\text{no}-\text{vacío}) > 1 \ \Rightarrow\ F_{e(\text{no}-\text{vacío})} = \dfrac{F_{e(\text{vacío})}}{\varepsilon_r} \end{cases}$$

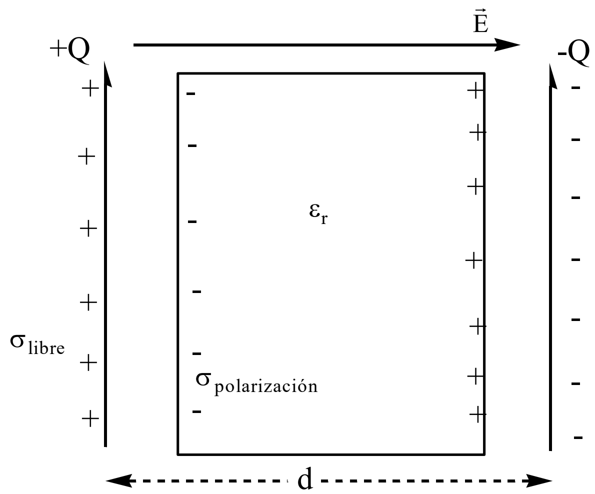
$$F_{e(\text{vacío})} = \frac{1}{4\pi\times 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\dfrac{C^2}{N\,m^2}\times 1} \times \frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\,C\times\left(-1{,}6\cdot 10^{-19}\,C\right)}{\left(2{,}0\cdot 10^{-10}\,m\right)^2} = 5{,}75\cdot 10^{-9}\,N$$

$$F_{e(\text{no}-\text{vacío})} = \frac{F_{e(\text{vacío})}}{\varepsilon_r} = \frac{5{,}75\cdot 10^{-9}\,N}{81} = 7{,}10\cdot 10^{-11}\,N$$

**20)** Un condensador de placas planas paralelas tiene las placas a 1 mm. Si no hay materia entre ellas, la capacidad es de $3\cdot 10^{-6}$ F y la intensidad del campo eléctrico entre las placas es de $E_0$ = 1000 V/m. Le introducimos un dieléctrico de vidrio de constante dieléctrica 6. Calcula: a) la diferencia de potencial entre las placas, sin dieléctrico y con dieléctrico; b) la capacidad del condensador con dieléctrico; c) la energía potencial del condensador sin dieléctrico y con dieléctrico; d) la carga de las armaduras. [a) 1 V; 1/6 V; b) $1{,}8\cdot 10^{-5}$ F; c) $1{,}5\cdot 10^{-6}$ J; $2{,}5\cdot 10^{-7}$ J; d) $3\cdot 10^{-6}$ C]

**Respuesta**:

Si colocamos un dieléctrico dentro de un campo eléctrico producido por dos placas metálicas uniformemente cargadas, dentro del dieléctrico se crea una polarización con una carga superficial que contrarresta al campo eléctrico externo:




$$\sigma_{neta} = \sigma_{libre} + \sigma_{polarización}$$

$$\begin{cases} \text{izquierda: } \sigma_{neta} = \sigma_{libre} - P \\ \text{derecha: } \sigma_{neta} = -\sigma_{libre} + P \end{cases} E = \frac{\sigma_{neta}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_{libre} - P}{\varepsilon_0}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{libre} = P + \varepsilon_0 E = \varepsilon_0\chi_e E + \varepsilon_0 E = \varepsilon_0\left(\chi_e + 1\right)E \\ \sigma_{libre} = \varepsilon_0\varepsilon_r E = \varepsilon E = D \end{Bmatrix}$$

$$E = \frac{\sigma_{libre}}{\varepsilon} = \frac{\sigma_{libre}}{\varepsilon_0\varepsilon_r} \quad \{\Delta V = E\times d$$

$$\Delta V_0 = E_0 d = 1.000\,\frac{V}{m}\times 0{,}001\,m = 1\,V \quad \left\{\Delta V = Ed = \frac{E_0}{\varepsilon_r}d = \frac{\Delta V_0}{\varepsilon_r} = \frac{1V}{6} = \frac{1}{6}V\right.$$

$$C_0 = \frac{Q_{libre}}{\Delta V_0} = 3{,}0\cdot 10^{-6}\,F \quad \left\{C = \frac{Q_{libre}}{\Delta V} = \frac{C_0\Delta V_0}{\Delta V} = \varepsilon_r C_0 = 6\times 3{,}0\cdot 10^{-6}\,F = 1{,}80\cdot 10^{-5}\,F\right.$$

$$W_{sobre} = \Delta E_{p(e)} \quad \left\{ dW = V'dq' = \frac{q'}{C}dq' \right\} W_{sobre} = \int_0^Q \frac{q'}{C}dq' = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV$$

$$\Delta E_{p(0)} = \frac{1}{2}C_0\left(\Delta V_0\right)^2 = 1,5\cdot 10^{-6}\ J$$

$$\Delta E_p = \frac{1}{2}C\left(\Delta V\right)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_r C_0\left(\frac{\Delta V_0}{\varepsilon_r}\right)^2 = \frac{1}{2}C_0\frac{\left(\Delta V_0\right)^2}{\varepsilon_r} = \frac{\Delta E_{p(0)}}{\varepsilon_r} = 2,5\cdot 10^{-7}\ J$$

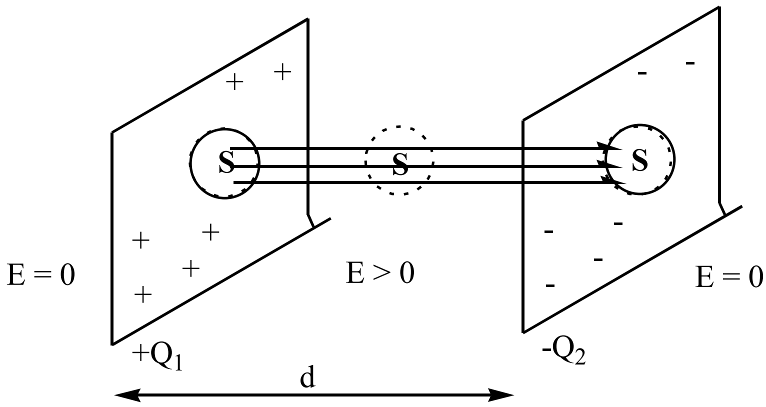
La carga de las armaduras $Q_{libre}$ no se modifica: $Q_{libre} = C_0\Delta V_0 = 3,0\cdot 10^{-6}\ F\times 1V = 3,0\cdot 10^{-6}\ C$

**21)** Un condensador de platos paralelos tiene una capacidad de $1,0\cdot 10^{-12}$ F. La carga sobre cada plato es de $1,0\cdot 10^{-9}$ C y su separación es de 1 mm. a) Calcula la diferencia de potencial y el campo eléctrico entre los platos; b) considerando que la carga permanece constante, calcula la diferencia de potencial y el campo eléctrico entre los platos si la separación entre ellos se hace de 2 mm; c) calcula el trabajo requerido para realizar la separación entre los platos. [a) 1.000 V y $1,0\cdot 10^6$ V/m; b) 2.000 V; c) $5,0\cdot 10^{-7}$ J]

**Respuesta**:

$$\Delta V = \frac{Q_{libre}}{C} = \frac{1,0\cdot 10^{-9}\ C}{1,0\cdot 10^{-12}\ F} = 1.000\ V \quad \left\{\Delta V = Ed\right\} \quad \left\{ E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{1.000\ V}{0,001\ m} = 1,0\cdot 10^6\ \frac{V}{m} \right.$$

Si la carga permanece constante, también permanece constante la densidad superficial de carga sobre los platos, por lo que el campo eléctrico permanece constante ya que este depende de la densidad superficial de carga y de la permitividad del medio. Sin embargo, la diferencia de potencial si depende de la separación entre los platos.




$$\Phi_{total} = \left|\vec{E}_+\right|\left|\vec{S}\right| + \left|\vec{E}_-\right|\left|\vec{S}\right| = 2\left|\vec{E}\right|\left|\vec{S}\right| = \frac{q_1}{\varepsilon_o} + \frac{q_2}{\varepsilon_o} = \frac{\sigma\left|\vec{S}\right|}{\varepsilon_o} + \frac{\sigma\left|\vec{S}\right|}{\varepsilon_o} = \frac{2\sigma\left|\vec{S}\right|}{\varepsilon_o} \qquad \left\{ \left|\vec{E}\right| = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} \right.$$

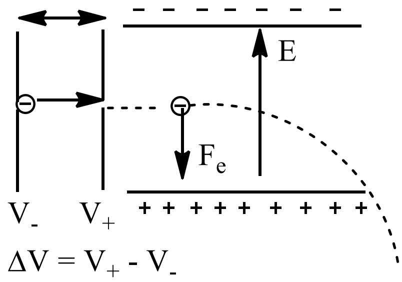
$$\Delta V = Ed = 1,0\cdot 10^6\ \frac{V}{m}\times 0,002\ m = 2.000\ V$$

$$W_{sobre} = \Delta E_{p(e)} \quad \left\{ dW = V'dq' = \frac{q'}{C}dq' \right\} W_{sobre} = \int_0^Q \frac{q'}{C}dq' = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV$$

$$W_{sobre} = \Delta E_{p(e)} = \frac{1}{2}Q\Delta V = \frac{1}{2}\times 1,0\cdot 10^{-9}\ C\times\left(2.000\ V - 1.000\ V\right) = 5,0\cdot 10^{-7}\ J$$

**22)** Un electrón se acelera en dirección horizontal OX, desde el reposo, mediante una diferencia de potencial de $\Delta V_x$ = 100 V. A continuación, penetra en una región en la que existe otro campo eléctrico uniforme vertical y de valor $E_y = 200$ V/m. a) Dibuje la trayectoria seguida por el electrón en los dos campos eléctricos y calcule la velocidad con la que entra en la región del segundo campo eléctrico. b) Calcule la velocidad del electrón cuando ha recorrido una distancia horizontal de 0,4 m en el segundo campo eléctrico, así como el trabajo realizado por el campo eléctrico sobre el electrón entre esos dos puntos y su diferencia de potencial. Datos: $q_e = -1{,}6\cdot10^{-19}$ C; $m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$ kg. [a) $5{,}93\cdot10^{6}$ m/s; b) $v = 6{,}386807\cdot10^{6}$ m/s; $W_{por} = 2{,}56\cdot10^{-18}$ J; $\Delta V' = 16$ V]

**Respuesta**:




El electrón con carga negativa se mueve hacia los puntos en los que aumente el potencial eléctrico y disminuya su energía potencial:

$$W_{por-campo} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(e)} = -q_e \Delta V$$

$$W_{por-campo} = -\Delta E_{p(e)} = -q_e \Delta V = -\left(-1{,}6\cdot10^{-19}\,C\right)\times 100\,V = 1{,}6\cdot10^{-17}\,J$$

$$W_{por-campo} = \Delta E_c = \frac{1}{2}m_e v^2 - 0 \quad\Rightarrow\quad v = \sqrt{\frac{2\cdot\Delta E_c}{m_e}} = \sqrt{\frac{2\times1{,}6\cdot10^{-17}\,J}{9{,}1\cdot10^{-31}\,kg}} = 5{,}93\cdot10^{6}\,\frac{m}{s}$$

$$\vec{F} = m_e\vec{a} = q_e\vec{E} \quad\Rightarrow\quad \vec{a} = \frac{q_e}{m_e}\vec{E} = \frac{-1{,}6\cdot10^{-19}\,C}{9{,}1\cdot10^{-31}\,kg}\times 200\,\tfrac{V}{m}\,\vec{j} = -3{,}5165\cdot10^{13}\,\tfrac{m}{s^2}\,\vec{j}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \\ \Delta\vec{r} = \vec{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\vec{a}t^2\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}\Delta r_x = v_{0x}t \\ t = \dfrac{\Delta r_x}{v_{0x}} = \dfrac{0{,}4\,m}{5{,}93\cdot10^{6}\,\tfrac{m}{s}} = 6{,}745\cdot10^{-8}\,s\end{array}\right.$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t = 5{,}93\cdot10^{6}\,\tfrac{m}{s}\,\vec{i} + \left(-3{,}5165\cdot10^{13}\,\tfrac{m}{s^2}\,\vec{j}\right)\times 6{,}745\cdot10^{-8}\,s = 5{,}93\cdot10^{6}\,\tfrac{m}{s}\,\vec{i} - 2{,}3720\cdot10^{6}\,\tfrac{m}{s}\,\vec{j}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 6{,}386807\cdot10^{6}\,\tfrac{m}{s}$$

$$W'_{por-campo} = \Delta E'_c = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{1}{2} m_e v_0^2$$

$$\Delta E'_c = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{1}{2} m_e v_0^2 = \frac{1}{2} \times 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\text{kg} \times \left(6{,}386807 \cdot 10^6 \tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \frac{1}{2} \times 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\text{kg} \times \left(5{,}93 \cdot 10^6 \tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2$$

$$\Delta E'_c = 1{,}85600 \cdot 10^{-17}\,\text{J} - 1{,}6000 \cdot 10^{-17}\,\text{J} = 2{,}560 \cdot 10^{-18}\,\text{J}$$

$$W'_{por-campo} = \Delta E'_c = 2{,}560 \cdot 10^{-18}\,\text{J}$$

$$W'_{por-campo} = \Delta E'_c = -q\Delta V' \;\Rightarrow\; \Delta V' = \frac{\Delta E'_c}{-q} = \frac{2{,}560 \cdot 10^{-18}\,\text{J}}{+1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{C}} = 16\,\text{V}$$

$$\vec{E} \cdot \Delta\vec{r} = -\Delta V' \;\Rightarrow\; \Delta V' = -\vec{E} \cdot \Delta\vec{r} = -\left(200 \tfrac{\text{V}}{\text{m}} \vec{j}\right) \times \left(0{,}40\,\text{m}\,\vec{i} - 0{,}080\,\text{m}\,\vec{j}\right) = +16\,\text{V}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \\ \Delta\vec{r} = 5{,}93 \cdot 10^6 \tfrac{\text{m}}{\text{s}} \vec{i} \times 6{,}74 \cdot 10^{-8}\,\text{s} + \tfrac{1}{2} \times \left(-3{,}5165 \cdot 10^{13} \tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \vec{j}\right) \times \left(6{,}74 \cdot 10^{-8}\,\text{s}\right)^2 = 0{,}40\,\text{m}\,\vec{i} - 0{,}080\,\text{m}\,\vec{j} \end{array}\right\}$$

**23)** Una partícula con una carga de $1{,}0 \cdot 10^{-12}$ C, inicialmente en reposo, es acelerada por un campo eléctrico uniforme de $8 \cdot 10^6$ N·C$^{-1}$ hasta alcanzar una velocidad de 8 m·s$^{-1}$. Si la partícula tarda 2 s en alcanzar dicha velocidad, calcule: a) la masa de la partícula y el espacio recorrido en ese tiempo; b) la diferencia de potencial entre las posiciones inicial y final. [a) $2{,}0 \cdot 10^{-6}$ kg y 8 m; b) $-6{,}4 \cdot 10^7$ V]

**Respuesta**:

$$\left\{\begin{array}{l} F_e = ma = qE \\ a = \dfrac{v - v_0}{t} \\ \Delta x = v_0 t + \dfrac{1}{2} a t^2 \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{v - v_0}{t} = \dfrac{8 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2\,\text{s}} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ m = \dfrac{qE}{a} = \dfrac{1{,}0 \cdot 10^{-12}\,\text{C} \times 8{,}0 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{C}}}{4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 2{,}0 \cdot 10^{-6}\,\text{kg} \\ \Delta x = \dfrac{1}{2} a t^2 = 8\,\text{m} \end{array}\right.$$

Al ser campo eléctrico uniforme:

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} = -dV \xrightarrow{\vec{E}=\text{cte.}(\text{uniforme})} E \cdot \Delta x = -\Delta V$$

$$\Delta V = V_f - V_i = -E \cdot \Delta x = -8 \cdot 10^6 \tfrac{\text{V}}{\text{m}} \times 8\,\text{m} = -6{,}4 \cdot 10^7\,\text{V} \quad \left\{V_f < V_i\right.$$

También lo haríamos sin necesidad de considerar el campo eléctrico uniforme:

$$W_{por-campo} = \Delta E_c = -\Delta E_p = -q\Delta V$$

$$\Delta V = \frac{\Delta E_c}{-q} = \frac{\frac{1}{2} m v^2}{-q} = \frac{\frac{1}{2} \times 2{,}0 \cdot 10^{-6}\,\text{kg} \times \left(8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{-1{,}0 \cdot 10^{-12}\,\text{C}} = \frac{6{,}4 \cdot 10^{-5}\,\text{J}}{-1{,}0 \cdot 10^{-12}\,\text{C}} = -6{,}4 \cdot 10^7\,\text{V}$$

**24)** Una partícula de carga $q = 6 \cdot 10^{-6}$ C se encuentra en reposo en el punto O(0,0). Se aplica un campo eléctrico uniforme de 500 V/m, dirigido en el sentido positivo del eje OY. a) Describe la trayectoria seguida por la partícula hasta el instante en que se encuentra en el punto A (0;2·m). ¿Aumenta o disminuye la energía potencial de la partícula en dicho desplazamiento?, ¿en qué se convierte dicha variación de energía?. b) Calcule el trabajo realizado por el campo en el desplazamiento de la partícula y la diferencia de potencial entre el origen y el punto A. [a) $\Delta E_{p(e)} < 0$; $\Delta E_c > 0$; b) $W_{por-campo} = 6{,}0 \cdot 10^{-9}$ J; $\Delta V = -1.000$ V]

**Respuesta**:

$$W_{por-campo} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(e)} = -q\Delta V = -q\left(V_A - V_O\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{E}\cdot d\vec{r} = -dV \\ \vec{E}\cdot\Delta\vec{r} = -\Delta V = -\left(V_A - V_O\right)\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\vec{E}\cdot\Delta\vec{r} = 500\,\tfrac{V}{m}\,\vec{j}\cdot 2\,m\,\vec{j} = 1.000\,V = -\Delta V \\ \Delta V = -1.000\,V = V_A - V_O \\ V_A < V_O\end{array}\right.$$

$$\Delta E_{p(e)} = E_{p(A)} - E_{p(O)} = q\Delta V = 6\cdot 10^{-6}\,C\times\left(-1.000\,V\right) = -6\cdot 10^{-9}\,J \quad\Rightarrow\quad E_{p(A)} < E_{p(O)}$$

$$W_{por-campo} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(e)} = +6\cdot 10^{-9}\,J \quad\Rightarrow\quad E_{c(A)} > E_{c(O)}$$

$$W_{por-campo} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(e)} = +6\cdot 10^{-9}\,J$$

**25)** Sean dos cargas puntuales $q_1$ = 1,0 μC, situada en el origen de coordenadas, y $q_2$ = -2,0 μC, situada sobre el eje OX a 5 cm del origen. Determine: a) los puntos, sobre el eje Y, en los que el potencial del campo eléctrico sea cero; b) el trabajo realizado por el campo para trasladar una tercera carga, $q_3$ = -1,0 μC, desde el punto (-1·cm;0) hasta uno de los puntos en el que el potencial es cero. Datos: $K_e = 9\cdot 10^9$ N m$^2$ C$^{-2}$; $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$ F/m. [a) ± 0,02886 m; b) -0,6 J]

**Respuesta**:

$$V_{neto} = V_1 + V_2 = K_e\frac{q_1}{r_1} + K_e\frac{q_2}{r_2} = 0 \quad \left\{K_e\frac{q_1}{r_1} = -K_e\frac{q_2}{r_2}\right\} \quad K_e\frac{1{,}0\cdot 10^{-6}\,C}{y} = -K_e\frac{-2{,}0\cdot 10^{-6}\,C}{\sqrt{y^2 + 0{,}05^2}}$$

$$\frac{1}{y^2} = \frac{2^2}{y^2 + 0{,}05^2} \quad \left\{y^2 + 0{,}05^2 = 4y^2\right\} \quad y = \pm\sqrt{\frac{0{,}05^2}{3}} = \pm 0{,}02886\,m$$

$$W_{por-campo} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(e)} = -q_3\Delta V_e = -q_3\left(V_f - V_i\right) = -q_3\left(0 - V_i\right) = q_3 V_i$$

$$W_{por-campo} = q_3 V_i = q_3\left[V_1 + V_2\right] = q_3\left[K_e\frac{q_1}{r_1} + K_e\frac{q_2}{r_2}\right]$$

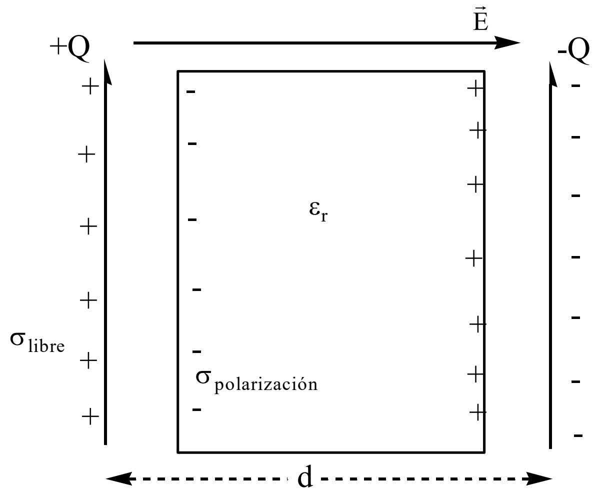
$$W_{por-campo} = -1{,}0\cdot 10^{-6}\,C\times\left[9{,}0\cdot 10^9\,\frac{N\,m^2}{C^2}\times\frac{1{,}0\cdot 10^{-6}\,C}{0{,}01\,m} + 9{,}0\cdot 10^9\,\frac{N\,m^2}{C^2}\times\frac{\left(-2{,}0\cdot 10^{-6}\,C\right)}{0{,}06\,m}\right]$$

$$W_{por-campo} = -1{,}0\cdot 10^{-6}\,C\times\left[9\cdot 10^5\,V - 3\cdot 10^5\,V\right] = -1{,}0\cdot 10^{-6}\,C\times 6\cdot 10^5\,V = -0{,}6\,J$$

**26)** Dos platos paralelos tienen la misma área 100 cm$^2$ y la misma carga pero opuesta de valor $8{,}9\cdot 10^{-7}$ C. Si se llena el espacio entre los platos con un material dieléctrico el campo eléctrico dentro del dieléctrico es $1{,}4\cdot 10^6$ V/m. a) Calcula la constante dieléctrica del material. b) Calcula la carga de polarización inducida sobre cada superficie del dieléctrico. Dato: $\varepsilon_0$ = $8{,}85\cdot 10^{-12}$ F/m. [a) 7,2; b) $7{,}66\cdot 10^{-5}$ C/m$^2$]

**Respuesta**:

$$\sigma_{libre} = \frac{Q_{libre}}{S} = \frac{8{,}9\cdot 10^{-7}\,C}{100\,cm^2\times\dfrac{10^{-4}\,m^2}{1\,cm^2}} = 8{,}9\cdot 10^{-5}\,\frac{C}{m^2}$$




$$\sigma_{neta} = \sigma_{libre} + \sigma_{polarización}$$

$$\left.\begin{cases} \text{izquierda: } \sigma_{neta} = \sigma_{libre} - P \\ \text{derecha: } \sigma_{neta} = -\sigma_{libre} + P \end{cases}\right\} E = \frac{\sigma_{neta}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_{libre} - P}{\varepsilon_0}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{libre} = P + \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 \chi_e E + \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 (\chi_e + 1) E \\ \sigma_{libre} = \varepsilon_0 \varepsilon_r E = \varepsilon E = D \end{Bmatrix}$$

$$E = \frac{\sigma_{libre}}{\varepsilon} = \frac{\sigma_{libre}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \quad \{\Delta V = E \times d$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{libre} = \varepsilon_0 E_0 \\ \sigma_{libre} = \varepsilon_0 \varepsilon_r E = \varepsilon E \end{Bmatrix} \quad \sigma_{libre} = \varepsilon_0 E_0 = \varepsilon_0 \varepsilon_r E = \varepsilon E \quad \left\{ E = \frac{\sigma_{libre}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \right.$$

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_{libre}}{E\varepsilon_0} = \frac{8{,}9 \cdot 10^{-5} \, \frac{C}{m^2}}{1{,}4 \cdot 10^6 \, \frac{V}{m} \times 8{,}85 \cdot 10^{-12} \, \frac{F}{m}} = 7{,}2$$

$$E = \frac{\sigma_{neta}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_{libre} - P}{\varepsilon_0} \quad \{P = \sigma_{libre} - \varepsilon_0 E$$

$$P = 8{,}9 \cdot 10^{-5} \, \frac{C}{m^2} - \left(8{,}85 \cdot 10^{-12} \, \frac{F}{m} \times 1{,}4 \cdot 10^6 \, \frac{V}{m}\right) = 8{,}9 \cdot 10^{-5} \, \frac{C}{m^2} - 1{,}2 \cdot 10^{-5} \, \frac{C}{m^2} = 7{,}7 \cdot 10^{-5} \, \frac{C}{m^2}$$

**27)** Dos láminas no conductoras están cargadas uniformemente por toda la superficie. Una de ellas, cargada positivamente, tiene una densidad superficial de carga de $6{,}8 \cdot 10^{-6}$ $C \cdot m^{-2}$ y la otra, cargada negativamente, tiene una densidad superficial de carga de $-4{,}3 \cdot 10^{-6}$ $C \cdot m^{-2}$. Si se colocan paralelas determina la intensidad del campo eléctrico: a) entre las láminas; b) a los lados de cada una. Dato: $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ $C^2 \cdot N^{-1} \cdot m^{-2}$. [a) $6{,}27 \cdot 10^5$ V/m; b) $1{,}41 \cdot 10^5$ V/m]

**Respuesta**:

Las dos láminas no tienen la misma densidad superficial de carga, por lo que a los lados de cada una hay campo eléctrico. Consideramos la superficie Gaussiana en forma de cilindro, que atraviesa cada lámina, siendo la superficie de las bases S. En base al teorema de Gauss, el flujo que atraviesa la superficie cilíndrica lo hace por sus bases, siendo el campo eléctrico debido a la lámina positiva y a la lámina negativa:

$$\Phi_+ = E_+ S + E_+ S = \frac{q_+}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_+ S}{\varepsilon_0} \quad \left\{ E_+ = \frac{\sigma_+}{2\varepsilon_0} = \frac{6{,}8 \cdot 10^{-6} \, \frac{C}{m^2}}{2 \times 8{,}85 \cdot 10^{-12} \, \frac{F}{m}} = 3{,}84 \cdot 10^5 \, \frac{V}{m} \right.$$

$$\Phi_- = E_- S + E_- S = \frac{q_-}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_- S}{\varepsilon_0} \quad \left\{ E_- = \frac{\sigma_-}{2\varepsilon_0} = \frac{4{,}3 \cdot 10^{-6} \, \frac{C}{m^2}}{2 \times 8{,}85 \cdot 10^{-12} \, \frac{F}{m}} = 2{,}43 \cdot 10^5 \, \frac{V}{m} \right.$$

En la zona entre los dos planos paralelos, la intensidad neta del campo eléctrico es la suma de los dos campos eléctricos (el de la positiva y el de la negativa) ya que tienen la misma dirección y sentido. Sin embargo, a los lados de cada lámina la intensidad neta es la diferencia porque los dos campos tienen sentido contrario.

$$E_{interno} = E_+ + E_- = E_+ = \frac{\sigma_+}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_-}{2\varepsilon_0} = 3,84 \cdot 10^5 \frac{V}{m} + 2,43 \cdot 10^5 \frac{V}{m} = 6,27 \cdot 10^5 \frac{V}{m}$$

$$E_{externo} = E_+ - E_- = \frac{\sigma_+}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_-}{2\varepsilon_0} = 3,84 \cdot 10^5 \frac{V}{m} - 2,43 \cdot 10^5 \frac{V}{m} = 1,41 \cdot 10^5 \frac{V}{m}$$

**28)** En las proximidades de la superficie terrestre se aplica un campo eléctrico uniforme. Se observa que al soltar una partícula de 2 g cargada con $5,0 \cdot 10^{-5}$ C permanece en reposo. a) Determine razonadamente las características del campo eléctrico (módulo, dirección y sentido). b) Explique qué ocurriría si la carga fuera de $1,0 \cdot 10^{-4}$ C y de $-5,0 \cdot 10^{-5}$ C. [a) 392 N/C hacia arriba; b) sube con aceleración de 9,8 $m/s^2$ y cae con aceleración de 19,6 $m/s^2$]

**Respuesta**:

Si la partícula permanece en reposo es porque la fuerza neta que actúa sobre ella es cero. Luego la fuerza gravitatoria y la fuerza eléctrica han de ser iguales pero de sentido contrario. El sentido de la fuerza gravitatoria es hacia el centro de la Tierra y el de la fuerza eléctrica de alejamiento. Como la carga es positiva el sentido del campo eléctrico es igual al de la fuerza eléctrica, es decir, de alejamiento del centro de la Tierra, y si la carga fuese negativa sería hacia en centro de la Tierra.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{neta} = \vec{F}_g + \vec{F}_e = m\vec{a} = 0 \\ \vec{F}_g = -\vec{F}_e \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_g = 0,002\,kg \times \left(-9,8\,\tfrac{m}{s^2}\right)\vec{j} \\ \vec{F}_g = -0,0196\,N\,\vec{j} = -q\vec{E} \end{array} \right\} \quad \vec{E} = \frac{\vec{F}_g}{-q} = \frac{-0,0196\,N\,\vec{j}}{-5,0 \cdot 10^{-5}\,C} = 392\,\frac{N}{C}\,\vec{j}$$

$$\vec{F}_{neta} = \vec{F}_g + \vec{F}_e = m\vec{a} \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_g = -0,0196\,N\,\vec{j} \\ \vec{F}_e = q\vec{E} = 1,0 \cdot 10^{-4}\,C \times 392\,\frac{N}{C}\,\vec{j} = 0,0392\,N\,\vec{j} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{neta} = 0,0196\,N\,\vec{j} = m\vec{a} \\ \vec{a} = 9,8\,\tfrac{m}{s^2}\,\vec{j} \end{array} \right.$$

$$\vec{F}_{neta} = \vec{F}_g + \vec{F}_e = m\vec{a} \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_g = -0,0196\,N\,\vec{j} \\ \vec{F}_e = q\vec{E} = -5,0 \cdot 10^{-5}\,C \times 392\,\frac{N}{C}\,\vec{j} = -0,0196\,N\,\vec{j} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{neta} = -0,0392\,N\,\vec{j} = m\vec{a} \\ \vec{a} = -19,6\,\tfrac{m}{s^2}\,\vec{j} \end{array} \right.$$

**29)** Dos cargas puntuales iguales de $-5,0 \cdot 10^{-8}$ C, están fijas en los puntos (0,0) m y (5,0) m. Calcule: a) el campo eléctrico (módulo, dirección y sentido) en el punto (10,0) m; b) la velocidad con que llega al punto (8,0) m una partícula de carga $8 \cdot 10^{-9}$ C y masa $5 \cdot 10^{-3}$ g que se abandona libremente en el punto (10,0) m. [a) -22,5 N/C hacia –OX; b) 0,48 m/s]

**Respuesta**:

$$\left\{ q_1 = -5,0 \cdot 10^{-8}\,C\,(0;0) \right\} \quad \left\{ q_2 = -5,0 \cdot 10^{-8}\,C\ \ (5\,m;0) \right\}$$

$$\vec{E}_{neto} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = K_e \frac{q_1}{|\vec{r}_1|^3}\vec{r}_1 + K_e \frac{q_2}{|\vec{r}_2|^3}\vec{r}_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_1 = \vec{r}_p - \vec{r}_1 = 10\,\vec{i} - 0\,\vec{i} \quad \left\{ |\vec{r}_1| = 10\,m \right\} \\ \vec{r}_2 = \vec{r}_p - \vec{r}_2 = 10\,\vec{i} - 5\,\vec{i} = 5\,\vec{i} \quad \left\{ |\vec{r}_2| = 5\,m \right\} \end{array} \right.$$

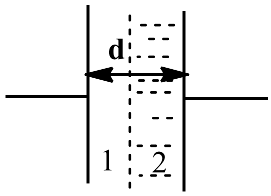
$$\vec{E}_{neto} = 9 \cdot 10^9 \times \frac{-5,0 \cdot 10^{-8}}{10^3} \times 10\,\tfrac{N}{C}\,\vec{i} + 9 \cdot 10^9 \times \frac{-5,0 \cdot 10^{-8}}{5^3} \times 5\,\tfrac{N}{C}\,\vec{i} = -4,5\,\tfrac{N}{C}\,\vec{i} - 18\,\tfrac{N}{C}\,\vec{i} = -22,5\,\tfrac{N}{C}\,\vec{i}$$

$$W_{por-campo} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(e)} = -q\Delta V = -q\left(V_f - V_i\right)$$

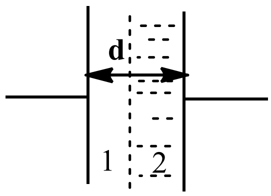
$$\begin{cases} V_i = V_1 + V_2 = K_e \frac{q_1}{r_1} + K_e \frac{q_2}{r_2} = 9\cdot 10^9 \times \frac{-5,0\cdot 10^{-8}}{10}\,V + 9\cdot 10^9 \times \frac{-5,0\cdot 10^{-8}}{5}\,V = -45\,V - 90\,V = -135\,V \\ V_f = V_1' + V_2' = 9\cdot 10^9 \times \frac{-5,0\cdot 10^{-8}}{8}\,V + 9\cdot 10^9 \times \frac{-5,0\cdot 10^{-8}}{3}\,V = -56,25\,V - 150\,V = -206,25\,V \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = -q\left(V_f - V_i\right) \quad \left\{ v = 0,48\,\tfrac{m}{s} \right.$$

**30)** Las armaduras de un condensador plano están a una distancia d = 10 mm, siendo la intensidad del campo eléctrico, entre ellas, de $5,0\cdot 10^6$ V/m si están en el vacío. Se llena la mitad del espacio entre las armaduras con un dieléctrico, homogéneo e isótropo, de constante dieléctrica 6. Para el dibujo determina la diferencia de potencial entre las dos armaduras del condensador y la intensidad del campo eléctrico en ambas mitades, en los dos casos siguientes: 1º) si las cargas en las armaduras permanecen constantes con la introducción del dieléctrico; 2º) si se mantiene constante la diferencia de potencial entre las armaduras con la introducción del dieléctrico. [Caso 1º: $\Delta V_0 = 5,0\cdot 10^4$ V; $\Delta V = 2,9\cdot 10^4$ V; $E_1 = 5,0\cdot 10^6$ V/m; $E_2 = 8,3\cdot 10^5$ V/m; Caso 2º: $\Delta V_0 = \Delta V = 5,0\cdot 10^4$ V; $E_1 = 8,6\cdot 10^6$ V/m; $E_2 = 1,4\cdot 10^6$ V/m]




**Respuesta**:




**Caso 1**: Las cargas en las armaduras permanecen constantes con la introducción del dieléctrico.

Si la carga es la misma la densidad superficial de carga es constante.

$$\sigma_{libre} = \text{cte.} \quad \left\{ \sigma_{libre} = \varepsilon_0 E_0 = \varepsilon_0 E_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_r E_2 \right. \quad \begin{cases} E_1 = E_0 = 5,0\cdot 10^6\,\frac{V}{m} \\ E_2 = \dfrac{E_0}{\varepsilon_r} = 8,3\cdot 10^5\,\frac{V}{m} \end{cases}$$

$$\Delta V_0 = E_0 d = 5,0\cdot 10^6\,\tfrac{V}{m} \times 0,010\,m = 5,0\cdot 10^4\,V$$

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = E_1 \frac{d}{2} + E_2 \frac{d}{2} = 2,5\cdot 10^4\,V + \frac{2,5\cdot 10^4\,V}{6} = 2,9\cdot 10^4\,V$$

**Caso 2**: Se mantiene constante la diferencia de potencial entre las placas o armaduras.

Si se mantiene constante la diferencia de potencial entre las placas o armaduras se ha de aumentar la densidad de carga en las mismas, ya que en el caso primero ha disminuido la diferencia de potencial.

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Caso 1}\\ \sigma_{\text{libre}}=\varepsilon_0 E_0\\ \Delta V_0=E_0 d=5{,}0\cdot 10^4\ \text{V}\\ \Delta V=\Delta V_1+\Delta V_2=2{,}9\cdot 10^4\ \text{V}\end{array}\right\}\quad \left\{\begin{array}{l}\text{Caso 2}\\ \Delta V_0=\Delta V=\Delta V_1+\Delta V_2=5{,}0\cdot 10^4\ \text{V}\\ \sigma'_{\text{libre}}>\sigma_{\text{libre}}\quad (\sigma_{\text{libre}}=\varepsilon_0 E_0)\\ \sigma'_{\text{libre}}=\varepsilon_0 E_1=\varepsilon_0\varepsilon_r E_2\end{array}\right.$$

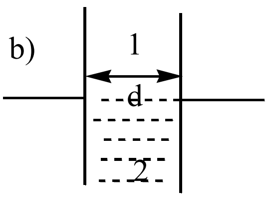
$$\{\Delta V_0=E_0 d\}\quad \left\{\Delta V_1=E_1\frac{d}{2}\right\}\quad \left\{\Delta V_2=E_2\frac{d}{2}\right\}\quad \left\{\begin{array}{l}\Delta V_0=\Delta V=\Delta V_1+\Delta V_2\\ E_0 d=E_1\frac{d}{2}+E_2\frac{d}{2}\end{array}\right.$$

$$E_0 d=\varepsilon_r E_2\frac{d}{2}+E_2\frac{d}{2}=E_2 d\left(\varepsilon_r\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=E_2 d\left(\frac{\varepsilon_r+1}{2}\right)$$

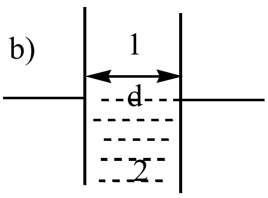
$$E_2=\frac{2E_0}{\varepsilon_r+1}=\frac{2\times 5{,}0\cdot 10^6\ \frac{\text{V}}{\text{m}}}{6+1}=1{,}43\cdot 10^6\ \tfrac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$E_1=\varepsilon_r E_2=8{,}57\cdot 10^6\ \tfrac{\text{V}}{\text{m}}$$

**31)** Las armaduras de un condensador plano están a una distancia d = 10 mm, siendo la intensidad del campo eléctrico, entre ellas, de $5{,}0\cdot 10^6$ V/m si están en el vacío. Si se llena la mitad del espacio entre las armaduras con un dieléctrico, homogéneo e isótropo, de constante dieléctrica 6. Para el caso del dibujo b) determina la diferencia de potencial entre las dos armaduras del condensador y la intensidad del campo eléctrico en ambas mitades en los dos casos siguientes: 1º) si las cargas en las armaduras permanecen constantes con la introducción del dieléctrico; 2º) si se mantiene constante la diferencia de potencial entre las armaduras con la introducción del dieléctrico. [Caso 1º: $\Delta V_1=\Delta V_{\text{dieléctrico}}=E_1 d=E_2 d$ = $1{,}4\cdot 10^4$ V; $E_1=E_2$ = $1{,}4\cdot 10^6$ V/m; Caso 2º: $\Delta V_0=\Delta V$ = $5{,}0\cdot 10^4$ V; $E_1=E_2=5{,}0\cdot 10^6$ V/m]




**Respuesta**:




**Caso 1**: Las cargas en las armaduras permanecen constantes con la introducción del dieléctrico.

Como la carga libre en las armaduras permanece constante la densidad superficial de carga libre no varía. Al introducir el dieléctrico de esa forma, llenando la mitad, la diferencia de potencial entre las placas en las dos zonas tiene que ser la misma, luego el campo eléctrico también ha de ser el mismo en la zona sin dieléctrico que en la zona con dieléctrico. Para ello la carga libre se ha de redistribuir y aumentar la densidad de carga libre en la zona con dieléctrico y disminuir en la otra.

$$\sigma_{libre} = cte. = \varepsilon_0 E_0 \quad \left\{\begin{matrix} \Delta V_0 = E_0 d \\ \Delta V_1 = \Delta V_{2(dieléctrico)} \\ E_1 d = E_2 d \end{matrix}\right\} \Rightarrow E_1 = E_2 \quad \left\{\begin{matrix} E_1 = \dfrac{\sigma_{libre(1)}}{\varepsilon_0} \\ E_2 = \dfrac{\sigma_{libre(2)}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \dfrac{\sigma_{libre(1)}}{\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma_{libre(2)}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \\ \sigma_{libre(1)} = \dfrac{\sigma_{libre(2)}}{\varepsilon_r} \end{matrix}\right.$$

$$\sigma_{libre} = \frac{q_{libre}}{S} = \frac{q_{libre(1)} + q_{libre(2)}}{S} = \frac{q_{libre(1)}}{S} + \frac{q_{libre(2)}}{S} \quad \left\{\begin{matrix} S_1 = \frac{1}{2} S \\ S_2 = \frac{1}{2} S \end{matrix}\right\}$$

$$\sigma_{libre} = \frac{q_{libre(1)}}{2S_1} + \frac{q_{libre(2)}}{2S_2} = \frac{q_{libre(1)}}{2S_1} + \frac{q_{libre(2)}}{2S_2} = \frac{\sigma_{libre(1)}}{2} + \frac{\sigma_{libre(2)}}{2} = \frac{\sigma_{libre(1)} + \sigma_{libre(2)}}{2}$$

$$\varepsilon_0 E_0 = \frac{\varepsilon_0 E_1 + \varepsilon_0 \varepsilon_r E_2}{2} = \frac{\varepsilon_0 E_1 + \varepsilon_0 \varepsilon_r E_1}{2} = \frac{\varepsilon_0 E_2 + \varepsilon_0 \varepsilon_r E_2}{2}$$

$$2E_0 = E_1 + \varepsilon_r E_1 = E_1 (1 + \varepsilon_r) \Rightarrow E_1 = \frac{2E_0}{1+\varepsilon_r} = \frac{2 \times 5,0 \cdot 10^6 \frac{V}{m}}{1+6} = 1,43 \cdot 10^6 \ \frac{V}{m}$$

$$\Delta V_1 = \Delta V_{2(dieléctrico)} = E_1 d = E_2 d = 1,43 \cdot 10^6 \ \tfrac{V}{m} \times 0,010\,m = 1,43 \cdot 10^4 \ V$$

**Caso 2**: Si se mantiene constante la diferencia de potencial entre las armaduras con la introducción del dieléctrico se ha de modificar la densidad de carga sobre las armaduras.

$$\Delta V_0 = \Delta V_1 = \Delta V_{2(dieléctrico)} = 5,0 \cdot 10^4 \ V$$

$$E_0 d = E_1 d = E_2 d$$

$$E_0 = E_1 = E_2 \quad \left\{ E_0 = E_1 = E_2 = 5,0 \cdot 10^6 \ \tfrac{V}{m} \right.$$

**32)** Dos platos paralelos tienen la misma área, de valor 1,0 $m^2$, y la misma carga pero opuesta, de valor $3{,}0 \cdot 10^{-5}$ C. Un material dieléctrico, de permitividad $\varepsilon = 1,5 \cdot 10^{-11} \dfrac{F}{m}$, llena el espacio entre los platos. Calcula: a) el valor de la intensidad del campo eléctrico entre los platos; b) la carga eléctrica de polarización inducida por unidad de área sobre cada superficie del dieléctrico. Dato: $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \ \frac{F}{m}$. [a) $2{,}0 \cdot 10^6$ V/m; b) $1{,}23 \cdot 10^{-5}$ C/$m^2$]

**Respuesta**:

$$\sigma_{libre} = \frac{Q_{libre}}{S} = \frac{3,0 \cdot 10^{-5}\,C}{1,0\,m^2} = 3,0 \cdot 10^{-5} \ \frac{C}{m^2}$$

$$E = \frac{\sigma_{neta}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_{libre} - P}{\varepsilon_0} \quad \left\{ \sigma_{libre} = \varepsilon_0 E + P = \varepsilon_0 E + \varepsilon_0 \chi_e E = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) E = \varepsilon_0 \varepsilon_r E = \varepsilon E \right.$$

$$\left\{\begin{matrix} \sigma_{libre} = \varepsilon_0 E_0 \\ \sigma_{libre} = \varepsilon E \end{matrix}\right\} \quad \sigma_{libre} = \varepsilon_0 E_0 = \varepsilon_0 \varepsilon_r E = \varepsilon E \quad \left\{ E = \frac{\sigma_{libre}}{\varepsilon} = \frac{3,0 \cdot 10^{-5} \ \dfrac{C}{m^2}}{1,5 \cdot 10^{-11} \ \dfrac{F}{m}} = 2,0 \cdot 10^6 \ \frac{V}{m} \right.$$

$$P = \sigma_{libre} - \varepsilon_0 E$$

$$P = 3,0 \cdot 10^{-5} \ \frac{C}{m^2} - \left( 8,85 \cdot 10^{-12} \ \frac{F}{m} \times 2,0 \cdot 10^6 \ \frac{V}{m} \right) = 3,0 \cdot 10^{-5} \ \frac{C}{m^2} - 1,77 \cdot 10^{-5} \ \frac{C}{m^2} = 1,23 \cdot 10^{-5} \ \frac{C}{m^2}$$

**33)** Un electrón viaja desde una placa cargada negativamente a otra cargada positivamente, estando separadas por una distancia de 2 mm y siendo la diferencia de potencial entre ellas de 1.000 V. Calcula: a) la energía cinética y la velocidad con la que llega el electrón si parte del reposo; b) el valor del campo eléctrico entre las placas y el de la fuerza que siente el electrón. Datos: $q_e = -1{,}6\cdot10^{-19}$ C; $m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$ kg. [a) $E_c = 1{,}6\cdot10^{-16}$ J; $1{,}87\cdot10^{7}$ m/s; b) $5{,}0\cdot10^{5}$ V/m; $8{,}0\cdot10^{-14}$ N]

**Respuesta**:

$$W_{por-campo} = \int_i^f \vec{F}_e d\vec{r} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(e)} = -q\Delta V = -q\left(V_f - V_i\right)$$

$$W_{por-campo} = \Delta E_c = -q_e\left(V_+ - V_-\right) = 1{,}6\cdot10^{-19}\,\mathrm{C}\times1.000\,\mathrm{V} = 1{,}6\cdot10^{-16}\,\mathrm{J}$$

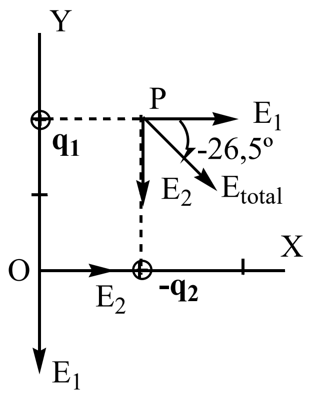
$$\frac{1}{2}m_e v^2 = 1{,}6\cdot10^{-16}\,\mathrm{J} \quad \left\{ v = \sqrt{\frac{2\times1{,}6\cdot10^{-16}\,\mathrm{J}}{9{,}1\cdot10^{-31}\,\mathrm{kg}}} = 1{,}87\cdot10^{7}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \right.$$

$$\vec{E}\cdot\vec{d} = -\Delta V = -\left(V_+ - V_-\right) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}\cdot\vec{d} = E\cdot d\cdot\cos180^\circ = -E\cdot d = -\left(V_+ - V_-\right) \\ E = \dfrac{V_+ - V_-}{d} = \dfrac{1.000\,\mathrm{V}}{0{,}002\,\mathrm{m}} = 5{,}0\cdot10^{5}\,\dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \end{array} \right.$$

$$F = qE = 1{,}6\cdot10^{-19}\,\mathrm{C}\times5{,}0\cdot10^{5}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = 8{,}0\cdot10^{-14}\,\mathrm{N}$$

**34)** Dos cargas $q_1 = 2$ μC y $q_2 = -4$ μC están fijas en los puntos $P_1(0;2)$m y $P_2(1;0)$m, respectivamente. a) Dibuje el campo eléctrico producido por cada una de las cargas en el punto O (0;0) y en el punto P(1;2)m y calcule el campo total en el punto P. b) Calcule el trabajo necesario para desplazar una carga q = -3 μC desde el punto O hasta el punto P y explique el significado del signo del trabajo. Dato: $K = 9\cdot10^{9}$ N m$^2$ C$^{-2}$. [a) 20.000 V/m a -26,5º del eje X; b) 0,081 J y aumenta la energía cinética de la carga]

**Respuesta**:




$$\vec{E}_p = \vec{E}_{p1} + \vec{E}_{p2} = K_e\frac{q_1}{r_{p1}^2}\vec{u}_1 + K_e\frac{q_2}{r_{p2}^2}\vec{u}_2 = K_e\frac{q_1}{r_{p1}^3}\vec{r}_{p1} + K_e\frac{q_2}{r_{p2}^3}\vec{r}_{p2}$$

$$\vec{E}_{p1} = 9\cdot10^{9}\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}}\times\frac{2\cdot10^{-6}\,\mathrm{C}}{(1\,\mathrm{m})^3}\times\left[\left(1\,\mathrm{m}\,\vec{i} + 2\,\mathrm{m}\,\vec{j}\right) - 2\,\mathrm{m}\,\vec{j}\right] = 1{,}8\cdot10^{4}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\,\vec{i}$$

$$\vec{E}_{p2} = 9\cdot10^{9}\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}}\times\frac{\left(-4\cdot10^{-6}\,\mathrm{C}\right)}{(2\,\mathrm{m})^3}\times\left[\left(1\,\mathrm{m}\,\vec{i} + 2\,\mathrm{m}\,\vec{j}\right) - 1\,\mathrm{m}\,\vec{i}\right] = -9{,}0\cdot10^{3}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\,\vec{j}$$

$$\vec{E}_p = 1{,}8\cdot 10^4\ \frac{N}{C}\,\vec{i} - 9{,}0\cdot 10^3\ \frac{N}{C}\,\vec{j} \quad \begin{cases} \left|\vec{E}_p\right| = \sqrt{\left(1{,}8\cdot 10^4\right)^2 + \left(9{,}0\cdot 10^3\right)^2} = 2{,}0\cdot 10^4\ \dfrac{N}{C} \\ \alpha = \arctan\dfrac{-9{,}0\cdot 10^3}{1{,}8\cdot 10^4} = -26{,}5^{o} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_p = V_{p1} + V_{p2} = K_e\dfrac{q_1}{r_{p1}} + K_e\dfrac{q_2}{r_{p2}} = 9\cdot 10^9\ \dfrac{N\,m^2}{C^2}\times\left(\dfrac{2\cdot 10^{-6}\,C}{1\,m} - \dfrac{4\cdot 10^{-6}\,C}{2\,m}\right) = 0\,V \\ V_O = V_{O1} + V_{O2} = K_e\dfrac{q_1}{r_{O1}} + K_e\dfrac{q_2}{r_{O2}} = 9\cdot 10^9\ \dfrac{N\,m^2}{C^2}\times\left(\dfrac{2\cdot 10^{-6}\,C}{2\,m} - \dfrac{4\cdot 10^{-6}\,C}{1\,m}\right) = -2{,}7\cdot 10^4\,V \end{cases}$$

$$W^{p}_{O(por-campo)} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(e)} = -q\Delta V_{(e)}$$

$$W^{p}_{O(por-campo)} = -q\left(V_p - V_O\right) = -\left(-3{,}0\cdot 10^{-6}\,C\right)\times\left[0\,V - \left(-2{,}7\cdot 10^4\,V\right)\right] = 0{,}081\,J \quad \{\Delta E_c > 0$$

**35)** Una partícula de 6 μC se encuentra en reposo en el punto (0,0). Se aplica un campo eléctrico uniforme de 500 N/C, dirigido en el sentido positivo del eje OY. a) Describe la trayectoria seguida por la partícula hasta el instante en que se encuentra en el punto A, situado a 2 m del origen. ¿Aumenta o disminuye la energía potencial de la partícula en dicho desplazamiento?, ¿en qué se convierte dicha variación de energía?. b) Calcule el trabajo realizado por el campo en el desplazamiento de la partícula y la diferencia de potencial entre el origen y el punto A. [a) Recta en sentido del campo; disminuye energía potencial y aumenta energía cinética; b) $6{,}0\cdot 10^{-3}$ J y 1.000 V]

**Respuesta**:

La trayectoria es una línea recta en el sentido del campo eléctrico ya que la carga es positiva. La energía potencial del sistema disminuye con el desplazamiento y se convierte en energía cinética.

$$\vec{F}_e = q\vec{E} = m\vec{a} \quad \left\{\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}\right.$$

$$W_{por-campo} = \Delta E_c = -\Delta E_p = -\left(E_{p(f)} - E_{p(i)}\right) = E_{p(i)} - E_{p(f)} \quad \{E_{p(i)} > E_{p(f)}$$

$$\left.\begin{cases} C = \displaystyle\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\Delta V \\ E\Delta r = E\left(r_f - r_i\right) = -\Delta V = -\left(V_f - V_i\right) = V_i - V_f \end{cases}\right\} \quad \{V_i - V_f = E\Delta r = 500\,\tfrac{N}{C}\times 2\,m = 1.000\,V$$

$$W_{por-campo} = \Delta E_c = -\Delta E_p = -q\Delta V = -6{,}0\cdot 10^{-6}\,C\times\left(-1.000\,V\right) = 6{,}0\cdot 10^{-3}\,J$$

**36)** Conteste razonadamente a las siguientes preguntas: a) ¿puede ser nulo el campo eléctrico producido por dos cargas puntuales en un punto del segmento que las une?; b) ¿se puede determinar el campo eléctrico en un punto si conocemos el valor del potencial eléctrico en ese punto?.

**37)** Dos cargas puntuales, $q_1$ = 3 μC y $q_2$ = 12 μC, están situadas, respectivamente, en los puntos A y B de una recta horizontal, separados 20 cm. Razone cómo varía el campo eléctrico entre los puntos A y B y represente gráficamente dicha variación en función de la distancia al punto A. ¿Existe algún punto de la recta que contiene a las cargas en el que el campo sea cero?, en caso afirmativo calcule su posición. [En el punto x = 0,066 m desde el punto A el campo es cero. Desde el punto A hasta x el campo es positivo, en el sentido de A hasta B. Desde el punto x hasta el B el campo es negativo, en el sentido de B hasta A]

**Respuesta**:

$$\vec{E}_{entre(A-B)} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = K_e \frac{q_1}{r_1^2}\vec{u}_1 + K_e \frac{q_2}{r_2^2}\vec{u}_2 = 9\cdot 10^9 \times \frac{3\cdot 10^{-6}}{r_1^2}\vec{i} + 9\cdot 10^9 \times \frac{12\cdot 10^{-6}}{\left(0,20-r_1\right)^2}\left(-\vec{i}\right)$$

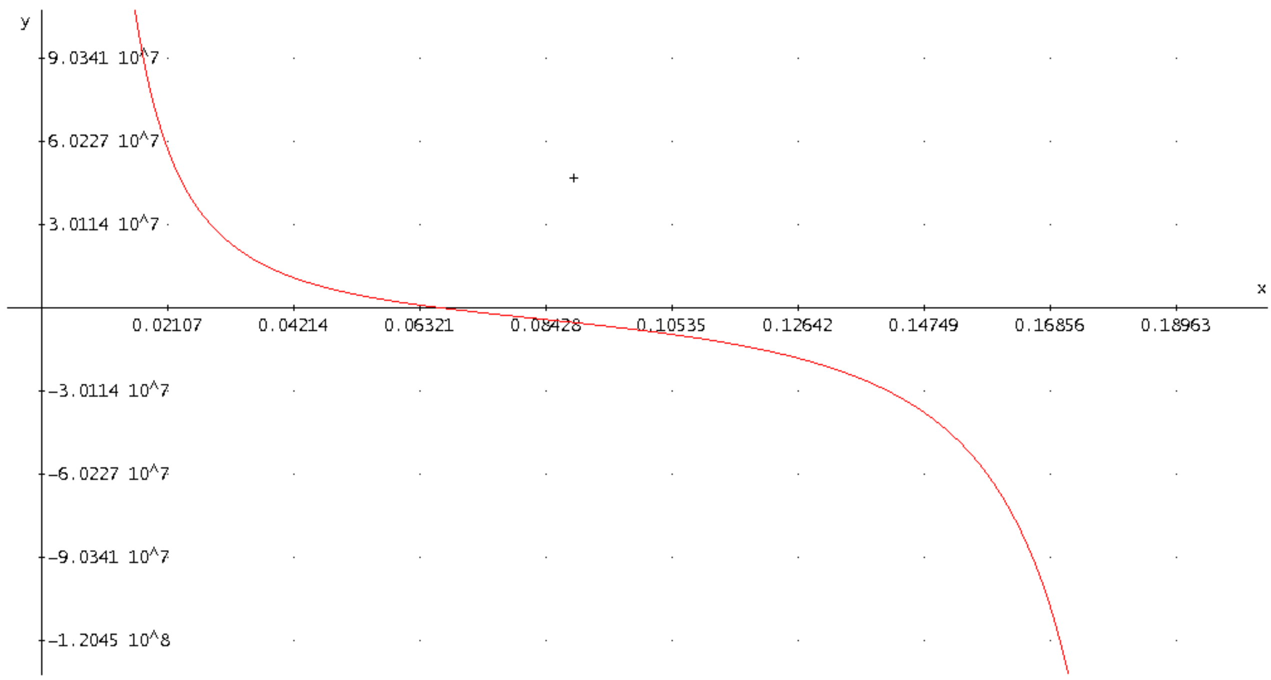
$$E_{entre(A-B)} = 9\cdot 10^9 \times \frac{3\cdot 10^{-6}}{r_1^2} - 9\cdot 10^9 \times \frac{12\cdot 10^{-6}}{\left(0,20-r_1\right)^2} = \frac{27.000}{r_1^2} - \frac{108.000}{\left(0,20-r_1\right)^2}$$

$$E_{entre(A-B)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{27.000}{r_{1eq}^2} = \frac{108.000}{\left(0,20-r_{1eq}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{0,20-r_{1eq}}{r_{1eq}} = \sqrt{\frac{108.000}{27.000}} = 2$$

$$0,20 - r_{1eq} = 2r_{1eq} \quad \Rightarrow \quad r_{1eq} = \frac{0,20}{3}\,m = 0,06\widehat{6}\,m$$

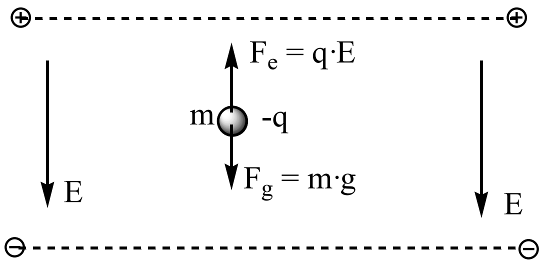
$$E_{entre(A-B)}\left(r_1 = 0,02\,m < r_{1eq}\right) = \frac{27.000}{r_1^2} - \frac{108.000}{\left(0,20-r_1\right)^2} = \frac{27.000}{0,02^2} - \frac{108.000}{\left(0,20-0,02\right)^2} = 6,4166\cdot 10^7\ \tfrac{N}{C}$$

$$E_{entre(A-B)}\left(r_1 = 0,10\,m > r_{1eq}\right) = \frac{27.000}{r_1^2} - \frac{108.000}{\left(0,20-r_1\right)^2} = \frac{27.000}{0,10^2} - \frac{108.000}{\left(0,20-0,10\right)^2} = -8.1\cdot 10^6\ \tfrac{N}{C}$$




**38)** Una partícula de masa m y carga q = -1 μC se encuentra en reposo al estar sometida al campo gravitatorio terrestre y a un campo eléctrico uniforme E = 100 N/C de la misma dirección. a) Haga un esquema de las fuerzas que actúan sobre la partícula y calcule su masa; b) Analice el movimiento de la partícula si el campo eléctrico aumentara a 120 N/C y determine su aceleración. [a) m = $1,02\cdot 10^{-5}$ kg; b) $a_y$ = 1,96 m/s$^2$]

**Respuesta**:




$$\vec{F}_{neta}=\vec{F}_g+\vec{F}_e=m\vec{a}=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{Bmatrix}\vec{F}_g=-\vec{F}_e\\ m\vec{g}=-q\vec{E}\end{Bmatrix} \quad \begin{cases}\vec{F}_g=m\vec{g}=-m\cdot 9{,}8\,\vec{j}\\ \vec{F}_e=q\vec{E}=\left(-1{,}0\cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}\right)\times\left(-100\,\tfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\,\vec{j}\right)=1{,}0\cdot 10^{-4}\,\mathrm{N}\,\vec{j}\end{cases}$$

$$m=\frac{-\vec{F}_e}{\vec{g}}=\frac{-q\vec{E}}{\vec{g}}=\frac{-1{,}0\cdot 10^{-4}\,\mathrm{N}\,\vec{j}}{-9{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,\vec{j}}=1{,}02\cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg}$$

$$\vec{F}'_e=q\vec{E}'=\left(-1{,}0\cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}\right)\times\left(-120\,\tfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\,\vec{j}\right)=1{,}2\cdot 10^{-4}\,\mathrm{N}\,\vec{j}$$

$$\vec{F}'_{neta}=\vec{F}_g+\vec{F}'_e=-\vec{F}_e+\vec{F}'_e=-1{,}0\cdot 10^{-4}\,\mathrm{N}\,\vec{j}+1{,}2\cdot 10^{-4}\,\mathrm{N}\,\vec{j}=2{,}0\cdot 10^{-5}\,\mathrm{N}\,\vec{j}=m\vec{a}$$

$$\vec{a}=\frac{\vec{F}'_{neta}}{m}=\frac{2{,}0\cdot 10^{-5}\,\mathrm{N}\,\vec{j}}{\frac{1{,}0\cdot 10^{-4}\,\mathrm{N}}{9{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}=1{,}96\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,\vec{j}$$

**39)** a) Una partícula cargada negativamente pasa de un punto A, cuyo potencial es $V_A$ a otro B, cuyo potencial es $V_B > V_A$. Razone si la partícula gana o pierde energía potencial. b) Los puntos C y D pertenecen a una misma superficie equipotencial. ¿Se realiza trabajo al trasladar una carga (positiva o negativa) desde C a D?. Justifique la respuesta.

**Respuesta**:

$$\Delta E_{p(e)}=E_{p(e)(B)}-E_{p(e)(A)}=q\Delta V=q\left(V_B-V_A\right)=-|q|\cdot|V_B-V_A|<0$$

$$E_{p(e)(B)}-E_{p(e)(A)}<0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{E_{p(e)(B)}<E_{p(e)(A)}}$$

$$W_{contra-campo}=\Delta E_{p(e)}=E_{p(e)(D)}-E_{p(e)(C)}=q\left(V_D-V_C\right)=0$$

**40)** Sean dos cargas puntuales: $q_1 = 1\ \mu C$ en el punto (0;0) y $q_2 = -2\ \mu C$ en el punto (0,05;0) m. Determine: a) el punto P(x;0) en el que la intensidad del campo eléctrico es cero; b) la fuerza que siente la carga $q_3 = 3$ nC colocada en P(x;0); c) el potencial eléctrico, debido a $q_1$ y $q_2$, en P(x;0); d) la energía potencial de $q_3 = 3$ nC colocada en P(x;0); e) el trabajo realizado contra el campo eléctrico para llevar $q_3 = 3$ nC desde P(x;0) hasta el infinito ($E_p = 0$). Dato: $K_e = 9\cdot 10^9\ N\cdot m^2/C^2$. [a) P(–0,12·m;0); b) $F_3 = q_3\cdot E = 0$; c) $V_P = -30.882{,}353$ V; d) $E_{p(e)} = -9{,}2647\cdot 10^{-5}$ J; e) $W_{contra} = 9{,}2647\cdot 10^{-5}$ J]

**Respuesta**:

El punto donde el campo eléctrico es cero no puede estar en un punto entre las dos cargas, ya que una es positiva y la otra negativa, estará más próximo a la menor ($q_1$) y alejada de la mayor, de tal forma que será P(−x;0).

$$\vec{E}_{(x;0)} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_1 = -\vec{E}_2$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left|\vec{E}_1\right| = \left|\vec{E}_2\right| \\ \left|K_e \dfrac{q_1}{x_1^2}\right| = \left|K_e \dfrac{q_2}{x_2^2}\right| \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \left|\dfrac{q_1}{x_1^2}\right| = \left|\dfrac{q_2}{x_2^2}\right| = \left|\dfrac{q_2}{\left(x_1+0,05\right)^2}\right| \\ \left|\dfrac{\left(x_1+0,05\right)^2}{x_1^2}\right| = \left|\dfrac{q_2}{q_1}\right| = \left|\dfrac{-2,0\cdot 10^{-6}}{1,0\cdot 10^{-6}}\right| = 2 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\left(x_1+0,05\right)^2}{x_1^2} = 2 \\ x_1 + 0,05 = \sqrt{2}\cdot x_1 \\ x_1 = \dfrac{0,05}{\sqrt{2}-1} = 0,12\,\text{m} \end{array}\right.$$

$$V_{neto} = V_1 + V_2 = K_e \frac{q_1}{r_1} + K_e \frac{q_2}{r_2} = 9\cdot 10^9 \times \frac{1,0\cdot 10^{-6}}{0,12}\,\text{V} + 9\cdot 10^9 \times \frac{\left(-2,0\cdot 10^{-6}\right)}{\left(0,12+0,05\right)}\,\text{V}$$

$$V_{neto} = V_1 + V_2 = 75.000\,\text{V} - 105.882,353\,\text{V} = -30.882,353\,\text{V}$$

$$E_p = q_3 V_3 = 3,0\cdot 10^{-9}\,\text{C} \times \left(-30.882,353\,\text{V}\right) = -9,2647\cdot 10^{-5}\,\text{J}$$

$$W_{contra-campo} = \Delta E_p = 0 - E_p = 9,2647\cdot 10^{-5}\,\text{J}$$

**41)** Sean dos cargas puntuales: $q_1 = 1,0$ μC situada en el punto O(0;0) y $q_2 = -2,0$ μC situada en el punto P(0,10·m;0). Determine: a) los puntos sobre el eje Y en los que el potencial del campo eléctrico sea cero; b) la energía potencial de una tercera carga $q_3 = 1,0$ nC situada en el punto Q(–0,20·m;0); c) el trabajo que hay que hacer contra el campo eléctrico para que la carga $q_3$ se desplace desde el punto Q hasta un punto en el que el potencial eléctrico sea cero. Dato: $K_e = 9\cdot 10^9$ N·m²/C². [a) y = ± 0,0577 m; b) $E_{p(e)} = -1,5\cdot 10^{-5}$ J; c) $W_{contra\text{-}campo} = 1,5\cdot 10^{-5}$ J]

**Respuesta**:

$$V_{neto} = V_1 + V_2 = K_e \frac{q_1}{r_1} + K_e \frac{q_2}{r_2} = K_e\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} = 0$$

$$\frac{q_1}{r_1} = -\frac{q_2}{r_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1\,\mu\text{C}}{y} = -\frac{-2\,\mu\text{C}}{\sqrt{y^2+0,1^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} = \frac{2}{\sqrt{y^2+0,1^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y^2} = \frac{4}{y^2+0,1^2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 4y^2 = y^2 + 0,01 \\ 3y^2 = 0,01 \end{array}\right\} \qquad y = \pm\sqrt{\frac{0,01}{3}} = \pm 0,0577\,\text{m}$$

$$E_{p(e)} = q_3 V_{e(-0,20;0)}$$

$$V_{e(-0,20;0)} = V_1 + V_2 = K_e \frac{q_1}{r_1} + K_e \frac{q_2}{r_2}$$

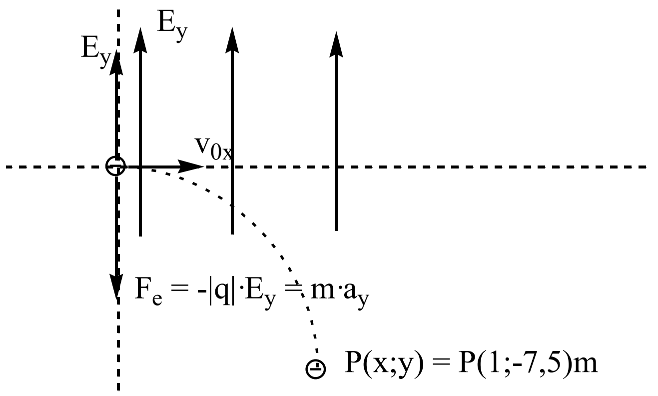
$$\left\{\begin{array}{l} V_{e(-0,20;0)} = 9,0\cdot 10^9\,\dfrac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2} \times \dfrac{1,0\cdot 10^{-6}\,\text{C}}{0,20\,\text{m}} + 9,0\cdot 10^9\,\dfrac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2} \times \dfrac{\left(-2,0\cdot 10^{-6}\,\text{C}\right)}{\left(0,20\,\text{m} + 0,10\,\text{m}\right)} \\ V_{e(-0,20;0)} = 45.000\,\text{V} - 60.000\,\text{V} = -15.000\,\text{V} \end{array}\right.$$

$$E_{p(e)} = q_3 V_{e(-0,20;0)} = 1,0\cdot 10^{-9}\,\text{C} \times \left(-15.000\,\text{V}\right) = -1,5\cdot 10^{-5}\,\text{J}$$

$$W_{contra-campo} = +\Delta E_{p(e)} = 0 - E_{p(i)} = +1,5\cdot 10^{-5}\,\text{J}$$

**42)** Una partícula, de masa m = 0,005 kg y cargada negativamente q = –6 μC, se mueve en línea recta por el eje X con una velocidad $v_x = 0,2$ m/s y en el sentido +X. Al pasar por el origen O(0;0) penetra en una región (x > 0) en la que existe un campo eléctrico uniforme, perpendicular a su trayectoria y en sentido positivo del eje Y (+Y), siendo su valor $E_y = 500$ N/C. Calcule: a) la posición P(x;y) de la partícula al cabo de 5 s, sabiendo que empieza desde el origen O(0;0). b) Determine la diferencia de potencial entre los puntos $\Delta V = V_P - V_O$; c) el trabajo realizado por el campo eléctrico en ese desplazamiento y el incremento en la energía cinética de la partícula; d) la nueva velocidad de la partícula en el punto P. [a) La trayectoria es una parábola desde O(0;0) hasta un punto P(1;-7,5)m; disminuyendo la energía potencial de la partícula; b) $\Delta V = V_P - V_O = 3.750$ V; c) $W_{por\text{-}campo} = -\Delta E_{p(e)} = -q\cdot\Delta V = 0{,}0225$ J; $W_{por\text{-}campo} = \Delta E_c = 0{,}0225$ J; d) $v_p = 3{,}0$ m/s]

**Respuesta**:




$$\vec{F}_e = q\vec{E} = m\vec{a} \quad \begin{cases} \vec{E} = 500\,\tfrac{N}{C}\,\vec{j} \\ v_{0x} = 0{,}2\,\tfrac{m}{s} \end{cases} \begin{cases} \vec{F}_e = q\vec{E} = -6{,}0\cdot 10^{-6}\,C\times 500\,\tfrac{N}{C}\,\vec{j} = -0{,}03\,N\,\vec{j} \\ \vec{a} = \dfrac{\vec{F}_e}{m} = \dfrac{-0{,}03\,N\,\vec{j}}{0{,}005\,kg} = -0{,}6\,\tfrac{m}{s^2}\,\vec{j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta x = v_{0x}t = 0{,}2\,\tfrac{m}{s}\times 5\,s = 1{,}0\,m \\ \Delta y = v_{0y}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2 = 0 + \tfrac{1}{2}\times\left(-0{,}6\,\tfrac{m}{s^2}\right)\times(5\,s)^2 = -7{,}5\,m \end{cases} \quad O(0;0) \Rightarrow P(1\cdot m; -7{,}5\cdot m)$$

$$\vec{E}\cdot\Delta\vec{r} = -\Delta V$$

$$\Delta V = V_P - V_O = -\vec{E}\cdot\Delta\vec{r} = -500\,\tfrac{V}{m}\,\vec{j}\times\left(1\,m\,\vec{i} - 7{,}5\,m\,\vec{j}\right) = +3.750\,V$$

$$\Delta E_{p(e)} = q\Delta V = -6{,}0\cdot 10^{-6}\,C\times 3.750\,V = -0{,}0225\,J$$

$$W^{P}_{O(por-campo)} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(e)} = +0{,}0225\,J$$

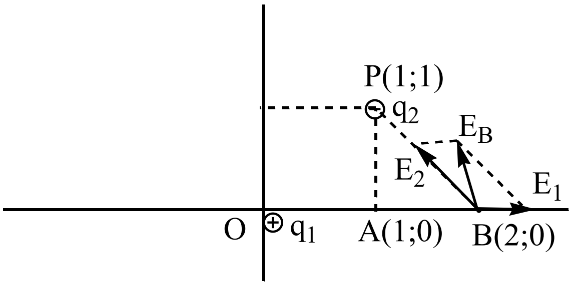
$$W^{P}_{O(por-campo)} = +0{,}0225\,J = \Delta E_c = E_{c(P)} - E_{c(O)} = \tfrac{1}{2}mv_P^2 - \tfrac{1}{2}mv_O^2$$

$$E_{c(O)} = \tfrac{1}{2}mv_O^2 = \tfrac{1}{2}\times 0{,}005\,kg\times\left(0{,}2\,\tfrac{m}{s}\right)^2 = 0{,}0001\,J$$

$$E_{c(P)} = \Delta E_c + E_{c(O)} = 0{,}0225\,J + 0{,}0001\,J = 0{,}0226\,J = \tfrac{1}{2}mv_P^2 \quad\Rightarrow\quad v_P = \sqrt{\frac{2\times 0{,}0226\,J}{0{,}005\,kg}} = 3{,}0\,\tfrac{m}{s}$$

**43)** Una carga $q_1 = 3\ \mu C$ se encuentra en el origen de coordenadas O(0;0) y otra carga $q_2 = -3\ \mu C$ está situada en el punto P(1,1) m. a) Dibuje en un esquema el campo eléctrico en el punto B(2,0) m y calcule su valor indicando el ángulo con el eje X. ¿Cuál es el potencial eléctrico en el punto B?. b) Calcule el trabajo necesario para desplazar una carga de 10 μC desde el punto A(1,0) m hasta el punto B(2,0) m. [a) $E_B = 9.946{,}97$ N/C; $\theta = 106{,}32º$; $V_B = -5.591{,}88$ V; b) $W_{contra} = -0{,}05592$ J]

**Respuesta**:




$$\vec{E}_B = \vec{E}_{B1} + \vec{E}_{B2} = K_e \frac{q_1}{r_{B1}^2}\vec{u}_{B1} + K_e \frac{q_2}{r_{B2}^2}\vec{u}_{B2}$$

$$\begin{cases} \vec{u}_{B1} = \dfrac{\vec{r}_{B1}}{r_{B1}} = \dfrac{\vec{r}_B - \vec{r}_1}{r_{B1}} = \dfrac{2\,m\,\vec{i} - 0}{2\,m} = \vec{i} \\ \vec{u}_{B2} = \dfrac{\vec{r}_{B2}}{r_{B2}} = \dfrac{\vec{r}_B - \vec{r}_2}{r_{B2}} = \dfrac{2\,m\,\vec{i} - \left(1\,m\,\vec{i} + 1\,m\,\vec{j}\right)}{\sqrt{2}\,m} = \dfrac{1\,m\,\vec{i} - 1\,m\,\vec{j}}{\sqrt{2}\,m} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} \end{cases}$$

$$\vec{E}_{B1} = K_e \frac{q_1}{r_{B1}^2}\vec{u}_{B1} = 9\cdot 10^9\ \tfrac{Nm^2}{C^2} \times \frac{3\cdot 10^{-6}\ C}{(2\,m)^2}\vec{i} = 6.750\ \tfrac{N}{C}\ \vec{i}$$

$$\vec{E}_{B2} = K_e \frac{q_2}{r_{B2}^2}\vec{u}_{B2} = 9\cdot 10^9\ \tfrac{Nm^2}{C^2} \times \frac{\left(-3\cdot 10^{-6}\ C\right)}{\left(\sqrt{2}\,m\right)^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\right) = -9.545,94\ \tfrac{N}{C}\ \vec{i} + 9.545,94\ \tfrac{N}{C}\ \vec{j}$$

$$\vec{E}_B = \vec{E}_{B1} + \vec{E}_{B2} = -2.795,54\ \tfrac{N}{C}\ \vec{i} + 9.545,94\ \tfrac{N}{C}\ \vec{j}$$

$$E_B = 9.946,97\ \tfrac{N}{C} \quad \Rightarrow \quad \theta = \arctan\frac{E_y}{E_x} = \arctan\frac{9.545,94\ \tfrac{N}{C}}{-2.795,54\ \tfrac{N}{C}} = 106,32^{o}$$

$$V_B = V_{B1} + V_{B2}$$

$$\begin{cases} V_{B1} = K_e \dfrac{q_1}{r_{B1}} = 9\cdot 10^9\ \tfrac{Nm^2}{C^2} \times \dfrac{3\cdot 10^{-6}\ C}{2\,m} = 13.500\ V \\ V_{B2} = K_e \dfrac{q_2}{r_{B2}} = 9\cdot 10^9\ \tfrac{Nm^2}{C^2} \times \dfrac{\left(-3\cdot 10^{-6}\ C\right)}{\sqrt{2}\,m} = -19.091,88\ V \end{cases}$$

$$V_B = V_{B1} + V_{B2} = 13.500\ V - 19.091,88\ V = -5.591,88\ V$$

$$V_A = V_{A1} + V_{A2}$$

$$\begin{cases} V_{A1} = K_e \dfrac{q_1}{r_{A1}} = 9\cdot 10^9\ \tfrac{Nm^2}{C^2} \times \dfrac{3\cdot 10^{-6}\ C}{1\,m} = 27.000\ V \\ V_{A2} = K_e \dfrac{q_2}{r_{A2}} = 9\cdot 10^9\ \tfrac{Nm^2}{C^2} \times \dfrac{\left(-3\cdot 10^{-6}\ C\right)}{1\,m} = -27.000\ V \end{cases}$$

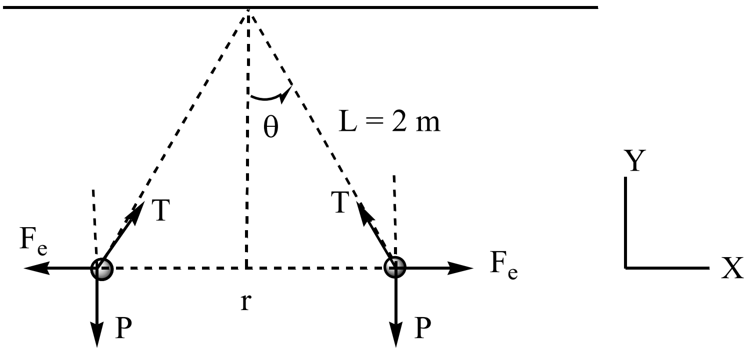
$$V_A = V_{A1} + V_{A2} = 0$$

$$W_{contra-campo} = \Delta E_{p(e)} = q\Delta V = 10\cdot 10^{-6}\ C \times \left(-5.591,88\ V - 0\right) = -0,05592\ J$$

**44)** Dos bolitas muy pequeñas, de radio despreciable, y masa m = 20 g cada una, están suspendidas de un mismo punto por sendos hilos de longitud L = 2 m de longitud. Cuando ambas se cargan con la misma carga eléctrica q, los hilos se separan un ángulo de θ = 15º con la vertical. Suponga que se encuentran en el vacío y próximas a la superficie de la Tierra. a) Calcula el valor de la carga eléctrica q comunicada a cada bolita y el valor de la fuerza eléctrica entre ellas. b) Se duplica el valor de la carga eléctrica de la bolita de la derecha q' = 2q. Dibuje en un esquema las dos situaciones (antes y después de duplicar la carga de una bolita) e indique todas las fuerzas que actúan sobre ambas bolitas en la nueva situación de equilibrio. Datos: $K_e = 9\cdot 10^9$ N·m²/C²; g = 9,8 m/s²; considera que para θ pequeños: tanθ = senθ. [a) $F_e$ = 0,0525 N; q = 2,5 μC; T = 0,203 N; r = 1,035 m; b) r' = 1,32 m; $F'_e$ = 0,06456 N; θ = 18,23º; T' = 0,206 N]

**Respuesta**:

Cada bolita está en equilibrio:




$$\vec{F}_{neta} = \vec{P} + \vec{F}_e + \vec{T} = m\vec{a} = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} F_{x(neta)} = F_e - T\,sen15^o = 0 \\ F_{y(neta)} = T\cos 15^o - P = 0 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} T\,sen15^o = F_e \\ T\cos 15^o = P \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \tan 15^o = \frac{F_e}{P}$$

$$F_e = P\cdot\tan 15^o = mg\cdot\tan 15^o = 0{,}020\,kg\times 9{,}8\,\tfrac{m}{s^2}\times\tan 15^o = 0{,}0525\,N$$

$$T = \frac{F_e}{sen15^o} = \frac{0{,}0525\,N}{sen15^o} = 0{,}203\,N$$

$$F_e = K_e\frac{qq}{r^2} = K_e\frac{q^2}{r^2} \quad \left\{\begin{array}{l} r = 2\cdot\left(L\cdot sen15^o\right) = 2\times 2\,m\times sen15^o = 1{,}035276\,m \\ q = \sqrt{\dfrac{F_e\cdot r^2}{K_e}} = \sqrt{\dfrac{0{,}0525\,N\times\left(1{,}035276\,m\right)^2}{9\cdot 10^9\,\frac{N\cdot m^2}{C^2}}} = 2{,}50\cdot 10^{-6}\,C = 2{,}50\,\mu C \end{array}\right.$$

$$\vec{F}_{neta} = \vec{P} + \vec{F}'_e + \vec{T}' = 0 \begin{cases} F_x = F'_e - T'\operatorname{sen}\theta' = 0 \\ F_y = T'\cos\theta' - P = 0 \end{cases} \begin{cases} T'\operatorname{sen}\theta' = F'_e \\ T'\cos\theta' = P \end{cases} \quad \tan\theta' = \frac{F'_e}{P}$$

$$\tan\theta' = \frac{F'_e}{P} = \frac{K_e \frac{qq'}{r'^2}}{P} = \frac{K_e 2q^2}{mgr'^2}$$

$$\tan\theta' = \frac{\frac{r'}{2}}{L\cos\theta'} = \frac{r'}{2L\cos\theta'} \underset{\cos\theta' \approx 1}{\overset{\theta'<20^o}{=}} \frac{r'}{2L}$$

$$\tan\theta' = \frac{K_e 2q^2}{mgr'^2} = \frac{r'}{2L}$$

$$\frac{K_e 2q^2 2L}{mg} = r'^3$$

$$r' = \sqrt[3]{\frac{K_e 2q^2 2L}{mg}} = \sqrt[3]{\frac{9\cdot 10^9\ \frac{N\cdot m^2}{C^2} \times 2 \times \left(2{,}5\cdot 10^{-6}\,C\right)^2 \times 2 \times 2\,m}{0{,}020\,kg \times 9{,}8\,\frac{m}{s^2}}} = 1{,}320\,m$$

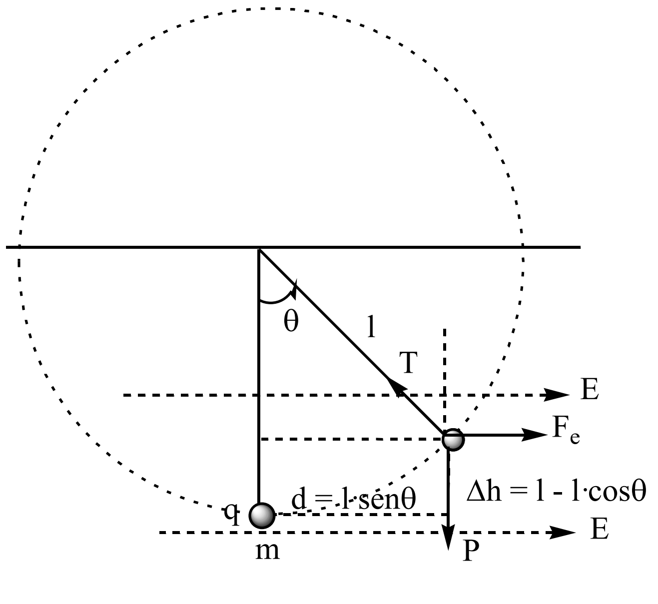
$$F'_e = K_e \frac{qq'}{r'^2} = 9\cdot 10^9\ \frac{N\cdot m^2}{C^2} \times \frac{2{,}5\cdot 10^{-6}\,C \times \left(2\times 2{,}5\cdot 10^{-6}\right)C}{\left(1{,}320\,m\right)^2} = 0{,}064566\,N$$

$$\theta' = \arctan\left(\frac{r'}{2L}\right) = \arctan\left(\frac{1{,}32\,m}{4\,m}\right) = 18{,}2^o$$

$$T' = \frac{F'_e}{\operatorname{sen}18{,}2^o} = 0{,}20636\,N$$

**45)** Una pequeña esfera de 5 g y carga eléctrica q cuelga del extremo inferior de un hilo aislante, inextensible y de masa despreciable, de 0,5 m de longitud. Al aplicar un campo eléctrico horizontal de 200 V/m el hilo se separa de la vertical hasta formar un ángulo de 30º. a) Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre la esfera y determine el valor de la carga q y el de todas las fuerzas que actúan sobre ella. b) Haga un análisis energético del proceso y calcule el cambio de energía potencial de la esfera. Dato: g = 9,8 m/s$^2$. [a) $F_e$ = 0,028290 N; q = 0,000141451 C; T = 0,05658 N; b) $\Delta E_{p(g)}$ = 0,0032824 J; $\Delta E_{p(e)}$ = -0,0070725 J]

**Respuesta**:



$$\vec{F}_{neta} = \vec{P} + \vec{F}_e + \vec{T} = m\vec{a} = 0 \quad \begin{cases} F_{x(neta)} = F_e - T\,\text{sen}\,\theta = 0 \\ F_{y(neta)} = T\cos\theta - P = 0 \end{cases} \begin{cases} T\,\text{sen}\,\theta = F_e \\ T\cos\theta = P \end{cases} \Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{F_e}{P}$$

$$F_e = P\cdot\tan\theta = 0,005\,\text{kg}\times 9,8\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\times\tan 30^\text{o} = 0,049\,\text{N}\times\tan 30^\text{o} = 0,028290\,\text{N}$$

$$F_e = qE \quad \Rightarrow \quad q = \frac{F_e}{E} = \frac{0,028290\,\text{N}}{200\,\frac{\text{V}}{\text{m}}} = 0,000141451\,\text{C}$$

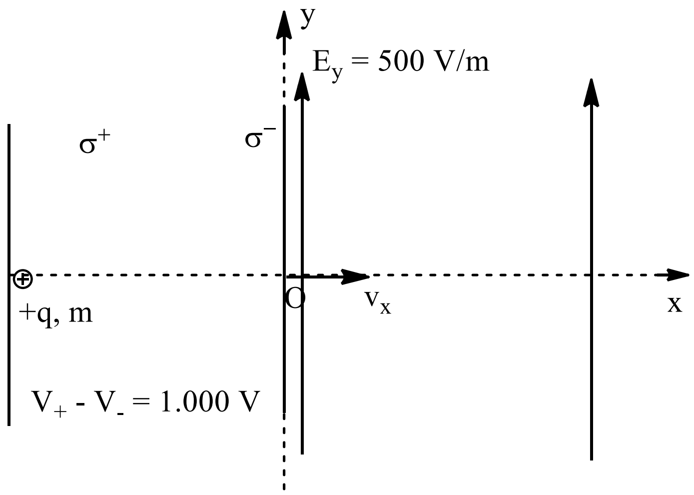
$$T = \frac{P}{\cos\theta} = \frac{0,049\,\text{N}}{\cos 30^\text{o}} = 0,05658\,\text{N}$$

$$\begin{cases} \Delta E_{p(g)} = mg\Delta h \\ \Delta h = l - l\cos\theta = 0,5\,\text{m} - 0,5\,\text{m}\times\cos 30^\text{o} = 0,066990\,\text{m} \\ \Delta E_{p(g)} = mg\Delta h = 0,005\,\text{kg}\times 9,8\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\times 0,06699\,\text{m} = +0,0032824\,\text{J} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta E_{p(e)} = q\Delta V \\ \Delta V = -\vec{E}\cdot\vec{d} = -E\cdot l\cdot\text{sen}\,\theta = -200\,\tfrac{\text{V}}{\text{m}}\times 0,5\,\text{m}\times\text{sen}\,30^\text{o} = -50\,\text{V} \\ \Delta E_{p(e)} = q\Delta V = 0,00014145\,\text{C}\times(-50\,\text{V}) = -0,0070725\,\text{J} \end{cases}$$

A lo largo del proceso al aplicarle el campo eléctrico a la esfera aparece una fuerza neta que la acelera y describe la curva, luego la energía potencial eléctrica se transforma en parte en energía potencial gravitatoria. Pierde energía potencial eléctrica (va hacia puntos de menor potencial eléctrico $\Delta V < 0$) y gana gravitatoria.

**46)** Una partícula de masa $m = 1,0\cdot 10^{-25}$ kg y cargada positivamente $q = 3,2\cdot 10^{-19}$ C se acelera horizontalmente en el eje X, desde el reposo, colocándola en una región en la que existe una diferencia de potencial de $\Delta V_x = 1.000$ V. Al salir de esa región con una velocidad $v_x$ pasa por el origen O(0;0) y penetra en otra región en la que existe un campo eléctrico uniforme, perpendicular a su trayectoria, de valor $E_y = 500$ V/m. Calcule: a) la posición P(x;y) de la partícula a los $10^{-5}$ s; b) el incremento de la energía potencial eléctrica que experimenta la partícula desde el origen O hasta P; c) el incremento en su energía cinética entre los puntos anteriores. [a) P(0,8·m;0,08·m); b) $\Delta E_p = -1,28\cdot 10^{-17}$ J; c) $\Delta E_c = +1,28\cdot 10^{-17}$ J]




**Respuesta**:

En la zona de $\Delta V_x = 1.000$ V experimenta una aceleración debido a la fuerza eléctrica:

$$W_{por-campo} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(e)} = -q_e \Delta V$$

$$W_{por-campo} = \Delta E_c = -q_e\left(V_- - V_+\right) = -\left(3,2\cdot 10^{-19}\,\text{C}\right)\times\left(-1.000\,\text{V}\right) = +3,2\cdot 10^{-16}\,\text{J}$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m v_x^2 - 0 \quad\Rightarrow\quad v_x = \sqrt{\frac{2\Delta E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2\times 3,2\cdot 10^{-16}\,\text{J}}{1,0\cdot 10^{-25}\,\text{kg}}} = 80.000\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

En la zona de campo eléctrico $E_y = 500$ V/m experimenta una aceleración debido a la nueva fuerza eléctrica:

$$\vec{F} = m\vec{a} = q\vec{E} \quad\Rightarrow\quad \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m} = \frac{3,2\cdot 10^{-19}\,\text{C}\times 500\,\tfrac{\text{V}}{\text{m}}\,\vec{j}}{1,0\cdot 10^{-25}\,\text{kg}} = 1,6\cdot 10^{9}\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\,\vec{j}$$

$$\left.\begin{cases} \Delta x = v_{ox} t = 80.000\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\times 10^{-5}\,\text{s} = 0,8\,\text{m} \\ \Delta y = \tfrac{1}{2} a_y t^2 = \tfrac{1}{2}\times 1,6\cdot 10^{9}\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\times\left(10^{-5}\,\text{s}\right)^2 = 0,08\,\text{m} \end{cases}\right\} \quad P\left(0,8\,\text{m}; 0,08\,\text{m}\right)$$

$$\Delta E_{p(e)} = q\Delta V = q\left(V_P - V_O\right)$$

$$\Delta V = -\vec{E}\cdot\Delta\vec{r}$$

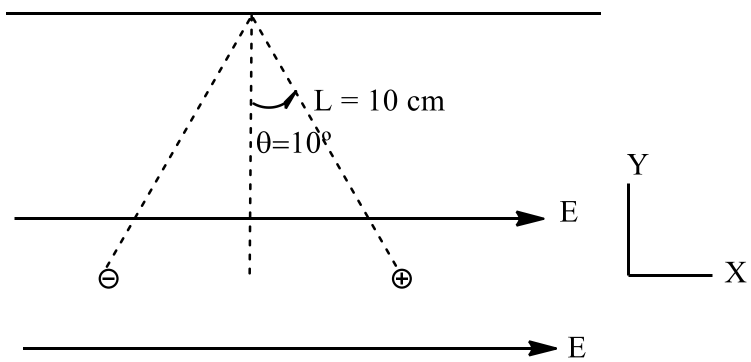
$$\Delta V = -\vec{E}\cdot\Delta\vec{r} = -500\,\tfrac{\text{V}}{\text{m}}\,\vec{j}\times\left(0,8\,\text{m}\,\vec{i} + 0,08\,\text{m}\,\vec{j}\right) = -40\,\text{V}$$

$$V_P - V_O = -40\,\text{V}$$

$$\Delta E_{p(e)} = q\Delta V = 3,2\cdot 10^{-19}\,\text{C}\times\left(-40\,\text{V}\right) = -1,28\cdot 10^{-17}\,\text{J}$$

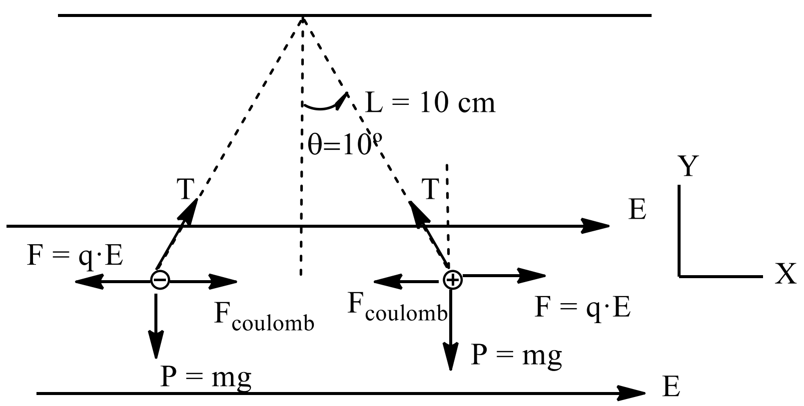
$$W^{P}_{O(por-campo)} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(e)} = +1,28\cdot 10^{-17}\,\text{J}$$

**47)** Dos bolitas de igual masa, m = 2 g, e igual carga, $5\cdot 10^{-8}$ C, pero una positiva y la otra negativa, están dentro de un campo eléctrico uniforme E, suspendidas de un mismo punto por sendos hilos de longitud L = 10 cm y separadas por un ángulo de θ = 10º con la vertical. Determine: a) el valor del campo eléctrico E; b) la diferencia de potencial entre los puntos en que se encuentran las cargas. Datos: $K_e = 9\cdot 10^{9}\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$; $g = 9,8\,\text{m/s}^2$. [a) E = 442.439 N/C; b) 15.369 V]




**Respuesta**:

Cada bolita está en equilibrio:




$$\vec{F}_{neta} = \vec{P} + \vec{F}_e + \vec{F}_{coulomb} + \vec{T} = m\vec{a} = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} F_{y(neta)} = T\cos 10^{o} - P = 0 \\ F_{x(neta)} = F_e - F_{coulomb} - T\,\mathrm{sen}\,10^{o} = 0 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} T\cos 10^{o} = P \\ F_e = qE = K_e \dfrac{q^2}{r^2} + T\,\mathrm{sen}\,10^{o} \end{array}\right.$$

$$T = \frac{P}{\cos 10^{o}} = \frac{0{,}002\,\mathrm{kg} \times 9{,}8\,\frac{m}{s^2}}{\cos 10^{o}} = 0{,}020\,\mathrm{N}$$

$$F_e = qE = 9\cdot 10^{9}\,\tfrac{N\,m^2}{C^2} \times \frac{\left(5\cdot 10^{-8}\,C\right)^2}{\left(2\times 0{,}10\,m \times \mathrm{sen}\,10^{o}\right)^2} + 0{,}020\,N \times \mathrm{sen}\,10^{o} = 0{,}018654\,N + 0{,}00347\,N$$

$$F_e = qE = 0{,}0221\,N$$

$$E = \frac{F_e}{q} = \frac{0{,}0221\,N}{5\cdot 10^{-8}\,C} = 442.439{,}3\,\tfrac{N}{C}$$

$$E_x \cdot d = -\Delta V = -\left(V_+ - V_-\right) = V_- - V_+ = 442.439{,}3\,\tfrac{N}{C} \times \left(2\times 0{,}10\,m \times \mathrm{sen}\,10^{o}\right) m = 15.369{,}2\,V$$

**48)** Dos platos paralelos, separados una distancia d = 2 mm, tienen la misma densidad de carga libre de valor $\sigma_{libre}$ = 30 μC/m$^2$, uno con carga positiva y el otro con carga negativa. Se introduce entre los platos un dieléctrico de constante dieléctrica $\varepsilon_r$ = 100. Calcule: a) el valor del campo eléctrico entre los platos y su diferencia de potencial sin el dieléctrico; b) el nuevo valor del campo eléctrico entre los platos y su diferencia de potencial con el dieléctrico, si no cambia la densidad de carga libre en los platos al introducir el dieléctrico; c) la nueva densidad de carga libre $\sigma'_{libre}$ en los platos si al introducir el dieléctrico entre ellos no cambia la diferencia de potencial entre ellos. Dato: $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{F}{m}$. [a) $E_0 = 3{,}390\cdot 10^6$ V/m; $\Delta V_0$ = 6.779,66 V; b) $E = E_0/100$; $\Delta V = \Delta V_0/100$; c) $\sigma'_{libre}$ = 0,003 C/m$^2$]

**Respuesta**:

$$\begin{cases} E_0 = \dfrac{\sigma_{libre}}{\varepsilon_0} = \dfrac{30 \cdot 10^{-6} \frac{C}{m^2}}{8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} \times 100} = 3.389.830 \frac{V}{m} \\ \Delta V_0 = E_0 \cdot d = 3.389.830 \frac{V}{m} \times 2 \cdot 10^{-3}\,m = 6.779{,}66\,V \end{cases}$$

$$\begin{cases} E = \dfrac{\sigma_{libre}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \dfrac{E_0}{\varepsilon_r} = \dfrac{3.389.830 \frac{V}{m}}{100} = 33.898{,}30 \frac{V}{m} \\ \Delta V = E \cdot d = \dfrac{E_0}{\varepsilon_r} \cdot d = \dfrac{\Delta V_0}{\varepsilon_r} = \dfrac{6.779{,}66\,V}{100} = 67{,}7966\,V \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} \Delta V_0 = \Delta V \\ E_0 \cdot d = E \cdot d \end{cases}\right\} \begin{cases} E_0 = E \\ \dfrac{\sigma_{libre}}{\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma'_{libre}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \end{cases}$$

$$\sigma'_{libre} = \varepsilon_r \sigma_{libre}$$

$$\sigma'_{libre} = 100 \times 30 \cdot 10^{-6} \frac{C}{m^2} = 30 \cdot 10^{-4} \frac{C}{m^2}$$

## Preguntas de teoría de interacción eléctrica

**1.** Dos cargas eléctricas puntuales, positivas e iguales están situadas en los puntos A y B de una recta horizontal. Conteste razonadamente a las siguientes cuestiones: a) ¿Puede ser nulo el potencial en algún punto del espacio que rodea a ambas cargas? ¿Y el campo eléctrico?. b) Si separamos las cargas a una distancia doble de la inicial, ¿se reduce a la mitad la energía potencial del sistema?

**2.** Comente las siguientes afirmaciones relativas al campo eléctrico: a) Cuando una carga se mueve sobre una superficie equipotencial no cambia su energía mecánica. b) Dos superficies equipotenciales no pueden cortarse.

**3.** a) Explique las características del campo eléctrico en una región del espacio en la que el potencial eléctrico es constante. b) Justifique razonadamente el signo de la carga de una partícula que se desplaza en la dirección y sentido de un campo eléctrico uniforme, de forma que su energía potencial aumenta.

**4.** Conteste razonadamente a las siguientes preguntas: a) Una partícula sobre la que actúa una fuerza efectúa un desplazamiento. ¿Puede asegurarse que realiza trabajo?. b) Una partícula, inicialmente en reposo, se desplaza bajo la acción de una fuerza conservativa. ¿Aumenta o disminuye su energía potencial?

**5.** Razone la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones: a) Cuando nos alejamos de una carga eléctrica negativa el potencial electrostático aumenta pero la intensidad del campo que crea disminuye. b) En algún punto P situado en el segmento que une dos cargas eléctricas idénticas, el potencial electrostático se anula pero no la intensidad del campo electrostático.

**6.** Razone las respuestas a las siguientes preguntas: a) Una carga negativa se mueve en la dirección y sentido de un campo eléctrico uniforme. ¿Aumenta o disminuye el potencial eléctrico en la posición de la carga? ¿Aumenta o disminuye su energía potencial?. b) ¿Cómo diferirían las respuestas del apartado anterior si se tratara de una carga positiva?

**Respuesta**:

a)

$$W_{por-campo} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(e)} = -q\Delta V$$

$$\begin{cases} \vec{E}\cdot\Delta\vec{x} = -\Delta V = -\left(V_f - V_i\right) \\ \Delta V = V_f - V_i = -\vec{E}\cdot\Delta\vec{x} = -\left|E_x\right|\vec{i}\cdot\left|\Delta\vec{x}\right|\vec{i} = -\left|E_x\right|\cdot\left|\Delta\vec{x}\right| < 0 \\ \Delta V = V_f - V_i < 0 \\ \Delta E_{p(e)} = q\Delta V = -\left|q_-\right|\left(V_f - V_i\right) > 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} \vec{E}\cdot\Delta\vec{x} = -\Delta V = -\left(V_f - V_i\right) \\ \Delta V = V_f - V_i = -\vec{E}\cdot\Delta\vec{x} = -\left|E_x\right|\vec{i}\cdot\left|\Delta\vec{x}\right|\vec{i} = -\left|E_x\right|\cdot\left|\Delta\vec{x}\right| < 0 \\ \Delta V = V_f - V_i < 0 \\ \Delta E_{p(e)} = q\Delta V = \left|q_+\right|\left(V_f - V_i\right) < 0 \end{cases}$$

**7.** Una carga eléctrica positiva se mueve en un campo eléctrico uniforme. Razone cómo varía su energía potencial electrostática si la carga se mueve: a) En la misma dirección y sentido del campo eléctrico. ¿Y si se mueve en sentido contrario?. b) En dirección perpendicular al campo eléctrico. ¿Y si la carga describe una circunferencia y vuelve al punto de partida?

**Respuesta**:

a)

$$W_{por-campo} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(e)} = -q\Delta V$$

$$\left.\begin{cases} q_+ \\ \left|\Delta\vec{x}\right|\vec{i} \end{cases}\right\} \begin{cases} \vec{E}\cdot\Delta\vec{x} = -\Delta V \\ \vec{E}\cdot\Delta\vec{x} = \left|E_x\right|\vec{i}\cdot\left|\Delta\vec{x}\right|\vec{i} = \left|E_x\right|\cdot\left|\Delta\vec{x}\right| = -\Delta V = -\left(V_f - V_i\right) = V_i - V_f \\ \Delta V = V_f - V_i < 0 \\ \Delta E_{p(e)} = q\Delta V = \left|q_+\right|\left(V_f - V_i\right) < 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} q_+ \\ -\left|\Delta\vec{x}\right|\vec{i} \end{cases}\right\} \begin{cases} \vec{E}\cdot\Delta\vec{x} = -\Delta V \\ \vec{E}\cdot\Delta\vec{x} = \left|E_x\right|\vec{i}\cdot\left(-\left|\Delta\vec{x}\right|\right)\vec{i} = -\left|E_x\right|\cdot\left|\Delta\vec{x}\right| = -\Delta V = -\left(V_f - V_i\right) = V_i - V_f \\ \left|E_x\right|\cdot\left|\Delta\vec{x}\right| = \Delta V = V_f - V_i > 0 \\ \Delta E_{p(e)} = q\Delta V = \left|q_+\right|\left(V_f - V_i\right) > 0 \end{cases}$$

b)

$$\left.\begin{cases} q_+ \\ \left|\Delta\vec{y}\right|\vec{j} \end{cases}\right\} \begin{cases} \vec{E}\cdot\Delta\vec{y} = -\Delta V \\ \vec{E}\cdot\Delta\vec{y} = \left|E_x\right|\vec{i}\cdot\left|\Delta\vec{y}\right|\vec{j} = 0 = -\Delta V = 0 \\ \Delta E_{p(e)} = q\Delta V = 0 \end{cases}$$

$$\left\{q_+\right\} \begin{cases} \vec{E}\cdot\Delta\vec{r} = -\Delta V = -\left(V_f - V_i\right) = 0 \\ \Delta E_{p(e)} = q\Delta V = 0 \end{cases}$$

**8.** a) Una partícula cargada negativamente pasa de un punto A, cuyo potencial es $V_A$, a otro B, cuyo potencial es $V_B > V_A$. Razone si la partícula gana o pierde energía potencial. b) Los puntos C y D pertenecen a una misma superficie equipotencial. ¿Se realiza trabajo al trasladar una carga (positiva o negativa) desde C a D? Justifique la respuesta.

**9.** a) Explique las características de la interacción eléctrica entre dos cargas puntuales en reposo. b) ¿Es nulo el campo eléctrico en algún punto del segmento que une dos cargas puntuales de igual valor absoluto pero de signo contrario? Razone la respuesta.

**10**. a) Explique la relación entre campo y potencial eléctrico. b) Razone si puede ser distinto de cero el potencial eléctrico en un punto en el que el campo eléctrico es nulo.

**11**. a) Enuncie la ley de Coulomb y aplique el principio de superposición para determinar la fuerza que actúa sobre una carga en presencia de otras dos. b) Dos cargas $+q_1$ y $-q_2$ están situadas en dos puntos de un plano. Explique, con ayuda de una gráfica, en qué posición habría que colocar una tercera carga $+q_3$ para que estuviera en equilibrio.

**12**. a) Energía potencial electrostática de una carga en presencia de otra. Razone si la energía potencial electrostática de una carga q aumenta o disminuye al pasar de un punto A a otro B, siendo el potencial en A menor que en B. b) El punto A está más alejado que el B de la carga Q que crea el campo. Razone si la carga Q es positiva o negativa.

**13.** a) Explique la relación entre campo y potencial electrostáticos. b) Una partícula cargada se mueve espontáneamente hacia puntos en los que el potencial electrostático es mayor. Razone si, de ese comportamiento, puede deducirse el signo de la carga.

**Respuesta**:

a)

<u>**Campo eléctrico** creado por una carga puntual Q</u>: Existe un campo eléctrico en una región del espacio si al colocar una carga eléctrica ésta experimenta una fuerza eléctrica. La **intensidad del campo eléctrico creado por la carga puntual Q**, en reposo, en un punto del espacio es una magnitud vectorial definida por

$$\boxed{\vec{E} = \lim_{q\to 0}\frac{\vec{F}_{sobre-q}}{q} = K_e\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r}\left(\frac{N}{C} \equiv \frac{V}{m}\right)$$

La intensidad del campo eléctrico creado por una carga Q, en un punto del espacio, depende del vector de posición de dicho punto, por lo que **el campo eléctrico es un campo conservativo**. Para demostrarlo hemos de comprobar que **la circulación del campo eléctrico no depende de la trayectoria elegida sino solamente de los puntos inicial y final**. Por tanto, al ser el campo eléctrico conservativo en cada punto del campo eléctrico podemos definir una magnitud escalar llamada **potencial eléctrico**, que se relaciona con la intensidad del campo eléctrico.

$$C = \int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_i^f K_e\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r\cdot d\vec{r} = \left[-K_e\frac{Q}{r}\right]_i^f = -\left(K_e\frac{Q}{r_f} - K_e\frac{Q}{r_i}\right) = -\left(V_f - V_i\right) = -\Delta V_e$$

$$C = \oint \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0 \quad \left\{\begin{matrix}\vec{E}\cdot d\vec{r} = -dV_e \\ \vec{E} = -\vec{\nabla}V\end{matrix}\right\} \quad C = \int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_i^f -dV_e = -\left[V_e\right]_i^f = -\left(V_f - V_i\right) = -\Delta V_e$$

$$\boxed{V_e = K_e\frac{Q}{r}\ \text{voltios}(V)} \quad \boxed{\vec{E} = \frac{-dV_e}{d\vec{r}}\left(\frac{V}{m}\right)} \quad \boxed{\begin{matrix}V_e = K_e\dfrac{Q}{r} \\ E = -\dfrac{dV_e}{dr} = -\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{K_eQ}{r}\right) = -\dfrac{r\cdot 0 - K_eQ\cdot 1}{r^2} = K_e\dfrac{Q}{r^2}\end{matrix}}$$

b)

$$W_{por-campo(espontáneo)} = -W_{contra-campo} > 0$$
$$W_{por-campo(no-espontáneo)} = -W_{contra-campo} < 0$$
$$\Delta V = V_f - V_i > 0$$
$$W_{por-campo(espontáneo)} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(e)} = -q\Delta V$$
$$W_{por-campo(q+)} = -q_+\Delta V < 0$$
$$W_{por-campo(q_-)} = -q_-\Delta V > 0$$

**14.** a) Explique la interacción de un conjunto de cargas puntuales. b) Considere dos cargas eléctricas +Q y –Q, situadas en dos puntos A y B. Razone cuál sería el potencial electrostático en el punto medio del segmento que une los puntos A y B. ¿Puede deducirse de dicho valor que el campo eléctrico es nulo en dicho punto?

**15.** a) Campo y potencial electrostáticos de una carga puntual. b) En una región del espacio existe un campo electrostático generado por una carga puntual negativa, q. Dados dos puntos, A más cercano a la carga y B más alejado de la carga, razone si el potencial en B es mayor o menor que en A.

**16.** a) Potencial electrostático de una carga puntual. b) Cuando una partícula cargada se mueve en la dirección y sentido de un campo eléctrico, aumenta su energía potencial. Razone qué signo tiene la carga de la partícula.

**17.** a) Campo eléctrico de una carga puntual. b) Dos cargas eléctricas puntuales positivas están situadas en dos puntos A y B de una recta. ¿Puede ser nulo el campo eléctrico en algún punto de esa recta? ¿Y si las dos cargas fueran negativas? Razone las respuestas.

**18.** a) Campo electrostático de un conjunto de cargas puntuales. b) ¿Puede ser nulo el campo eléctrico producido por dos cargas puntuales en un punto del segmento que las une? Razone la respuesta.

**19.** a) Potencial electrostático de una carga puntual y de un conjunto de cargas puntuales. b) Si se conoce el potencial electrostático en un solo punto, ¿se puede determinar el campo eléctrico en dicho punto? Razone la respuesta.

**20.** a) Enuncie la ley de Coulomb y comente su expresión. b) Dos cargas puntuales q y - q se encuentran sobre el eje X, en x = a y en x = - a, respectivamente. Escriba las expresiones del campo electrostático y del potencial electrostático en el origen de coordenadas.

# Problemas resueltos de «Interacción Magnética»

## Cuestiones

**1)** Por dos conductores y de gran longitud, dispuestos paralelamente, circulan corrientes eléctricas de la misma intensidad y sentido. a) Dibuje un esquema, indicando la dirección y el sentido del campo magnético total en el punto medio de un segmento que una a los dos conductores y coméntelo. b) Razone cómo cambiaría la situación al duplicar una de las intensidades y cambiar su sentido.

## Problemas

$$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\tfrac{F}{m};\ \mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\tfrac{N}{A^2}\left(\tfrac{T\cdot m}{A} \equiv \tfrac{H}{m}\right);\ q_e = -1{,}6\cdot 10^{-19}\,C;\ m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}\,kg$$

**1)** Un electrón, $q_e$ = -1,6·10$^{-19}$ C, se mueve con una velocidad v = 50.000 m/s, en el sentido positivo del eje OX, y penetra en una región en la que existe un campo magnético B = 0,05 T, dirigido en el sentido negativo del eje OZ. Calcule: a) la fuerza magnética aplicada por el campo magnético sobre el electrón; b) la aceleración que adquiere el electrón; c) la velocidad angular del electrón; d) el radio de la órbita descrita; e) el período orbital y la frecuencia del electrón. Datos: $q_e$ = -1,6·10$^{-19}$ C; $m_e$ = 9,1·10$^{-31}$ kg. [a) -4,0·10$^{-16}$ N **j**; b) -4,40·10$^{14}$ m/s$^2$ **j**; c) -8,80·10$^{9}$ rad/s **k**; d) 5,70·10$^{-6}$ m; e) 7,15·10$^{-10}$ s y 1,40 GHz]

**Respuesta**:

El electrón se mueve perpendicular a un campo magnético, luego la fuerza es perpendicular a la velocidad y su efecto es cambiar la dirección de la velocidad sin cambiar su magnitud.

$$\vec{F}_m = q_e\vec{v}\times\vec{B} = -1{,}6\cdot 10^{-19}\,C\cdot\left[5\cdot 10^4\,\tfrac{m}{s}\,\vec{i}\times\left(-0{,}05\,T\,\vec{k}\right)\right] = 4{,}0\cdot 10^{-16}\,N\left(\vec{i}\times\vec{k}\right) = 4{,}0\cdot 10^{-16}\,N\left(-\vec{j}\right)$$

$$\vec{F}_m = q_e\vec{v}\times\vec{B} = \vec{F}_n = m\vec{a}_n \quad\Rightarrow\quad \vec{a}_n = \frac{\vec{F}_m}{m} = \frac{-4{,}0\cdot 10^{-16}\,N\,\vec{j}}{9{,}1\cdot 10^{-31}\,kg} = -4{,}40\cdot 10^{14}\,\tfrac{m}{s^2}\,\vec{j}$$

$$\left.\begin{cases}\vec{F}_m = q\vec{v}\times\vec{B} = m\vec{a}_n = m\left(\vec{\omega}\times\vec{v}\right)\\ \vec{F}_m = -q\vec{B}\times\vec{v} = m\left(\vec{\omega}\times\vec{v}\right)\end{cases}\right\}\quad \vec{\omega} = \frac{-q\vec{B}}{m} = \frac{+1{,}6\cdot 10^{-19}\,C\times\left(-0{,}05\,T\,\vec{k}\right)}{9{,}1\cdot 10^{-31}\,kg} = -8{,}80\cdot 10^{9}\,\tfrac{rad}{s}\,\vec{k}$$

$$\vec{v}\perp\vec{B}\quad \left.\begin{cases}\left|\vec{F}_m\right| = \left|\vec{F}_c\right|\\ \left|q_e\vec{v}\times\vec{B}\right| = \left|m\vec{a}_c\right| = m_e\dfrac{v^2}{R}\end{cases}\right\} R = \frac{m_e v^2}{\left|q_e\vec{v}\times\vec{B}\right|} = \frac{m_e v}{q_e B} = \frac{9{,}1\cdot 10^{-31}\,kg\times 5\cdot 10^4\,\frac{m}{s}}{1{,}6\cdot 10^{-19}\,C\times 0{,}05\,T} = 5{,}70\cdot 10^{-6}\,m$$

$$v = \omega R = \frac{2\pi}{T}R$$

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi\times 5{,}70\cdot 10^{-6}\,m}{5\cdot 10^4\,\frac{m}{s}} = 7{,}15\cdot 10^{-10}\,s \quad\Rightarrow\quad \nu = \frac{1}{T} = 1{,}40\cdot 10^{9}\,Hz = 1{,}40\,GHz$$

**2)** Un electrón con velocidad de 40.000 m/s en el sentido positivo del eje OX, penetra en una región en la que existe un campo magnético de 0,5 T en el sentido positivo del eje OZ. Calcular: a) la diferencia de potencial necesaria para que el electrón adquiera la energía cinética inicial; b) el campo eléctrico que habría que aplicar para que el electrón mantuviera rectilínea su trayectoria. [a) 4,55 mV; b) 20.000 V/m hacia + OY]

**Respuesta**:

El electrón se mueve en sentido positivo del eje OX, el campo magnético tiene sentido positivo del eje OZ. Para que el electrón mantenga la velocidad en el mismo sentido la fuerza neta que experimente ha de ser cero, la fuerza eléctrica y la magnética han de ser iguales y de sentido contrario, se demuestra que el sentido del campo eléctrico es hacia el OY.

$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_p = -q\Delta V \quad \left\{ \Delta V = \frac{\Delta E_c}{q} = \frac{1}{2}\frac{m_e}{q_e} v^2 = 4,55\cdot 10^{-3}\,\text{V} \right.$$

$$\left. \begin{cases} \vec{F}_{neta} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = m\vec{a} = 0 \\ \vec{F}_e = -\vec{F}_m \\ q_e\vec{E} = -q_e\vec{v}\times\vec{B} \\ \vec{E} = -\vec{v}\times\vec{B} \end{cases} \right\} \vec{E} = \vec{B}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & B_z \\ v_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{j}\left(0 - B_z v_x\right) = B_z v_x\,\vec{j} = 20.000\,\frac{\text{V}}{\text{m}}\,\vec{j}$$

**3)** En un espectrógrafo de masas los iones de diversos isótopos de un elemento son acelerados mediante una diferencia de potencial de 4.000 V y, a continuación, penetran en una región de campo magnético uniforme de 0,1 T que les obliga a describir un arco de 180º y alcanzar un colector donde son recogidos. ¿A qué distancia habrá que colocar los colectores para recoger los isótopos del catión cobre(II) cuyos números másicos son 65 y 63?. Datos: 1u = $1,66\cdot 10^{-27}$ kg; $q_e = 1,6\cdot 10^{-19}$ C. [El catión de 65u a 1,0388 m y el catión de 63u a 1,0226 m]

**Respuesta**:

Los cationes cuando se aceleran van hacia los puntos del campo eléctrico en los que disminuye el potencial eléctrico, es decir, hacia los puntos en los que disminuye su energía potencial eléctrica:

$$W_{neto} = \Delta E_c = \frac{1}{2}mv^2 = -\Delta E_{p(e)} = E_{p(i)} - E_{p(f)} = q\left(V_i - V_f\right) = q\Delta V \quad \left\{ v = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}} \right.$$

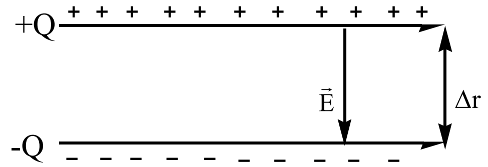
$$\vec{v}\perp\vec{B} \quad \left\{ F_m = qvB = ma_n = m\frac{v^2}{R} \right\} \quad R = \frac{mv}{qB} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m\Delta V}{q}}$$

$$R_{63} = \frac{1}{0,1\,\text{T}}\sqrt{\frac{2\times 63\times 1,66\cdot 10^{-27}\,\text{kg}\times 4.000\,\text{V}}{2\times 1,6\cdot 10^{-19}\,\text{C}}} = 0,5113\,\text{m} \quad \left\{ D_{63} = 2\times 0,5113\,\text{m} = 1,0226\,\text{m} \right.$$

$$R_{65} = \frac{1}{0,1\,\text{T}}\sqrt{\frac{2\times 65\times 1,66\cdot 10^{-27}\,\text{kg}\times 4.000\,\text{V}}{2\times 1,6\cdot 10^{-19}\,\text{C}}} = 0,5194\,\text{m} \quad \left\{ D_{65} = 2\times 0,5194\,\text{m} = 1,0388\,\text{m} \right.$$

**4)** Un condensador, de placas planas y paralelas, está en el vacío con la placa positiva por encima de la negativa a una distancia de 2,0 cm. El campo eléctrico en su interior es E = $1,0\cdot 10^5$ V/m. a) Dibuje el condensador, las líneas del campo eléctrico, indique la placa que está a más potencial y calcule la diferencia de potencial entre ellas. b) Si se lanza un electrón paralelamente a las placas, equidistante de ellas y coincidiendo con el semieje positivo OX, con una velocidad $v_x = 1,0\cdot 10^6$ m/s, determine el tiempo que tardará en golpear a la placa, así como la distancia horizontal que recorrerá antes de impactar. c) Determine la intensidad, dirección y sentido del campo magnético que habría que colocar entre las placas para que el electrón no se desvíe de su dirección inicial. [a) $V_+ - V_- = 2.000$ V; b) $1,066\cdot 10^{-9}$ s; $1,066\cdot 10^{-3}$ m; c) $B_z = -0,1$ T ]

**Respuesta**:




$$\vec{E}\cdot d\vec{r} = -dV$$
$$E\cdot \Delta r = -\left(V_- - V_+\right) = V_+ - V_-$$
$$E\cdot \Delta r = \Delta V = V_+ - V_-$$

La dirección del campo E va desde placa positiva a la negativa.

$$\vec{E}\cdot d\vec{r} = -dV \quad \Rightarrow \quad E\cdot d = -\left(V_- - V_+\right) = V_+ - V_- = 1{,}0\cdot 10^5\,\tfrac{V}{m}\times 0{,}02\,m = 2.000\,V$$

$$\vec{F}_e = m_e\vec{a} = q_e\vec{E} \quad \left\{\vec{E} = -1{,}0\cdot 10^5\,\tfrac{V}{m}\,\vec{j}\right\} \quad \vec{a} = \frac{q_e\vec{E}}{m_e} = \frac{-1{,}6\cdot 10^{-19}\,C}{9{,}1\cdot 10^{-31}\,kg}\times\left(-1{,}0\cdot 10^5\,\tfrac{V}{m}\,\vec{j}\right) = 1{,}76\cdot 10^{16}\,\tfrac{m}{s^2}\,\vec{j}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\vec{a}t^2 \quad \left\{\begin{array}{l} r_x = r_{ox} + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 = v_{0x}t \\ r_y = r_{oy} + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = \frac{1}{2}a_y t^2 \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} r_y = \frac{1}{2}\times 0{,}02\,m = \frac{1}{2}\times 1{,}76\cdot 10^{16}\,\frac{m}{s^2}\cdot t^2 \\ t = \sqrt{\dfrac{\frac{1}{2}\times 0{,}02\,m}{\frac{1}{2}\times 1{,}76\cdot 10^{16}\,\frac{m}{s^2}}} = 1{,}066\cdot 10^{-9}\,s \end{array}\right.$$

$$r_x = v_{0x}t = 1{,}0\cdot 10^6\,\tfrac{m}{s}\times 1{,}06\cdot 10^{-9}\,s = 1{,}066\cdot 10^{-3}\,m$$

$$\vec{F}_{neta} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = m\vec{a} = 0 \quad \left\{\vec{F}_e = -\vec{F}_m\right\}\left\{q_e\vec{E} = -q_e\vec{v}\times\vec{B}\right\} \quad \vec{E} = -\vec{v}\times\vec{B}$$

$$\vec{E} = -\vec{v}\times\vec{B} = \vec{B}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ v_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{j}\left(-v_x B_z\right) + \vec{k}\left(-v_x B_y\right) = -1{,}0\cdot 10^5\,\tfrac{V}{m}\,\vec{j}$$

$$\vec{E} = -1{,}0\cdot 10^5\,\tfrac{V}{m}\,\vec{j} = -\vec{j}\left(-v_x B_z\right) = v_x B_z\vec{j} \quad \left\{B_z = \frac{-1{,}0\cdot 10^5\,\frac{V}{m}}{1{,}0\cdot 10^6\,\frac{m}{s}} = -0{,}1\,T\right.$$

**5)** Una fuente de iones produce $^6Li$ (de masa 6·u) con carga +e. Los iones son acelerados por una diferencia de potencial de 10.000 V y pasan horizontalmente por una región en la que hay un campo magnético vertical y uniforme de 1,2 T. Calcula la intensidad del campo eléctrico que se ha de colocar en la misma región para que los iones $^6Li$ no se desvíen. Datos: 1 u = 0,001/$N_A$ kg; $q_e = 1{,}60\cdot 10^{-19}$ C. [680.066 V/m]

**Respuesta**:

Los cationes cuando se aceleran van hacia los puntos del campo eléctrico en los que disminuye el potencial eléctrico, es decir, hacia los puntos en los que disminuye su energía potencial eléctrica:

$$W_{neto} = \Delta E_c = \frac{1}{2}mv^2 = -\Delta E_{p(e)} = E_{p(i)} - E_{p(f)} = q\left(V_i - V_f\right) = q\Delta V \quad \left\{v = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}}\right.$$

El campo eléctrico se ha de colocar de tal forma que la fuerza neta sobre los iones sea cero:

$$\vec{F}_{neta} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = m\vec{a} = 0 \quad \left\{\begin{array}{l} \vec{F}_e = -\vec{F}_m \\ q_e\vec{E} = -q_e\vec{v}\times\vec{B} \end{array}\right\} \quad \vec{E} = -\vec{v}\times\vec{B} \quad \left\{\vec{E} = \vec{B}\times\vec{v}\right.$$

$$\left|\vec{E}\right| = \left|\vec{B}\right|\left|\vec{v}\right| = \left|\vec{B}\right|\sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}} = 1{,}2\,T\times\sqrt{\frac{2\times 1{,}6\cdot 10^{-19}\,C\times 10.000\,V}{6\times\frac{10^{-3}}{6{,}022\cdot 10^{23}}\,kg}} = 680.066\,\tfrac{V}{m}$$

**6)** Una partícula alfa, ${}^{4}_{2}He$, tiene de carga +2·e y de masa 4,0·u. En un campo magnético de 1,2 T describe una trayectoria circular de radio 4,50 cm. Calcula: a) su velocidad; b) su período de revolución; c) su energía cinética en eV; d) la diferencia de potencial por la que se ha acelerado para alcanzar esa energía. [a) $2{,}60\cdot 10^{6}$ m/s; b) $1{,}1\cdot 10^{-7}$ s; c) $1{,}4\cdot 10^{5}$ eV; d) 70 kV].

**Respuesta**:

Al entrar en el campo magnético la fuerza magnética es igual a la fuerza centrípeta, ya que los iones giran describiendo una circunferencia:

$$\vec{v}\perp\vec{B}\quad \left\{\begin{matrix} \vec{F}_m=\vec{F}_n \\ qvB=m\dfrac{v^2}{R}\end{matrix}\right\}\quad v=\frac{qBR}{m}=\frac{\left(2\times 1{,}6\cdot 10^{-19}\,C\right)\times 1{,}2\,T\times 0{,}045\,m}{4\times 1{,}66\cdot 10^{-27}\,kg}=2{,}60\cdot 10^{6}\,\tfrac{m}{s}$$

$$v=\frac{2\pi}{T}R\quad \left\{T=\frac{2\pi R}{v}=1{,}1\cdot 10^{-7}\,s\right.$$

$$E_c=\frac{1}{2}mv^2=2{,}24\cdot 10^{-14}\,J=2{,}24\cdot 10^{-14}\,J\times\frac{1\,eV}{1{,}6\cdot 10^{-19}\,J}=1{,}4\cdot 10^{5}\,eV$$

$$W_{por}=\Delta E_c=-\Delta E_{p(e)}=-q\left(V_- - V_+\right)=q\left(V_+ - V_-\right)=q\Delta V_e\left\{\Delta V_e=\frac{\Delta E_c}{q}=\frac{1{,}4\cdot 10^{5}\,eV}{2e}=7{,}0\cdot 10^{4}\,V\right.$$

**7)** Un protón ($H^{+}$), un deuterón ($D^{+}$) y una partícula alfa ($He^{2+}$) se aceleran por la misma diferencia de potencial, entran en una región de campo magnético uniforme B y se mueven perpendicularmente a B. a) Compara sus energías cinéticas; b) si el radio de la trayectoria circular del protón es de 10 cm determina los radios del deuterón y de la partícula alfa. Datos: ${}^{1}H$ de masa 1,00·u; ${}^{2}H$ de masa 2,01·u; ${}^{4}He$ de masa 4,00·u. [a) $\Delta E_{c(alfa)}=2\cdot\Delta E_{c(protón)}=2\cdot\Delta E_{c(deuterón)}$; b) $R_d=R_{alfa}=14$ cm]

**Respuesta**:

$$\left\{\begin{matrix} W_{por}=\Delta E_c=-\Delta E_{p(e)}=-q\left(V_- - V_+\right)=q\Delta V_e \\ q_{He^{2+}}=2\cdot q_{H^+}=2\cdot q_{D^+}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\Delta E_{c\left(He^{2+}\right)}=q_{He^{2+}}\cdot\Delta V_e=2\cdot q_{H^+}\cdot\Delta V_e=2\cdot\Delta E_{c\left(H^+\right)} \\ \Delta E_{c\left(He^{2+}\right)}=q_{He^{2+}}\cdot\Delta V_e=2\cdot q_{D^+}\cdot\Delta V_e=2\cdot\Delta E_{c\left(D^+\right)}\end{matrix}\right.$$

$$\left\{\begin{matrix}\Delta E_c=\dfrac{1}{2}mv^2=q\Delta V_e\quad\Rightarrow\quad v^2=\dfrac{2q\Delta V_e}{m} \\ \vec{v}\perp\vec{B}\quad\Rightarrow\quad\left|\vec{F}_m\right|=q\left|\vec{v}\right|\left|\vec{B}\right|=m\dfrac{v^2}{R}\quad\Rightarrow\quad v=\dfrac{qBR}{m}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}v^2=\dfrac{2q\Delta V_e}{m}=\dfrac{q^2B^2R^2}{m^2} \\ R^2=\dfrac{2m\Delta V_e}{qB^2}\end{matrix}\right.$$

$$\frac{\left(R^2\right)_{D^+}}{\left(R^2\right)_{H^+}}=\frac{\dfrac{2m_{D^+}\Delta V_e}{q_{D^+}B^2}}{\dfrac{2m_{H^+}\Delta V_e}{q_{H^+}B^2}}=\frac{\dfrac{m_{D^+}}{q_{D^+}}}{\dfrac{m_{H^+}}{q_{H^+}}}=\frac{\dfrac{2{,}01\cdot u}{1q_e}}{\dfrac{1{,}00\cdot u}{1q_e}}=\frac{m_{D^+}}{m_{H^+}}=\frac{2{,}01\cdot u}{1{,}00\cdot u}=2\quad\Rightarrow\quad R_{D^+}=\sqrt{2}\cdot R_{H^+}=14\,cm$$

$$\frac{\left(R^2\right)_{He^{2+}}}{\left(R^2\right)_{H^+}}=\frac{\dfrac{2m_{He^{2+}}\Delta V_e}{q_{He^{2+}}B^2}}{\dfrac{2m_{H^+}\Delta V_e}{q_{H^+}B^2}}=\frac{\dfrac{m_{He^{2+}}}{q_{He^{2+}}}}{\dfrac{m_{H^+}}{q_{H^+}}}=\frac{\dfrac{4{,}00\cdot u}{2q_e}}{\dfrac{1{,}00\cdot u}{1q_e}}=2\quad\Rightarrow\quad R_{He^{2+}}=\sqrt{2}\cdot R_{H^+}=14\,cm$$

**8)** Dos conductores rectilíneos paralelos, recorridos por corrientes del mismo sentido de $I_1$ = 10 A (0;0) y $I_2$ = 20 A (0,10;0) m, colocados en el eje X y perpendiculares al plano XY con el sentido de la corriente +Z. Calcular: a) el campo magnético en un punto (-0,10;0) m; b) la fuerza por unidad de longitud sobre un tercer conductor rectilíneo situado en el mismo plano que los otros dos conductores, paralelo y equidistante de ambos, por el que circula una corriente de $I_3$ = 5 A de sentido contrario a las de los otros dos. [a) $B_y = -4{,}00\cdot10^{-5}$ T; b) $F_{3x}/l = -0{,}0002$ N/m]

**Respuesta**:

$$\vec{B}_1=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1}\vec{u}_{t_1}\quad \left\{\vec{u}_{t1}=\vec{u}_{I_1}\times\vec{u}_{r_1}\right\}\left\{\begin{array}{l}\vec{u}_{I_1}=\vec{k}\\ \vec{u}_{r_1}=\dfrac{-0{,}10\,\mathrm{m}\,\vec{i}}{0{,}10\,\mathrm{m}}=-\vec{i}\end{array}\right\}\vec{u}_{t_1}=\vec{k}\times\left(-\vec{i}\right)=-\vec{j}$$

$$\vec{B}_1=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1}\vec{u}_{t_1}=\frac{4\pi10^{-7}\,\frac{\mathrm{T\cdot m}}{\mathrm{A}}\times10\,\mathrm{A}}{2\pi\times0{,}10\,\mathrm{m}}\left(-\vec{j}\right)=-200\cdot10^{-7}\,\mathrm{T}\,\vec{j}$$

$$\vec{B}_2=\frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}\vec{u}_{t_2}\quad \left\{\vec{u}_{t_2}=\vec{u}_{I_2}\times\vec{u}_{r_2}\right\}\left\{\begin{array}{l}\vec{u}_{I_2}=\vec{k}\\ \vec{u}_{r_2}=\dfrac{\left(-0{,}10\,\mathrm{m}\,\vec{i}\right)-\left(0{,}10\,\mathrm{m}\,\vec{i}\right)}{0{,}20\,\mathrm{m}}=-\vec{i}\end{array}\right\}\vec{u}_{t_2}=\vec{k}\times\left(-\vec{i}\right)=-\vec{j}$$

$$\vec{B}_2=\frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}\vec{u}_{t_2}=\frac{4\pi10^{-7}\,\frac{\mathrm{T\cdot m}}{\mathrm{A}}\times20\,\mathrm{A}}{2\pi\times0{,}20\,\mathrm{m}}\left(-\vec{j}\right)=-200\cdot10^{-7}\,\mathrm{T}\,\vec{j}$$

$$\vec{B}_{\mathrm{total}}=\vec{B}_1+\vec{B}_2=-200\cdot10^{-7}\,\mathrm{T}\,\vec{j}-200\cdot10^{-7}\,\mathrm{T}\,\vec{j}=-400\cdot10^{-7}\,\mathrm{T}\,\vec{j}=-4{,}00\cdot10^{-5}\,\mathrm{T}\,\vec{j}$$

$$d\vec{F}_3=d\vec{F}_{31}+d\vec{F}_{32}=I_3\cdot d\vec{l}_3\times\vec{B}_{31}+I_3\cdot d\vec{l}_3\times\vec{B}_{32}$$

$$\vec{F}_3=\vec{F}_{31}+\vec{F}_{32}=I_3\cdot\vec{l}_3\times\vec{B}_{31}+I_3\cdot\vec{l}_3\times\vec{B}_{32}$$

$$\vec{B}_{31}=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_{31}}\vec{u}_{t_{31}}\quad \left\{\vec{u}_{t_{31}}=\vec{u}_{I_1}\times\vec{u}_{r_{31}}\right\}\left\{\begin{array}{l}\vec{u}_{I_1}=\vec{k}\\ \vec{u}_{r_{31}}=\dfrac{0{,}05\,\mathrm{m}\,\vec{i}}{0{,}05\,\mathrm{m}}=\vec{i}\end{array}\right\}\vec{u}_{t_{31}}=\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$

$$\vec{B}_{31}=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_{31}}\vec{u}_{t_{31}}=\frac{4\pi10^{-7}\,\frac{\mathrm{T\cdot m}}{\mathrm{A}}\times10\,\mathrm{A}}{2\pi\times0{,}05\,\mathrm{m}}\vec{j}=400\cdot10^{-7}\,\mathrm{T}\,\vec{j}$$

$$\vec{F}_{31}=I_3\cdot\vec{l}_3\times\vec{B}_{31}=I_3\cdot l_3\left(-\vec{k}\right)\times B_{31}\vec{j}=I_3\cdot l_3B_{31}\,\vec{i}$$

$$\frac{\vec{F}_{31}}{l_3}=I_3\cdot B_{31}\,\vec{i}=5\,\mathrm{A}\times400\cdot10^{-7}\,\mathrm{T}\,\vec{i}=0{,}0002\,\tfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\,\vec{i}$$

$$\vec{B}_{32}=\frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_{32}}\vec{u}_{t_{32}} \quad \left\{\vec{u}_{t_{32}}=\vec{u}_{I_1}\times\vec{u}_{r_{32}}\right\}\begin{cases}\vec{u}_{I_1}=\vec{k}\\ \vec{u}_{r_{31}}=\dfrac{0,05\,\text{m}\,\vec{i}-0,10\,\text{m}\,\vec{i}}{0,05\,\text{m}}=-\vec{i}\end{cases}\Bigg\}\vec{u}_{t_{31}}=\vec{k}\times\left(-\vec{i}\right)=-\vec{j}$$

$$\vec{B}_{32}=\frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_{32}}\vec{u}_{t_{32}}=\frac{4\pi 10^{-7}\,\frac{\text{T·m}}{\text{A}}\times 20\,\text{A}}{2\pi\times 0,05\,\text{m}}\left(-\vec{j}\right)=-800\cdot 10^{-7}\,\text{T}\,\vec{j}$$

$$\vec{F}_{32}=I_3\cdot\vec{l}_3\times\vec{B}_{32}=I_3\cdot l_3\left(-\vec{k}\right)\times B_{32}\left(-\vec{j}\right)=-I_3\cdot l_3 B_{32}\,\vec{i}$$

$$\frac{\vec{F}_{32}}{l_3}=-I_3\cdot B_{32}\,\vec{i}=-5\,\text{A}\times 800\cdot 10^{-7}\,\text{T}\,\vec{i}=-0,0004\,\tfrac{\text{N}}{\text{m}}\,\vec{i}$$

$$\vec{F}_3=\vec{F}_{31}+\vec{F}_{32}=I_3\cdot\vec{l}_3\times\vec{B}_{31}+I_3\cdot\vec{l}_3\times\vec{B}_{32}=I_3\cdot l_3 B_{31}\,\vec{i}-I_3\cdot l_3 B_{32}\,\vec{i}=I_3\cdot l_3\left(B_{31}-B_{32}\right)\vec{i}$$

$$\frac{\vec{F}_3}{l_3}=\frac{\vec{F}_{31}}{l_3}+\frac{\vec{F}_{32}}{l_3}=I_3\cdot B_{31}\,\vec{i}-I_3\cdot B_{32}\,\vec{i}=0,0002\,\tfrac{\text{N}}{\text{m}}\,\vec{i}-0,0004\,\tfrac{\text{N}}{\text{m}}\,\vec{i}=-0,0002\,\tfrac{\text{N}}{\text{m}}\,\vec{i}$$

**9)** Sobre dos raíles paralelos al eje OX, situados en un plano horizontal y separados 30 cm, se apoya una barra de cobre de masa 0,1 kg. Se hace circular a través de la barra de cobre, desde un raíl al otro, una corriente de 30 A, en sentido positivo OY. Calcule la inducción magnética, módulo y sentido, que habría que aplicar al sistema para que la barra se deslice sobre los raíles en sentido +OX, con una velocidad constante, si el coeficiente de rozamiento barra-raíl es 0,2. [$B_z$ = 0,02177 T]

**Respuesta**:

Para que la barra deslice con velocidad constante la fuerza total ejercida sobre ella tiene que ser cero:

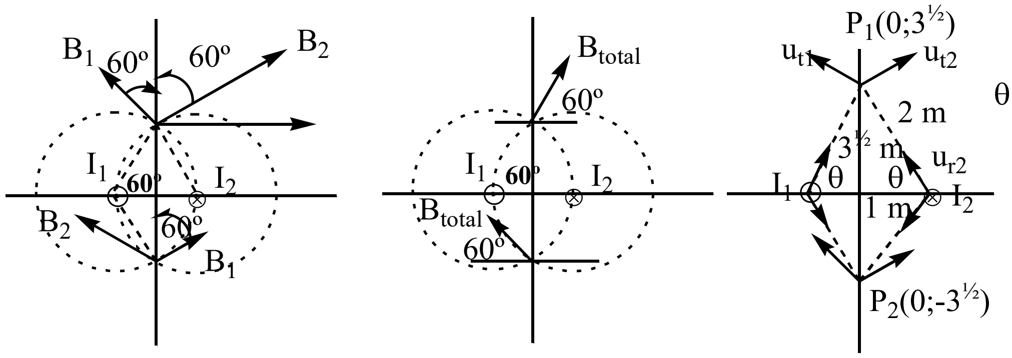
$$\begin{cases}\vec{F}_{neta}=\vec{F}_m+\vec{f}_{roz}=0\\ \vec{F}_m=-\vec{f}_{roz}\end{cases}\quad\begin{cases}\vec{f}_{roz}=-\mu mg\,\vec{i}=-\left(0,2\times 0,1\,\text{kg}\times 9,8\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)\vec{i}=-0,196\,\text{N}\,\vec{i}\\ \vec{F}_m=I\cdot\vec{l}\times\vec{B}=\left|\vec{F}_m\right|\vec{i}=+0,196\,\text{N}\,\vec{i}\end{cases}$$

$$\vec{F}_m=I\cdot\vec{l}\times\vec{B}=I\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&l&0\\B_x&B_y&B_z\end{vmatrix}=I\left[\vec{i}\left(lB_z\right)+\vec{k}\left(-lB_x\right)\right]=+0,196\,\text{N}\,\vec{i}$$

$$\vec{F}_m=IlB_z\,\vec{i}=0,196\,\text{N}\,\vec{i}\quad\Rightarrow\quad B_z=\frac{0,196\,\text{N}}{30\,\text{A}\times 0,30\,\text{m}}=0,02177\,\text{T}$$

**10)** Dos hilos de cobre están colocados perpendicularmente al plano XY, por uno pasa una intensidad $I_1$ = 1 A en sentido +OZ y está en el punto (−1;0) m, y por el otro pasa una intensidad $I_2$ = 2 A en sentido −OZ y está en el punto (1;0) m. Calcula la inducción magnética $B_1$ y $B_2$, debida a cada hilo, y la total $B_{neta}$ en un punto sobre el eje +OY que está a 2 m de cada hilo. [$B_1 = 1,0\cdot 10^{-7}$ T; $\theta_1$ = 150º; $B_2 = 2,0\cdot 10^{-7}$ T; $\theta_2$ = 30º; $B_{neta} = 3^{½}\cdot 10^{-7}$ T a 60º con el eje OX]

**Respuesta**:




El campo magnético creado por $I_1$ es perpendicular a la línea que va desde el hilo hasta el punto. Esa línea forma un ángulo de 60º con el eje X (ángulo = arccos ½ = arccos 0,5 = 60º), luego el ángulo entre $B_1$ y el eje Y es de 60º. Y para $B_2$ en razonamiento es análogo.

$$\vec{B}_{(+OY)} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} = \frac{4\pi 10^{-7}\,\frac{T\cdot m}{A}\times 1\,A}{2\pi\times 2\,m} = 10^{-7}\,T \quad \begin{cases} B_{1x} = 10^{-7}\,T\times\cos 150º = -\frac{\sqrt{3}}{2}\times 10^{-7}\,T \\ B_{1y} = 10^{-7}\,T\times \text{sen}\,150º = \frac{1}{2}\times 10^{-7}\,T \end{cases}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r} = \frac{4\pi 10^{-7}\,\frac{T\cdot m}{A}\times 2\,A}{2\pi\times 2\,m} = 2,0\cdot 10^{-7}\,T \quad \begin{cases} B_{2x} = 2,0\cdot 10^{-7}\,T\times\cos 30º = \frac{\sqrt{3}}{2}\times 2,0\cdot 10^{-7}\,T \\ B_{2y} = 2,0\cdot 10^{-7}\,T\times \cos 60º = \frac{1}{2}\times 2,0\cdot 10^{-7}\,T \end{cases}$$

$$\vec{B}_{(+OY)} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \quad \left\{\begin{matrix} B_x = B_{1x} + B_{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times 10^{-7}\,T \\ B_y = B_{1y} + B_{2y} = \frac{3}{2}\times 10^{-7}\,T \end{matrix}\right\} \quad \begin{cases} B_t = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{3}\times 10^{-7}\,T \\ \alpha = \arctan\dfrac{B_y}{B_x} = 60º \end{cases}$$

Algebraicamente: En $P_1$ $(0;3^{½})$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\vec{u}_{t_1} \quad \left\{\begin{matrix} \vec{u}_{I_1} = \vec{k} \\ \vec{u}_{r_1} = \dfrac{\sqrt{3}\vec{j} - \left(-1\vec{i}\right)m}{2m} = \dfrac{1}{2}\vec{i} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} \end{matrix}\right\} \vec{u}_{t_1} = \vec{k}\times\left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right) = \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\vec{i}\right)$$

$$\vec{u}_{t_1} = \vec{u}_{I_1}\times\vec{u}_{r_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \vec{j}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\vec{u}_{t_1} = \frac{4\pi 10^{-7}\,\frac{T\cdot m}{A}\times 1\,A}{2\pi\times 2\,m}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 10^{-7}\,T\,\vec{i} + \frac{1}{2}\cdot 10^{-7}\,T\,\vec{j}$$

$$\left|\vec{B}_1\right| = 1,0\cdot 10^{-7}\,T \quad\Rightarrow\quad \theta_1 = \arctan\frac{B_{1y}}{B_{1x}} = -30º = 150º$$

$$\vec{B}_2=\frac{\mu_0 I_2}{2\pi r}\vec{u}_{t_2}\quad \left.\begin{cases}\vec{u}_{I_2}=-\vec{k}\\ \vec{u}_{r_2}=\dfrac{\sqrt{3}\vec{j}-1\vec{i}\,\text{m}}{2\,\text{m}}=-\dfrac{1}{2}\vec{i}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\end{cases}\right\}\vec{u}_{t_1}=-\vec{k}\times\left(-\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right)=\frac{1}{2}\vec{j}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i}$$

$$\vec{u}_{t_2}=\vec{u}_{I_2}\times\vec{u}_{r_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&0&-1\\-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}&0\end{vmatrix}=\vec{i}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\vec{j}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$$

$$\vec{B}_2=\frac{\mu_0 I_2}{2\pi r}=\frac{4\pi 10^{-7}\,\frac{\text{T}\cdot\text{m}}{\text{A}}\times 2\,\text{A}}{2\pi\times 2\,\text{m}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}\right)=2,0\cdot 10^{-7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\text{T}\,\vec{i}+2,0\cdot 10^{-7}\times\frac{1}{2}\,\text{T}\,\vec{j}$$

$$\left|\vec{B}_2\right|=2,0\cdot 10^{-7}\,\text{T}\quad\Rightarrow\quad\theta_2=\arctan\frac{B_{2y}}{B_{2x}}=30^{\text{o}}$$

$$\vec{B}_t=\vec{B}_1+\vec{B}_2$$

$$\left.\begin{cases}\vec{B}_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 10^{-7}\,\text{T}\,\vec{i}+\frac{1}{2}\cdot 10^{-7}\,\text{T}\,\vec{j}\\ \vec{B}_2=2,0\cdot 10^{-7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\text{T}\,\vec{i}+2,0\cdot 10^{-7}\times\frac{1}{2}\,\text{T}\,\vec{j}\end{cases}\right\}\quad \vec{B}_t=\vec{B}_1+\vec{B}_2=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 10^{-7}\,\text{T}\,\vec{i}+1,5\cdot 10^{-7}\,\text{T}\,\vec{j}$$

$$B_t=\sqrt{B_x^2+B_y^2}=\sqrt{3}\cdot 10^{-7}\,\text{T}\quad\Rightarrow\quad\theta_{\text{total}}=\arctan\frac{B_y}{B_x}=60^{\text{o}}$$

**11)** Sean dos hilos paralelos perpendiculares al plano XY sobre el eje X: $I_1$ = 15 A en (-2,65;0) cm y sentido +Z; $I_2$ = 32 A en (+2,65;0) cm y sentido -Z. ¿Cuál es el campo magnético resultante, en magnitud y dirección, en un punto (0;2,65) cm que está a 3,75 cm de los dos?. [B = $1,88\cdot 10^{-4}$ T a 70º del eje X]

**Respuesta**:

$$\vec{B}_1=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1}\vec{u}_{t_1}\quad\left\{\vec{u}_{t_1}=\vec{u}_{I_1}\times\vec{u}_{r_1}\right\}\left\{\begin{matrix}\vec{u}_{r_1}=\dfrac{2,65\,\text{cm}\,\vec{j}-\left(-2,65\,\text{cm}\,\vec{i}\right)}{3,75\,\text{cm}}=0,706\,\vec{i}+0,706\,\vec{j}\\ \vec{u}_{I_1}=\vec{k}\end{matrix}\right\}$$

$$\vec{u}_{t_1}=\vec{u}_{I_1}\times\vec{u}_{r_1}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&0&1\\0,706&0,706&0\end{vmatrix}=\vec{i}\left(-0,706\right)-\vec{j}\left(-0,706\right)=-0,706\,\vec{i}+0,706\,\vec{j}$$

$$\vec{B}_1=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1}\vec{u}_{t_1}=\frac{4\pi 10^{-7}\,\frac{\text{T}\cdot\text{m}}{\text{A}}\times 15\,\text{A}}{2\pi\times 0,0375\,\text{m}}\left(-0,706\,\vec{i}+0,706\,\vec{j}\right)=-564,8\cdot 10^{-7}\,\text{T}\,\vec{i}+564,8\cdot 10^{-7}\,\text{T}\,\vec{j}$$

$$\vec{B}_2=\frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}\vec{u}_{t_2}\quad\left\{\vec{u}_{t_2}=\vec{u}_{I_2}\times\vec{u}_{r_2}\right\}\left\{\begin{matrix}\vec{u}_{r_1}=\dfrac{2,65\,\text{cm}\,\vec{j}-\left(2,65\,\text{cm}\,\vec{i}\right)}{3,75\,\text{cm}}=-0,706\,\vec{i}+0,706\,\vec{j}\\ \vec{u}_{I_2}=-\vec{k}\end{matrix}\right\}$$

$$\vec{u}_{t_2}=\vec{u}_{I_2}\times\vec{u}_{r_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&0&-1\\-0,706&0,706&0\end{vmatrix}=\vec{i}\left(0,706\right)-\vec{j}\left(-0,706\right)=0,706\,\vec{i}+0,706\,\vec{j}$$

$$\vec{B}_2=\frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}\vec{u}_{t_2}=\frac{4\pi 10^{-7}\,\frac{\text{T}\cdot\text{m}}{\text{A}}\times 32\,\text{A}}{2\pi\times 0,0375\,\text{m}}\left(0,706\,\vec{i}+0,706\,\vec{j}\right)=1.204,90\cdot 10^{-7}\,\text{T}\,\vec{i}+1.204,90\cdot 10^{-7}\,\text{T}\,\vec{j}$$

$$\vec{B}_{total} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

$$\begin{cases} \vec{B}_1 = -564,8 \cdot 10^{-7}\ \text{T}\ \vec{i} + 564,8 \cdot 10^{-7}\ \text{T}\ \vec{j} \\ \vec{B}_2 = 1.204,90 \cdot 10^{-7}\ \text{T}\ \vec{i} + 1.204,90 \cdot 10^{-7}\ \text{T}\ \vec{j} \end{cases}$$

$$\vec{B}_{total} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = 640,1 \cdot 10^{-7}\ \text{T}\ \vec{i} + 1.769,7 \cdot 10^{-7}\ \text{T}\ \vec{j}$$

$$B_{total} = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = 1,882 \cdot 10^{-4}\ \text{T} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan \frac{B_y}{B_x} = 70,11^{\circ}$$

El campo magnético creado por la corriente de 15 A en un punto, a una distancia r, es perpendicular a la línea que une el hilo y el punto. Siendo el ángulo con el eje X igual a 45º: ángulo = arccos (½·53 cm/3,75 cm) = 45º. Por lo que el ángulo que forma el campo con el eje Y es de 45º.

Para la corriente de 32 A el razonamiento es análogo.

$$\vec{B}_t = \vec{B}_{15} + \vec{B}_{32}$$

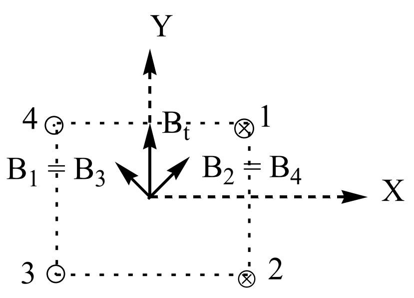
$$B_{15} = \frac{\mu_0 I_{15}}{2\pi r} = \frac{4\pi 10^{-7}\ \frac{\text{T}\cdot\text{m}}{\text{A}} \times 15\ \text{A}}{2\pi \times 0,0375\ \text{m}} = 8,0 \cdot 10^{-5}\ \text{T} \quad \begin{cases} B_{x15} = 8,0 \cdot 10^{-5}\ \text{T} \times \cos 45^{\circ} \\ B_{y15} = 8,0 \cdot 10^{-5}\ \text{T} \times \cos 45^{\circ} \end{cases}$$

$$B_{32} = \frac{\mu_0 I_{32}}{2\pi r} = \frac{4\pi 10^{-7}\ \frac{\text{T}\cdot\text{m}}{\text{A}} \times 32\ \text{A}}{2\pi \times 0,0375\ \text{m}} = 1,7 \cdot 10^{-4}\ \text{T} \quad \begin{cases} B_{x32} = 1,7 \cdot 10^{-4}\ \text{T} \times \cos 45^{\circ} \\ B_{y32} = 1,7 \cdot 10^{-4}\ \text{T} \times \cos 45^{\circ} \end{cases}$$

$$\vec{B}_t = \vec{B}_{15} + \vec{B}_{32} \begin{cases} B_{xt} = B_{x32} - B_{x15} = 6,4 \cdot 10^{-5}\ \text{T} \\ B_{yt} = B_{y32} + B_{y15} = 1,8 \cdot 10^{-4}\ \text{T} \end{cases} \begin{cases} B_t = 1,9 \cdot 10^{-4}\ \text{T} \\ \alpha = \arctan \dfrac{1,8 \cdot 10^{-4}\ \text{T}}{6,4 \cdot 10^{-5}\ \text{T}} = 70^{\circ} \end{cases}$$

**12)** Cuatro hilos de cobre están colocados paralelamente en los extremos de un cuadrado de 20 cm de lado. Cada uno lleva una corriente de 20 A, dos contiguos en el mismo sentido y los otros dos en sentido contrario. Calcula la magnitud y dirección del campo magnético B en el centro del cuadrado. [7,9·10$^{-5}$ T en la dirección paralela al plano del cuadrado y perpendicular a los hilos, dividiendo el cuadrado en dos partes, dejando a cada lado los dos hilos con la corriente en el mismo sentido, siendo el sentido el que deja a la izquierda los hilos con la corriente hacia arriba y a la derecha los hilos con la corriente hacia abajo]

**Respuesta**:




$$\vec{B}_t = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4$$

$$\left|\vec{B}_1\right| = \left|\vec{B}_2\right| = \left|\vec{B}_3\right| = \left|\vec{B}_4\right| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi 10^{-7}\ \frac{\text{T}\cdot\text{m}}{\text{A}} \times 20\ \text{A}}{2\pi \times \sqrt{0,10^2 + 0,10^2}\ \text{m}} = 2,8 \cdot 10^{-5}\ \text{T}$$

$$\vec{B}_t \begin{cases} B_{tx} = B_{2x} + B_{4x} - B_{1x} - B_{3x} = 0 \\ B_{ty} = B_{1y} + B_{2y} + B_{3y} + B_{4y} = 4 \times 2,8 \cdot 10^{-5}\ \text{T} \times \cos 45^{\circ} = 7,9 \cdot 10^{-5}\ \text{T} \end{cases}$$

El campo magnético neto, $7{,}9\cdot10^{-5}$ T, en la dirección paralela al plano del cuadrado y perpendicular a los hilos, dividiendo el cuadrado en dos partes, dejando a cada lado los dos hilos con la corriente en el mismo sentido, siendo el sentido el que deja a la izquierda los hilos con la corriente hacia arriba y a la derecha los hilos con la corriente hacia abajo.

**13)** Por una espira rectangular de 10 cm de base sobre el eje X y de 20 cm de altura sobre el eje Y, circula una corriente de 5 A en sentido horario. Se aplica un campo magnético de valor 2 T y dirigido en el sentido positivo del eje OY. Calcular: a) la fuerza magnética sobre cada lado de la espira; b) momento sobre la espira. [a) 1 N y -1 N en el eje OY; b) 0,2 N·m sobre eje OX]

**Respuesta**:

Calculamos sobre cada lado de la espira la fuerza magnética: $\vec{F}_m = I\vec{l}\times\vec{B}$. El momento de la espira viene dado por:

$$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0{,}2\,\text{m} & 0 \\ 0 & 0 & 1\,\text{N} \end{vmatrix} = \vec{i}\left(0{,}2\,\text{N m}\right)$$

**14)** Un cable coaxial está formado por dos conductores cilíndricos. Uno interno de radio R y otro externo, de radio interior $R_1$ y de radio exterior $R_2$. Los dos conductores están recorridos por la misma intensidad de corriente I, pero de sentido contrario. Calcula el campo magnético: a) en un punto situado entre los dos conductores $R < r < R_1$; b) en un punto exterior al cable coaxial $r > R_2$; c) en un punto interior al conductor interno $r < R$; d) en un punto interior al conductor externo $R_1 < r < R_2$. [a) $B = \mu_0 I/(2\pi r)$; b) $B = 0$; c) $B = (\mu_0 I/(2\pi r))\cdot r^2/R^2$; d) $B = (\mu_0 I/(2\pi r))\cdot(1-(r^2-R_1^2)/(R_2^2-R_1^2))$]

**Respuesta**:

Aplicando la ley de Ampère: $\int \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

$$R < r < R_1 \quad \left\{B\cdot 2\pi r = \mu_0 I\right\} \quad \left\{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right.$$

$$r > R_2 \quad \left\{B\cdot 2\pi r = \mu_0 I_t = \mu_0\left(I - I\right) = 0\right\} \quad \left\{B = 0\right.$$

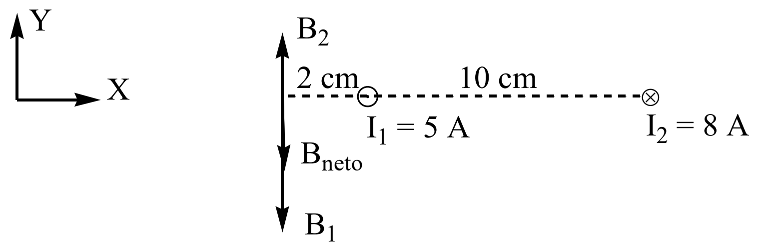
$$r < R \quad \begin{Bmatrix} B\cdot 2\pi r = \mu_0 I' \\ I' < I \end{Bmatrix} \quad \left\{\frac{I}{\pi R^2} = \frac{I'}{\pi r^2}\right\}\left\{B = \frac{\mu_0 I'}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I \frac{\pi r^2}{\pi R^2}}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I \frac{\pi r^2}{\pi R^2}}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\frac{r^2}{R^2}\right.$$

$$R_1 < r < R_2 \quad \left\{B\cdot 2\pi r = \mu_0 I_t = \mu_0 I_{int} - \mu_0 I'\right\}\left\{\frac{I}{\pi R_2^2 - \pi R_1^2} = \frac{I'}{\pi r^2 - \pi R_1^2}\right\}$$

$$B = \frac{\mu_0\left(I_{int} - I'\right)}{2\pi r} = \frac{\mu_0\left(I - I\frac{\pi r^2 - \pi R_1^2}{\pi R_2^2 - \pi R_1^2}\right)}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(1 - \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\right)$$

**15)** Dos conductores rectilíneos colocados paralelos y perpendiculares al plano XY, sobre el eje X y separados 10 cm, transportan corrientes en sentidos opuestos: $I_1 = 5$ A sentido +Z y $I_2 = 8$ A sentido -Z. Determine: a) el campo magnético en un punto del eje X situado a 2 cm del primero y a 12 cm del segundo; b) la fuerza por unidad de longitud entre los dos conductores. Dato: $\mu_0$. [a) $B_{y(neto)} = -3{,}67\cdot10^{-5}$ T; b) $8{,}0\cdot10^{-5}$ N/m]

**Respuesta**:




$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1}\vec{u}_{t_1} = \frac{4\pi 10^{-7}\,\frac{T\cdot m}{A}\times 5\,A}{2\pi\times 0{,}02\,m}\left(\vec{k}\times-\vec{i}\right) = 5{,}0\cdot 10^{-5}\,T\left(-\vec{j}\right)$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}\vec{u}_{t_2} = \frac{4\pi 10^{-7}\,\frac{T\cdot m}{A}\times 8\,A}{2\pi\times 0{,}12\,m}\left(-\vec{k}\times-\vec{i}\right) = 1{,}33\cdot 10^{-5}\,T\left(+\vec{j}\right)$$

$$\vec{B}_{total} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = -5{,}0\cdot 10^{-5}\,T\,\vec{j} + 1{,}33\cdot 10^{-5}\,T\,\vec{j} = -3{,}67\cdot 10^{-5}\,T\,\vec{j}$$

$$\vec{F}_{12} = I_1\cdot\vec{l}_1\times\vec{B}_{12}\quad\left\{\vec{B}_{12} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_{12}}\vec{u}_{t_2} = \frac{4\pi 10^{-7}\,\frac{T\cdot m}{A}\times 8\,A}{2\pi\times 0{,}10\,m}\left(-\vec{k}\times\vec{i}\right) = 1{,}60\cdot 10^{-5}\,T\,\vec{j}\right\}$$

$$\vec{F}_{12} = I_1\cdot l_1 B_{12}\left(\vec{k}\times\vec{j}\right) = I_1\cdot l_1 B_{12}\left(-\vec{i}\right)\ \Rightarrow\ \frac{\vec{F}_{12}}{l_1} = I_1\cdot B_{12}\left(-\vec{i}\right) = I_1\cdot\frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_{12}}\left(-\vec{i}\right) = 8.0\cdot 10^{-5}\,\frac{N}{m}\left(-\vec{i}\right)$$

$$\vec{F}_{21} = I_2\cdot\vec{l}_2\times\vec{B}_{21}\quad\left\{\vec{B}_{21} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_{21}}\vec{u}_{t_1} = \frac{4\pi 10^{-7}\,\frac{T\cdot m}{A}\times 5\,A}{2\pi\times 0{,}10\,m}\left(\vec{k}\times\vec{i}\right) = 1{,}00\cdot 10^{-5}\,T\,\vec{j}\right\}$$

$$\vec{F}_{21} = I_2\cdot l_2 B_{21}\left(-\vec{k}\times\vec{j}\right) = I_2\cdot l_2 B_{21}\left(\vec{i}\right)\ \Rightarrow\ \frac{\vec{F}_{21}}{l_2} = I_2\cdot B_{21}\left(\vec{i}\right) = I_2\cdot\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_{21}}\left(\vec{i}\right) = 8.0\cdot 10^{-5}\,\frac{N}{m}\left(\vec{i}\right)$$

**16)** Una partícula, con carga q, penetra en una región en la que existe un campo. Explique cómo podríamos determinar, al observar la trayectoria de la partícula, si se trata de un campo eléctrico o magnético. ¿Hay algún caso en que no sería posible determinar el tipo de campo?. Haga un análisis energético del movimiento de la partícula para un campo eléctrico y para un campo magnético, ambos perpendiculares a la velocidad con que la partícula penetra en el campo.

**17)** Un protón acelerado por una diferencia de potencial de $\Delta V_e$ = 10.000 V, penetra en una región en la que existe un campo magnético uniforme de B = 2 T, perpendicular a su velocidad. Dibuje la trayectoria seguida por la partícula y analice las variaciones de energía del protón desde una situación inicial de reposo hasta encontrarse en el campo magnético. Calcule: a) el radio de la circunferencia descrita por el protón y su frecuencia de giro; b) explique las diferencias que encontraría si se tratara de un electrón que penetrase con la misma velocidad en el campo magnético. Datos: $q_p = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ C; $m_p = 1{,}67\cdot 10^{-27}$ kg ; $q_e = -1{,}6\cdot 10^{-19}$ C; $m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ kg ,. [a) El protón aumenta su energía cinética en $1{,}6\cdot 10^{-15}$ J y disminuye su energía potencial eléctrica en el mismo valor; el radio es de $7{,}20\cdot 10^{-3}$ m y la frecuencia de $3{,}05\cdot 10^{7}$ Hz; b) para el electrón con la misma velocidad gira en sentido inverso al entrar en el campo magnético, siendo el radio menor de $3{,}92\cdot 10^{-6}$ m y la frecuencia mayor de $5{,}60\cdot 10^{10}$ Hz]

**Respuesta**:

El protón es acelerado en la región en la que hay una diferencia de potencial de 10.000 V, su movimiento va en el mismo sentido del campo eléctrico, por ser positivo, y hacia los puntos en los que disminuye el potencial eléctrico. La trayectoria es una recta. El trabajo realizado por el campo sobre el protón aumenta su energía cinética:

$$W_{por-campo} = \Delta E_c = -\Delta E_p = -q_p \cdot \Delta V = -q_p \cdot \left(V_- - V_+\right) = q_p \cdot \Delta V_e = 1,6 \cdot 10^{-19}\,\text{C} \times 10.000\,\text{V} = 1,6 \cdot 10^{-15}\,\text{J}$$

$$\Delta E_c = 1,6 \cdot 10^{-15}\,\text{J} = \frac{1}{2} m_p v^2 \quad \Rightarrow \quad v_{protón} = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta E_c}{m_p}} = \sqrt{\frac{2 \times 1,6 \cdot 10^{-15}\,\text{J}}{1,67 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}}} = 1,384257 \cdot 10^6\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{v} \perp \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{F}_m\right| = qvB = m\frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R_{protón} = \frac{mv}{qB} = \frac{1,67 \cdot 10^{-27}\,\text{kg} \times 1,38 \cdot 10^6\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}}{1,6 \cdot 10^{-19}\,\text{C} \times 2\,\text{T}} = 7,20 \cdot 10^{-3}\,\text{m}$$

$$v = \omega R = 2\pi \nu R \quad \Rightarrow \quad \nu_{protón} = \frac{v}{2\pi R} = \frac{v}{2\pi \frac{mv}{qB}} = \frac{qB}{2\pi m} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19}\,\text{C} \times 2\,\text{T}}{2\pi \times 1,67 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}} = 3,05 \cdot 10^7\,\text{Hz}$$

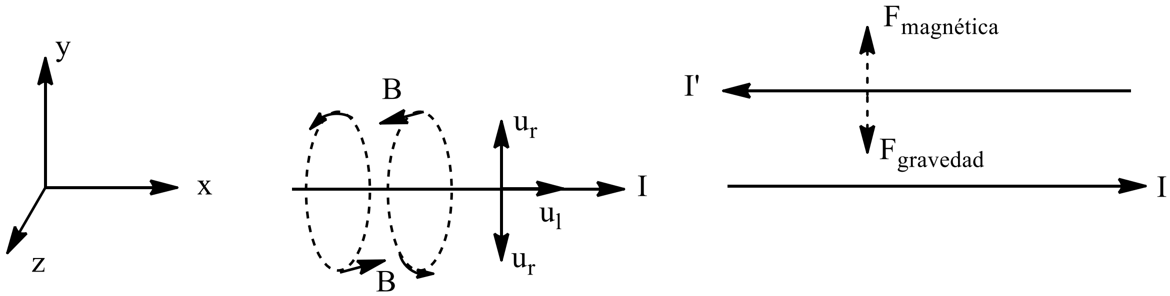
$$v_{electrón} = 1,38 \cdot 10^6\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{v} \perp \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{F}_m\right| = qvB = m\frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R_{electrón} = \frac{mv}{qB} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31}\,\text{kg} \times 1,38 \cdot 10^6\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}}{1,6 \cdot 10^{-19}\,\text{C} \times 2\,\text{T}} = 3,92437 \cdot 10^{-6}\,\text{m}$$

$$v = \omega R = 2\pi \nu R \quad \Rightarrow \quad \nu_{electrón} = \frac{v}{2\pi R} = \frac{v}{2\pi \frac{mv}{qB}} = \frac{qB}{2\pi m} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19}\,\text{C} \times 2\,\text{T}}{2\pi \times 9,1 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}} = 5,60 \cdot 10^{10}\,\text{Hz}$$

**18)** Por un conductor rectilíneo indefinido, apoyado sobre el plano horizontal XZ, circula una corriente de $I_x = 200$ A. Dibuje las líneas del campo magnético producido por la corriente. Calcule: a) el valor del campo B en los puntos situados en el eje Y perpendiculares al conductor y a una distancia de 2 cm por encima y por debajo; b) la intensidad de corriente I' que tendría que circular por un conductor, paralelo al anterior, y situado a 2 cm por encima de él, para que no cayera, si la masa por unidad de longitud de dicho conductor es de 0,1 kg/m. Dato: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ T·m/A. [a) $B_{z(0;0,02\cdot m)} = 0,002$ T; $B_{z(0;-0,02\cdot m)} = -0,002$ T; b) $I'_x = -490$ A con sentido contrario a I]

**Respuesta**:




$$\vec{B}_{(0;0,02\cdot m)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_t = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(\vec{u}_l \times \vec{u}_r\right) = \frac{4\pi 10^{-7}\,\tfrac{\text{T}\cdot\text{m}}{\text{A}} \times 200\,\text{A}}{2\pi \times 0,02\,\text{m}}\left(\vec{i} \times \vec{j}\right) = 0,002\,\text{T}\,\vec{k}$$

$$\vec{B}_{(0;-0,02\cdot m)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_t = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(\vec{u}_l \times \vec{u}_r\right) = \frac{4\pi 10^{-7}\,\tfrac{\text{T}\cdot\text{m}}{\text{A}} \times 200\,\text{A}}{2\pi \times 0,02\,\text{m}}\left(\vec{i} \times -\vec{j}\right) = -0,002\,\text{T}\,\vec{k}$$

$$\vec{F}_{neta} = \vec{F}_{magnética} + \vec{F}_{gravedad} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{magnética} = -\vec{F}_{gravedad} \Rightarrow \frac{\vec{F}_{magnética}}{L'} = -\frac{\vec{F}_{gravedad}}{L'}$$

$$\vec{F}_{gravedad} = -mg\,\vec{j} \Rightarrow \frac{\vec{F}_{gravedad}}{L'} = \frac{-mg\vec{j}}{L'} = -\frac{m}{L'}g\,\vec{j} = -0,1\tfrac{kg}{m}\times 9,8\tfrac{m}{s^2}\,\vec{j} = -0,98\tfrac{N}{m}\,\vec{j}$$

$$\vec{F}_{magnética} = I'\vec{L}'\times\vec{B}_I \Rightarrow \frac{\vec{F}_{magnética}}{L'} = -\frac{\vec{F}_{gravedad}}{L'} = +0,98\tfrac{N}{m}\,\vec{j}$$

$$\frac{\vec{F}_{magnética}}{L'} = I'\vec{u}'_{I'}\times\vec{B}_I = 0,98\tfrac{N}{m}\,\vec{j} = I'\vec{u}'_{I'}\times\vec{B}_I = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ I'_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,002T \end{vmatrix} = -\vec{j}\cdot I'_x\cdot 0,002T = -0,002\cdot I'_x\,\vec{j}$$

$$I'_x = -\frac{0,98\tfrac{N}{m}\,\vec{j}}{0,002T\,\vec{j}} = -490\,A$$

**19)** a) Un electrón incide en un campo magnético B perpendicular a su velocidad v. Determine la intensidad del campo magnético B necesaria para que el período de su movimiento sea $T_e$ = 1 μs. b) Razone cómo cambiaría la trayectoria descrita si la partícula incidente fuera un protón con la misma velocidad (sentido de giro, radio y período). Datos: $q_e = -1,6\cdot10^{-19}$ C; $m_e = 9,1\cdot10^{-31}$ kg; $m_p = 1,7\cdot10^{-27}$ kg. [a) $B = 3,57\cdot10^{-5}$ T; siendo el sentido de la rotación del electrón igual que el de B; b) el sentido del giro del protón es contrario a B y, por tanto, al del electrón; el radio de giro del protón es mayor en $R_p = R_e\cdot m_p/m_e = 1.868\cdot R_e$; el período de rotación del protón es mayor $T_p = 1,87\cdot10^{-3}$ s]

**Respuesta**:

$$\left.\begin{cases} \vec{F}_m = q\vec{v}\times\vec{B} = m\vec{a}_n = m\left(\vec{\omega}\times\vec{v}\right) \\ \vec{F}_m = -q\vec{B}\times\vec{v} = m\left(\vec{\omega}\times\vec{v}\right) \end{cases}\right\} \quad -q\vec{B} = m\vec{\omega} \Rightarrow \boxed{\vec{\omega} = -\frac{q}{m}\vec{B}}$$

$$\vec{v}\perp\vec{B} \Rightarrow \left.\begin{cases} \vec{F}_m = q\vec{v}\times\vec{B} \\ \vec{F}_m = m\vec{a}_n = m\dfrac{v^2}{R}\vec{u}_n \end{cases}\right\} \quad \left|\vec{F}_m\right| = qvB = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow \boxed{R = \frac{mv}{qB}}$$

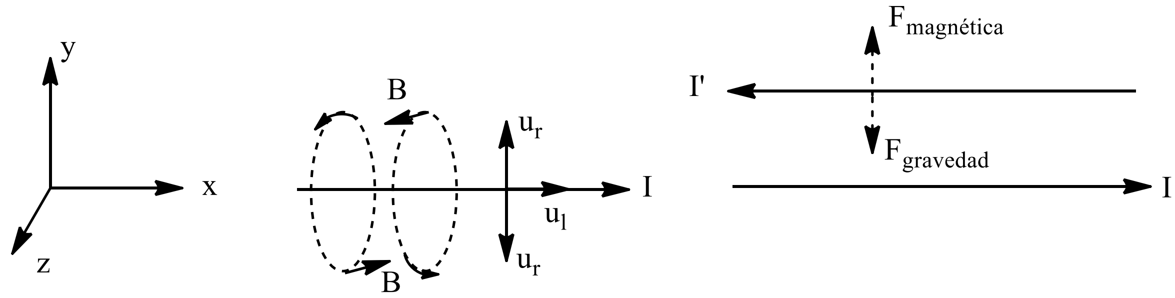
$$v = \omega R = \frac{2\pi}{T}R \Rightarrow T = \frac{2\pi}{v}R = \frac{2\pi}{v}\frac{mv}{qB} = \frac{2\pi m}{qB} \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi m}{qB}}$$

$$B = \frac{2\pi m_e}{q_e T_e} = \frac{2\pi\times 9,1\cdot10^{-31}\,kg}{1,6\cdot10^{-19}\,C\times 1,0\cdot10^{-6}\,s} = 3,57\cdot10^{-5}\,T \Rightarrow \vec{\omega}_e = -\frac{q_e}{m_e}\vec{B} = +\frac{|q_e|}{m_e}\vec{B}$$

$$T_p = \frac{2\pi m_p}{q_p B} = \frac{2\pi\times 1,7\cdot10^{-27}\,kg}{1,6\cdot10^{-19}\,C\times 3,57\cdot10^{-5}\,T} = 1,87\cdot10^{-3}\,s \Rightarrow \vec{\omega}_p = -\frac{q_p}{m_p}\vec{B} \quad \left\{\frac{R_p}{R_e} = \frac{\dfrac{m_p v}{q_p B}}{\dfrac{m_e v}{q_e B}} = \frac{m_p}{m_e}\right\}$$

**20)** Por un conductor rectilíneo indefinido, apoyado sobre el plano horizontal XZ, circula una corriente de $I_x$ = 150 A. Dibuje las líneas del campo magnético producido por la corriente. Calcule: a) el valor del campo B en los puntos situados en el eje Y perpendiculares al conductor y a una distancia de 3 cm por encima y por debajo; b) la intensidad de corriente I' que tendría que circular por un conductor, paralelo al anterior, y situado a 0,8 cm por encima de él, para que no cayera, si la masa por unidad de longitud de dicho conductor es de 20 g/m. Dato: $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ T·m/A. [a) $B_{z(0;0,03\cdot m)}$ = 3 mT; $B_{z(0;-0,03\cdot m)}$ = -3 mT; b) $I'_x$ = -52,26 A con sentido contrario a $I_x$]

**Respuesta**:




$$\vec{B}_{(0;0,03\cdot m)}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_t=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(\vec{u}_l\times\vec{u}_r\right)=\frac{4\pi 10^{-7}\,\frac{T\cdot m}{A}\times 150\,A}{2\pi\times 0,03\,m}\left(\vec{i}\times\vec{j}\right)=1,0\cdot 10^{-3}\,T\,\vec{k}$$

$$\vec{B}_{(0;-0,03\cdot m)}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_t=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(\vec{u}_l\times\vec{u}_r\right)=\frac{4\pi 10^{-7}\,\frac{T\cdot m}{A}\times 150\,A}{2\pi\times 0,03\,m}\left(\vec{i}\times -\vec{j}\right)=-1,0\cdot 10^{-3}\,T\,\vec{k}$$

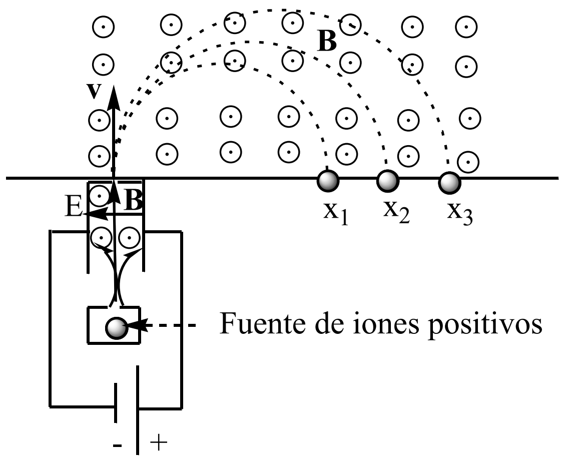
$$\vec{B}_{I(0;0,08)}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_t=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(\vec{u}_l\times\vec{u}_r\right)=\frac{4\pi 10^{-7}\,\frac{T\cdot m}{A}\times 150\,A}{2\pi\times 0,008\,m}\left(\vec{i}\times\vec{j}\right)=3,75\cdot 10^{-3}\,T\,\vec{k}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{F}_{magnética}=-\vec{F}_{gravedad}\\ I'\vec{L}'\times B_I\,\vec{k}=-\left(-mg\vec{j}\right)=+mg\vec{j}\end{array}\right\}\quad\left\{\begin{array}{l}\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}\\ -\vec{i}\times\vec{k}=\vec{j}\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad\boxed{I'L'\left(-\vec{i}\right)\times B_I\,\vec{k}=+mg\vec{j}}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left|\vec{F}_{magnética}\right|=\left|\vec{F}_{gravedad}\right|\\ I'L'B_I=mg\end{array}\right\}\quad\left\{\begin{array}{l}I'=\dfrac{mg}{L'B_I}=\dfrac{mg}{L'B_I}=\dfrac{0,020\,\frac{kg}{m}\times 9,8\,\frac{m}{s^2}}{3,75\cdot 10^{-3}\,T}=52,26\,A\\ I'_x=-52,26\,A\end{array}\right.$$

**21)** Un haz de electrones penetra en una zona del espacio en la que existen un campo eléctrico y otro magnético. a) Indique, ayudándose de un esquema si lo necesita, qué fuerzas se ejercen sobre los electrones del haz. b) Si el haz de electrones no se desvía, ¿se puede afirmar que tanto el campo eléctrico como el magnético son nulos?. Razone la respuesta.

**22)** En la siguiente figura se representa un espectrómetro de masas. Desde la fuente de iones salen cationes $Mg^{2+}$ de los tres isótopos de Mg: $^{24}Mg$, $^{25}Mg$ y $^{26}Mg$. Penetran en un selector de velocidades constituido por un condensador plano con un campo eléctrico, E = 200 V/m, y un campo magnético perpendicular a E de valor B = 0,1 T, por el que salen los iones de una determinada velocidad v. Al salir los iones del condensador entran en un campo magnético perpendicular B = 0,1 T que hace que los iones de diferentes masas e igual carga describan trayectorias circulares, impactando a las distancias $x_1$, $x_2$ y $x_3$. Calcule: a) la velocidad de salida de los iones de la fuente; b) las tres distancias de impacto $x_1$, $x_2$ y $x_3$. Datos: $Ma(^{24}Mg)$ = 23,985·u; $Ma(^{25}Mg)$ = 24,986·u; $Ma(^{26}Mg)$ = 25,983·u; $q(Mg^{2+}) = 3,2\cdot 10^{-19}$ C; $1\cdot u = 1,66\cdot 10^{-27}$ kg. [a) v = 2.000 m/s; b) $x_1$ = 4,98 mm; $x_2$ = 5,18 mm; $x_3$ = 5,38 mm]




**Respuesta**:

La velocidad con la que salen los iones de la fuente de iones:

$$F_e = F_m \quad \Rightarrow \quad qE = qvB \quad \Rightarrow \quad v = \frac{E}{B} = \frac{200\,\frac{V}{m}}{0{,}1T} = 2.000\,\tfrac{m}{s}$$

Al salir los iones con velocidad v y entrar en el campo magnético B giran describiendo una circunferencia de radio r:

$$F_m = qvB = ma_n = m\frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{mv}{qB}$$

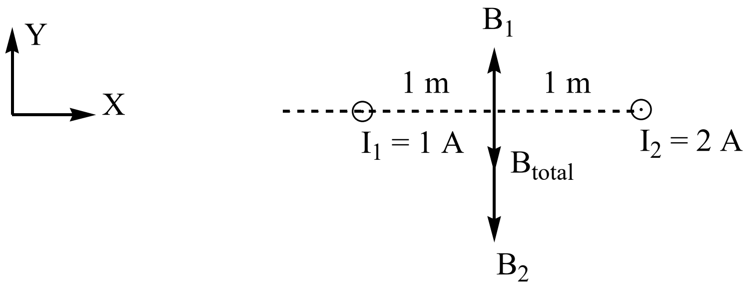
$$r_1 = \frac{m_1 v}{qB} = \frac{23{,}985 \times 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,kg \times 2.000\,\frac{m}{s}}{3{,}2 \cdot 10^{-19}\,C \times 0{,}1T} = 0{,}00249\,m \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2r_1 = 0{,}00498\,m$$

$$r_2 = \frac{m_2 v}{qB} = \frac{24{,}986 \times 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,kg \times 2.000\,\frac{m}{s}}{3{,}2 \cdot 10^{-19}\,C \times 0{,}1T} = 0{,}00259\,m \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2r_2 = 0{,}00518\,m$$

$$r_3 = \frac{m_3 v}{qB} = \frac{25{,}983 \times 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,kg \times 2.000\,\frac{m}{s}}{3{,}2 \cdot 10^{-19}\,C \times 0{,}1T} = 0{,}00269\,m \quad \Rightarrow \quad x_3 = 2r_3 = 0{,}00538\,m$$

**23)** Tenemos dos hilos de cobre paralelos y colocados perpendicularmente al plano XY, el primero con una intensidad $I_1$ = 1 A en el sentido +Z, colocado en (-1·m;0), y el segundo con una intensidad $I_2$ = 2 A en el sentido +Z, colocado en el punto (1·m;0). Calcule: a) la inducción magnética total creada por los dos hilos en el origen (0;0), en magnitud y dirección; b) la fuerza magnética por unidad de longitud que siente un tercer hilo, colocado sobre el eje Y, por el que circula una intensidad de 3 A en el sentido +Y. Dato: $\mu_0$ = $4\pi \cdot 10^{-7}$ T·m/A. [a) $B_y = -2{,}0 \cdot 10^{-7}$ T; b) $f_m/L = 0$]

**Respuesta**:




$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1}\vec{u}_{t_1} = \frac{4\pi 10^{-7}\ \frac{T\cdot m}{A} \times 1\,A}{2\pi \times 1\,m}\left(\vec{k}\times\vec{i}\right) = 2\cdot 10^{-7}\ T\ \vec{j}$$

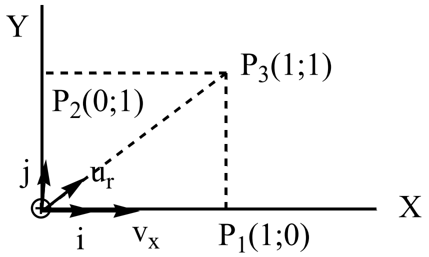
$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}\vec{u}_{t_2} = \frac{4\pi 10^{-7}\ \frac{T\cdot m}{A} \times 2\,A}{2\pi \times 1\,m}\left(\vec{k}\times -\vec{i}\right) = 4\cdot 10^{-7}\ T\left(-\vec{j}\right) = -4\cdot 10^{-7}\ T\ \vec{j}$$

$$\vec{B}_t = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = 2\cdot 10^{-7}\ T\ \vec{j} - 4\cdot 10^{-7}\ T\ \vec{j} = -2,0\cdot 10^{-7}\ T\ \vec{j}$$

$$\vec{F}_3 = I_3\vec{L}_3 \times \vec{B}_t = I_3 \cdot L_3 B_t\left(\vec{j}\times -\vec{j}\right) = 0$$

$$\vec{F}_3 = I_3\vec{L}_3 \times \vec{B}_t = I_3\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & L_3 & 0 \\ 0 & -B_y & 0 \end{vmatrix} = 0$$

**24)** Un protón se mueve a lo largo del eje X con una velocidad $v_x = 1{,}0\cdot 10^7$ m/s. Cuando pasa por el origen cuál es el campo magnético en los tres puntos siguientes del plano XY: $P_1(1;0)$mm; $P_2(0;1)$ mm; $P_3(1;1)$ mm. Datos: $q = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ C; $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ N/A$^2$. [$B_1 = 0$; $B_{2z} = 1{,}6\cdot 10^{-13}$ T; $B_{3z} = 5{,}65\cdot 10^{-14}$ T]




**Respuesta**:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v}\times\vec{u}_{r_1}}{r_1^2} \quad \left\{\vec{v}\times\vec{u}_{r_1} = v_x\ \vec{i}\times\vec{i} = 0\right\} \quad \vec{B}_1 = 0$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v}\times\vec{u}_{r_2}}{r_2^2} \quad \left\{\begin{matrix} \vec{v}\times\vec{u}_{r_2} \\ v_x\ \vec{i}\times\vec{j} = v_x\ \vec{k} \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} \vec{B}_2 = \dfrac{4\pi 10^{-7}\ \frac{T\cdot m}{A}}{4\pi}\times 1{,}6\cdot 10^{-19}\ C \times \dfrac{1{,}0\cdot 10^7\ \frac{m}{s}}{\left(0{,}001\,m\right)^2}\vec{k} \\ \vec{B}_2 = 1{,}6\cdot 10^{-13}\ T\vec{k} \end{matrix}\right.$$

$$\vec{B}_3 = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v}\times\vec{u}_{r_3}}{r_3^2} \quad \left\{\begin{matrix} \vec{v}\times\vec{u}_{r_3} \\ v_x\ \vec{i}\times\left(\dfrac{\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{v_x}{\sqrt{2}}\vec{k} \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} \vec{B}_3 = \dfrac{4\pi 10^{-7}\ \frac{T\cdot m}{A}}{4\pi}\times 1{,}6\cdot 10^{-19}\ C \times \dfrac{\frac{1{,}0\cdot 10^7}{\sqrt{2}}\ \frac{m}{s}}{\left(\sqrt{2}\cdot 10^{-3}\ m\right)^2}\vec{k} \\ \vec{B}_3 = 5{,}6\cdot 10^{-14}\ T\vec{k} \end{matrix}\right.$$

**25)** Una partícula con carga $q = 3{,}2\cdot 10^{-19}$ C se desplaza con una velocidad $\vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}\ \frac{m}{s}$ por una región en la que existe un campo magnético $\vec{B} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ T y un campo eléctrico $\vec{E} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}\ \frac{V}{m}$. a) ¿Cuál es la fuerza total ejercida sobre la partícula?. b) ¿Y si la partícula se moviera con velocidad – **v**?. [a) $1{,}567\cdot10^{-18}$ N; b) $1{,}567\cdot10^{-18}$ N]

**Respuesta**:

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = \vec{F}_{\text{eléctrica}} + \vec{F}_{\text{magnética}} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$$

$$\vec{F}_{\text{eléctrica}} = q\vec{E} = 3,2\cdot10^{-19}\,\text{C}\times\left(4\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}\,\tfrac{\text{N}}{\text{C}}\right) = 1,28\cdot10^{-18}\,\vec{i} - 6,4\cdot10^{-19}\,\vec{j} - 6,4\cdot10^{-19}\,\vec{k}\,\text{N}$$

$$\vec{F}_{\text{mag}} = q\vec{v}\times\vec{B} = 3,2\cdot10^{-19}\,\text{C}\cdot\left(2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)\times\left(2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}\,\text{T}\right) = 0$$

$$\vec{F}_{\text{mag}} = q\vec{v}\times\vec{B} = 3,2\cdot10^{-19}\,\text{C}\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 4 & 1\\ 2 & 4 & 1\end{vmatrix} = 3,2\cdot10^{-19}\,\text{C}\cdot\left[\vec{i}\,(4-4) - \vec{j}\,(2-2) + \vec{k}\,(8-8)\right] = 0$$

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = \vec{F}_{\text{eléctrica}} + \vec{F}_{\text{magnética}} = q\vec{E} + 0 = 1,28\cdot10^{-18}\,\vec{i} - 6,4\cdot10^{-19}\,\vec{j} - 6,4\cdot10^{-19}\,\vec{k}\,\text{N}$$

$$\left|\vec{F}_{\text{eléctrica}}\right| = 1,567\cdot10^{-18}\,\text{N}$$

$$\vec{F}'_{\text{mag}} = q\vec{v}'\times\vec{B} = 3,2\cdot10^{-19}\,\text{C}\cdot\left(-2\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)\times\left(2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}\,\text{T}\right) = 0$$

$$\vec{F}'_{\text{mag}} = q\vec{v}'\times\vec{B} = 3,2\cdot10^{-19}\,\text{C}\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & -4 & -1\\ 2 & 4 & 1\end{vmatrix} = 3,2\cdot10^{-19}\,\text{C}\cdot\left[\vec{i}\,(-4+4) - \vec{j}\,(-2+2) + \vec{k}\,(-8+8)\right] = 0$$

## Problemas resueltos de «Inducción Electromagnética»

$$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\ \tfrac{F}{m};\ \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \tfrac{N}{A^2}\left(\tfrac{T\cdot m}{A} \equiv \tfrac{H}{m}\right);\ q_e = -1,6 \cdot 10^{-19}\ C;\ m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}\ kg$$

**1)** Sea una bobina con 10 espiras (N = 10) planas paralelas al plano XY, siendo el vector superficie de cada una $\vec{S} = 5\,cm^2\,\vec{k}$. Si está dentro de un campo: $\vec{B} = \left(0,04t^2 + 0,5\right)\vec{i} + \left(0,04t^2 + 0,5\right)\vec{k}$, que es variable, siendo B en tesla y t en segundos. Determine: a) la relación entre el flujo magnético en la bobina y el tiempo; b) el flujo magnético a través de la bobina en el instante t = 2 s; c) el valor de la fuerza electromotriz inducida en la bobina en el instante t = 2 s; d) el valor máximo del flujo magnético en la bobina cambiando la orientación de esta; e) el valor de la fuerza electromotriz máxima inducida en la bobina en el instante t = 2 s. [a) $(0,0002\cdot t^2+0,0025)$ Wb; b) 0,0033 Wb; c) -0,0008 V; d) $(0,0004\cdot t^2+0,005)$ Wb; e) -0,0016 V]

**Respuesta**:

$$\Phi_m(t) = N\phi_m = N\vec{B}\vec{S} \quad \begin{cases} \vec{B} = \left(0,04t^2 + 0,5\right)T\,\vec{i} + \left(0,04t^2 + 0,5\right)T\,\vec{k} = \left(0,04t^2 + 0,5\right)T\left(\vec{i} + \vec{k}\right) \\ \vec{S} = 5 \cdot 10^{-4}\ m^2\,\vec{k} \end{cases}$$

$$\Phi_m(t) = N\vec{B}\vec{S} = 10 \cdot \left[\left(0,04t^2 + 0,5\right)T\left(\vec{i} + \vec{k}\right)\right] \cdot 5 \cdot 10^{-4}\,\vec{k} = 10 \cdot \left[\left(0,04t^2 + 0,5\right)\vec{k}\right] \cdot 5 \cdot 10^{-4}\,\vec{k}$$

$$\Phi_m(t) = 10 \cdot \left(0,04t^2 + 0,5\right) \cdot 5 \cdot 10^{-4} = \left(0,0002t^2 + 0,0025\right)Wb$$

$$\Phi_m(2) = \left(0,0002 \times 2^2 + 0,0025\right)Wb = 0,0033\,Wb$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m(t)}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(0,0002t^2 + 0,0025\right) = -0,0004t \quad \left\{\varepsilon_{t=2} = -0,0008\,V\right.$$

El valor máximo de la fem inducida que podría obtenerse cambiando la orientación de la bobina es colocándola para que el flujo sea el máximo. Por lo que hemos de colocarla en la misma orientación que el campo magnético.

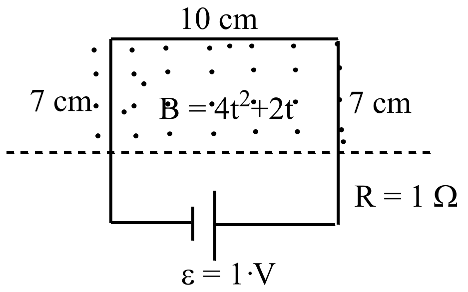
$$\Phi_m(t) = N\phi_m = N\vec{B}\vec{S} \quad \begin{cases} \vec{B} = \left(0,04t^2 + 0,5\right)T\,\vec{i} + \left(0,04t^2 + 0,5\right)T\,\vec{k} = \left(0,04t^2 + 0,5\right)T\left(\vec{i} + \vec{k}\right) \\ \vec{S} = 5 \cdot 10^{-4}\ m^2\left(\vec{i} + \vec{k}\right) \end{cases}$$

$$\Phi_m(t) = N\vec{B}\vec{S} = 10 \cdot \left[\left(0,04t^2 + 0,5\right)T\left(\vec{i} + \vec{k}\right)\right] \cdot \left[5 \cdot 10^{-4}\left(\vec{i} + \vec{k}\right)\right] = 10 \cdot \left[2 \times \left(0,04t^2 + 0,5\right) \times 5 \cdot 10^{-4}\right]$$

$$\Phi_m(t) = N\vec{B}\vec{S} = \left(0,0004t^2 + 0,005\right)Wb$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m(t)}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(0,0004t^2 + 0,005\right) = -0,0008t \quad \left\{\varepsilon_{t=2} = -0,0016\,V\right.$$

**2)** Considera la figura en la que hay un circuito en forma de rectángulo, de lados 10 y 7 cm, conectado a una batería de fem $\varepsilon = 1\,V$, siendo la resistencia del hilo $R = 1\,\Omega$. Se le aplica un campo magnético variable, $B = 4t^2 + 2t$, estando B en teslas y t en segundos, de dirección perpendicular y hacia fuera. Determine: a) la magnitud y la dirección de la fem inducida por el campo magnético para el tiempo t = 2 s; b) la intensidad de la corriente en el circuito para el tiempo t = 2 s. [a) 0,126 V en sentido de las agujas del reloj; b) 0,874 A]




**Respuesta**:

Aplicando la ley de Faraday

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

$$\Phi_m = \vec{B}\cdot\vec{S} \quad \begin{cases} B = 4t^2 + 2t \\ S = 7\,cm \times 10\,cm = 70\,cm^2 = 70\cdot 10^{-4}\,m^2 \end{cases}$$

$$\Phi_m = \vec{B}\cdot\vec{S} = B\cdot S\cdot \cos 0^o = \left(4t^2 + 2t\right)\times 70\cdot 10^{-4} = 0,0280\cdot t^2 + 0,0140\cdot t$$

$$\Phi_m = 0,0280\cdot t^2 + 0,0140\cdot t$$

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(0,0280\cdot t^2 + 0,0140\cdot t\right) = -0,0560\cdot t - 0,0140$$

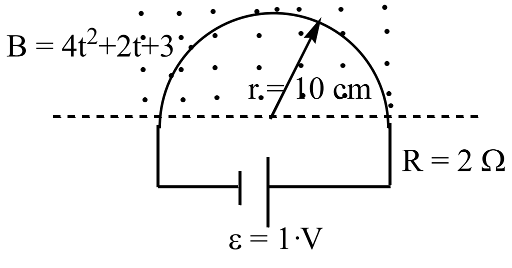
$$\varepsilon_{ind(t=2)} = -0,056t - 0,014 = -0,126\,V$$

La dirección de la fem inducida es aquella que genera una intensidad y un campo magnético inducido $B_{inducido}$ que se opone a la variación del flujo magnético. Como el flujo magnético aumenta hacia el exterior de la página el campo magnético inducido $B_{inducido}$ se dirigirá hacia dentro y, aplicando la regla de la mano derecha, la intensidad en el sentido de las agujas del reloj.

Por tanto, en el circuito tendremos dos fem, la de la batería y la inducida, que generan intensidades en sentido opuesto:

$$i = \frac{\sum \varepsilon}{R} = \frac{\varepsilon_{bat} - \varepsilon_{ind}}{R} = \frac{1V - 0,126V}{1\Omega} = 0,874\,A$$

**3)** Considera la figura en la que hay un circuito en forma de semicírculo de radio 10 cm, conectado a una bateria de fem 1·V. Siendo la resistencia del hilo de 2 ohmios. Se le aplica perpendicularmente, hacia fuera, un campo magnético variable $B = 4t^2 + 2t + 3$, estando B en teslas y t en segundos. Determine: a) la magnitud y la dirección de la fem inducida por el campo magnético para t = 10 s; b) la intensidad de la corriente en el circuito para t = 10 s. [a) 1,2566 V en sentido de las agujas del reloj; b) 0,12832 A]




**Respuesta**:

Aplicando la ley de Faraday

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

$$\Phi_m = \vec{B}\cdot\vec{S} \quad \begin{cases} B = 4t^2 + 2t + 3 \\ S = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi\left(10\,cm^2\right) = 157,08\,cm^2 = 0,015708\,m^2 \end{cases}$$

$$\Phi_m = \vec{B}\cdot\vec{S} = B\cdot S\cdot\cos 0^o = \left(4t^2+2t+3\right)\times 0,015708 = 0,062832t^2 + 0,031416t + 0,047124$$

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(0,062832t^2 + 0,031416t + 0,047124\right) = -0,125664t - 0,031416$$

$$\varepsilon_{ind(t=10s)} = -1,25664\,V$$

La dirección de la fem inducida es aquella que genera una intensidad y un campo magnético inducido $B_{inducido}$ que se opone a la variación del flujo magnético. Como el flujo magnético aumenta hacia el exterior de la página el campo magnético inducido $B_{inducido}$ se dirigirá hacia dentro y, aplicando la regla de la mano derecha, la intensidad en el sentido de las agujas del reloj.

Por tanto, en el circuito tendremos dos fem, la de la batería y la inducida, que generan intensidades en sentido opuesto:

$$i = \frac{\sum\varepsilon}{R} = \frac{\varepsilon_{ind} - \varepsilon_{bat}}{R} = \frac{1,25664\,V - 1\,V}{2\,\Omega} = 0,12832\,A$$

**4)** Una bobina constituida por 10 espiras de 2 cm$^2$ cada una, gira a 100 rpm alrededor de un eje situado en su plano e inicialmente paralelo al YZ. Si está en presencia de un campo magnético uniforme de 0,2 T dirigido en el sentido positivo de OX. Calcular: a) la fem inducida en la bobina y su valor medio; b) la fem inducida si, manteniendo la bobina en reposo la intensidad del campo disminuye uniformemente con el tiempo anulándose en 5 s. [a) $\varepsilon_L = 0,00418880\cdot sen(10,47\cdot t)$ V; b) 0; c) $\varepsilon_L = 8\cdot 10^{-5}$ V]

**Respuesta**:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_m(t)}{dt} = -N\frac{d\left(\vec{B}\cdot\vec{S}\right)}{dt} = -N\frac{d\left(BS\cos\omega t\right)}{dt} = NBS\omega\cdot sen\left(\omega t\right) = \varepsilon_0\cdot sen\left(\omega t\right)$$

$$\varepsilon = NBS\omega\cdot sen\left(\omega t\right) = 10\times 0,2\,T\times 2\cdot 10^{-4}\,m^2\times 100\cdot\frac{2\pi\,rad}{60\,s}\cdot sen\left(100\cdot\frac{2\pi}{60}t\right)$$

$$\varepsilon = NBS\omega\cdot sen\left(\omega t\right) = 0,00418880\,V\cdot sen\left(10,47\cdot t\right)$$

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon_0\cdot sen\left(\omega t\right) = \frac{\varepsilon_0}{T}\left[-\frac{1}{\omega}\cos\left(\omega t\right)\right]_0^T = \frac{\varepsilon_0}{T}\left[-\frac{1}{\omega}\left(1-1\right)\right] = 0$$

$$\varepsilon = -N\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -10\cdot\frac{\left(0-\phi_{max}\right)}{5\,s} = 10\times\frac{0,2\,T\times 2,0\cdot 10^{-4}\,m^2\times\cos 0^o}{5\,s} = 8,0\cdot 10^{-5}\,V$$

**5)** Por una bobina de 500 espiras circula una corriente continua de 2 A, que produce un flujo de $2\cdot 10^{-4}$ Wb. Determina: a) el valor de la fem inducida si la corriente se interrumpe en 0,4 s; b) el coeficiente de autoinducción de la bobina; c) la energía almacenada en el campo magnético. [ a) ε = 0,25 V; b) L = 50 mH; c) $U_B$ = 0,1 J]

**Respuesta**:

$$\varepsilon = -N\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -N\frac{(0-\phi_i)}{\Delta t} = -500\times\frac{(0-2,0\cdot10^{-4}\,\text{Wb})}{0,4\,\text{s}} = 0,25\,\text{V}$$

$$\left\{\begin{array}{l} N\phi = LI \\ \varepsilon = -L\dfrac{dI}{dt}\end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} L = \dfrac{N\phi}{I} = \dfrac{500\times2,0\cdot10^{-4}\,\text{Wb}}{2\,\text{A}} = 0,05\,\text{H} \\ L = \dfrac{-\varepsilon\Delta t}{\Delta I} = \dfrac{-0,25\,\text{V}\times0,4\,\text{s}}{0-2\,\text{A}} = 0,05\,\text{H}\end{array}\right.$$

La energía se almacena en la bobina, ya que al variar la corriente en la bobina aparece una fem inducida, que tiene una polaridad opuesta al cambio de flujo (ley de Lenz). En este caso, al disminuir la intensidad hasta cero, la corriente inducida será de igual sentido que la original.

El trabajo lo realiza el generador y la energía se almacena en la bobina. El diferencial de trabajo necesario para contrarrestar la fuerza eléctrica y magnética sobre una carga q es el siguiente:

$$dW_{\text{sobre-carga}} = -\vec{F}\cdot d\vec{r} = -q\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot d\vec{r}$$

El campo magnético no puede contribuir a ningún trabajo sobre la carga porque la fuerza magnética es perpendicular de la misma, luego:

$$dW_{\text{sobre-carga}} = -\vec{F}\cdot d\vec{r} = -q\vec{E}\vec{v}dt \quad \left\{dW_{\text{sobre-alambre}} = -q\vec{v}\vec{E}dt = -Id\vec{l}\vec{E}dt = -Idt\vec{E}d\vec{l}\right.$$

$$dW_{\text{sobre-alambre}} = \int_L dW = -Idt\int_L \vec{E}d\vec{l} = -dq\varepsilon = -Idt\varepsilon = Idt\frac{d\phi}{dt} = Id\phi = ILdI$$

$$W_{\text{sobre-alambre}} = \int_i^f LIdI = \int_2^0 LIdI = -\frac{1}{2}LI^2$$

La energía almacenada en el campo magnético, $U_B$, o en la parte inductiva del circuito, cuando la corriente se incrementa desde 0 a I, se obtiene integrando la potencia en cualquier instante respecto del tiempo: $U_B = \int P_{\text{bobina}}dt$. La potencia almacenada en la bobina lo hace en forma de campo magnético: $P_{\text{bobina}} = -\varepsilon_L i = L\frac{di}{dt}i$

$$P_{\text{bobina}} = \frac{dU_B}{dt} = -\varepsilon_L i = L\frac{di}{dt}i \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} dU_B = Lidi \\ U_B = \displaystyle\int_0^I Lidi = \frac{1}{2}LI^2\end{array}\right.$$

$$U_B = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\times0,05\,\text{H}\times(2\,\text{A})^2 = 0,1\,\text{J}$$

**6)** Dos bobinas de $N_1 = 300$ y $N_2 = 600$ espiras se colocan una al lado de la otra. Por la primera pasa $I_1 = 3$ A de corriente originando un flujo magnético en ella de $3\cdot10^{-4}$ Wb y en la segunda de $2\cdot10^{-4}$ Wb. Determinar: a) la inductancia de la primera; b) la inductancia mutua; c) la fem media inducida en la segunda cuando se interrumpe la corriente de la primera en 0,4 s. [a) $L_1 = 0,03$ H; b) $M_{21} = 0,04$ H; c) 0,3 V]

**Respuesta**:

$$N_1\phi_1 = L_1 I_1 \quad \Rightarrow \quad L_1 = \frac{N_1\phi_1}{I_1} = \frac{300\times 3\cdot 10^{-4}\ \text{Wb}}{3\,\text{A}} = 0{,}03\,\text{H}$$

$$N_2\phi_2 = M_{21} I_1 \quad \Rightarrow \quad M_{21} = \frac{N_2\phi_2}{I_1} = \frac{600\times 2\cdot 10^{-4}\ \text{Wb}}{3\,\text{A}} = 0{,}04\,\text{H}$$

$$\varepsilon_{21} = -M_{21}\frac{dI_1}{dt} = -0{,}04\,\text{H}\times\frac{(0-3\,\text{A})}{0{,}4\,\text{s}} = 0{,}3\,\text{V}$$

$$\varepsilon_{21} = -N_2\frac{d\phi_2}{dt} = -600\times\frac{\left(0-2\cdot 10^{-4}\ \text{Wb}\right)}{0{,}4\,\text{s}} = 0{,}3\,\text{V}$$

**7)** Por una bobina de 400 espiras circula una corriente continua de 2 A que da lugar a un flujo de 0,1 mWb. Calcular: a) el valor medio de la fem inducida en la bobina si se interrumpe la corriente en 80 ms; b) la autoinducción de la bobina; c) la energía almacenada en el campo magnético. [a) 0,5 V; b) L = 0,02 H; c) $U_B$ = 0,04 J]

**Respuesta**:

$$N\phi = LI \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = -N\frac{d\phi}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

$$\varepsilon_L = -N\frac{d\phi}{dt} = -400\cdot\frac{\left(0-1{,}0\cdot 10^{-4}\ \text{Wb}\right)}{0{,}08\,\text{s}} = 0{,}5\,\text{V}$$

$$N\phi = LI \quad \Rightarrow \quad L = \frac{N\phi}{I} = \frac{400\times 1{,}0\cdot 10^{-4}\ \text{Wb}}{2\,\text{A}} = 0{,}02\,\text{H}$$

$$\varepsilon_L = -L\frac{di}{dt} = -0{,}02\,\text{H}\times\frac{-2\,\text{A}}{0{,}08\,\text{s}} = 0{,}5\,\text{V}$$

$$P_{\text{bobina}} = \frac{dU_B}{dt} = -\varepsilon_L i = L\frac{di}{dt}i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} dU_B = Lidi \\ U_B = \int_0^I Lidi = \frac{1}{2}LI^2 \end{cases}$$

$$U_B = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\times 0{,}02\,\text{H}\times(2\,\text{A})^2 = 0{,}04\,\text{J}$$

**8)** Una bobina que está formada de 200 vueltas y su radio es de 0,10 m se encuentra perpendicularmente a un campo magnético uniforme de 0,2 T. Calcula la fem inducida en el carrete si, en 0'1 s, a) el campo magnético se dobla, b) el campo se hace cero, c) el campo invierte su dirección, d) la bobina rota 90º, e) la bobina rota 180º. [a) $-4\pi$ V siendo el sentido de giro contrario al aumento de B; b) $4\pi$ V siendo el sentido de giro el mismo a la disminución de B; c) +8 $\pi$ V; d) +4 $\pi$ V; e) +8 $\pi$ V].

**Respuesta**:

$$\varepsilon = -N\frac{d\phi}{dt} = -N\frac{\Delta\phi}{\Delta t} \quad \left\{\phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = BS\cos\alpha = B\pi R^2\cos\alpha\right.$$

$$\begin{cases} \Delta\phi = \phi_f - \phi_i = \vec{B}'\cdot\vec{S} - \vec{B}\cdot\vec{S} = 2BS\cos 0^\circ - BS\cos 0^\circ = BS = B\pi R^2 = 0{,}002\pi\,\text{Wb} \\ \varepsilon = -N\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -200\times\frac{0{,}002\pi\,\text{Wb}}{0{,}1\,\text{s}} = -4\pi\,\text{V} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\phi = \phi_f - \phi_i = 0 - \vec{B}\cdot\vec{S} = -BS\cos 0^o = -0,002\pi\,\text{Wb} \\ \varepsilon = -N\dfrac{\Delta\phi}{\Delta t} = -200\times\dfrac{(-0,002\pi\,\text{Wb})}{0,1\,\text{s}} = +4\pi\,\text{V} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\phi = \phi_f - \phi_i = BS\cos 180^o - BS\cos 0^o = -0,002\pi\,\text{Wb} - 0,002\pi\,\text{Wb} = -0,004\pi\,\text{Wb} \\ \varepsilon = -N\dfrac{\Delta\phi}{\Delta t} = -200\times\dfrac{(-0,004\pi\,\text{Wb})}{0,1\,\text{s}} = +8\pi\,\text{V} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\phi = \phi_f - \phi_i = BS\cos 90^o - BS\cos 0^o = -0,002\pi\,\text{Wb} \\ \varepsilon = -N\dfrac{\Delta\phi}{\Delta t} = -200\times\dfrac{(-0,002\pi\,\text{Wb})}{0,1\,\text{s}} = +4\pi\,\text{V} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\phi = \phi_f - \phi_i = BS\cos 180^o - BS\cos 0^o = -0,002\pi\,\text{Wb} - 0,002\pi\,\text{Wb} = -0,004\pi\,\text{Wb} \\ \varepsilon = -N\dfrac{\Delta\phi}{\Delta t} = -200\times\dfrac{(-0,004\pi\,\text{Wb})}{0,1\,\text{s}} = +8\pi\,\text{V} \end{cases}$$

**9)** Dos carretes se encuentran en posiciones fijas. Cuando por el carrete 1 no pasa corriente y la corriente en el carrete 2 se incrementa a la velocidad de 15,0 A/s, la fem en el carrete 1 es $2,5\cdot10^{-2}$ V. a) Determina su inductancia mutua. b) Cuando el carrete 2 no tiene corriente y el carrete 1 tiene una corriente de 3,60 A, ¿cuál es el flujo enlazado en el carrete 2?. [a) $M_{12}$ = 0,001666 H; b) $\Phi_{21}$ = 0,006 Wb]

**Respuesta**:

$$N_1\phi_1 = M_{12}I_2 \quad\Rightarrow\quad \varepsilon_{12} = -M_{12}\frac{dI_2}{dt}$$

$$M_{12} = -\frac{\varepsilon_{12}}{\frac{dI_2}{dt}} = -\frac{-0,025\,\text{V}}{15\,\frac{\text{A}}{\text{s}}} = 0,001666\,\text{H}$$

$$\Phi_{21} = N_2\phi_2 = M_{21}I_1 = 0,001666\,\text{H}\times3,60\,\text{A} = 0,006\,\text{Wb}$$

**10)** Dos carretes A y B tienen 200 y 800 vueltas. Una corriente de 2 A en el carrete A produce un flujo magnético de $1,8\cdot10^{-4}$ Wb en cada vuelta del carrete B. Calcula: a) el coeficiente de inducción mutua M; b) el flujo magnético a través del carrete A cuando hay una corriente de 4 A en el carrete B; c) la fem inducida en el carrete B cuando la corriente en el carrete A cambia desde 3 A hasta 1 A en 0,3 s. [a) 0,072 H; b) $1,44\cdot10^{-3}$ Wb; c) +0,48 V]

**Respuesta**:

$$\Phi_{BA} = N_B\phi_{BA} = M_{BA}I_A \quad \{M_{BA} = 0,072\,\text{H}$$

$$\Phi_{AB} = N_A\phi_{AB} = M_{AB}I_B \quad \{\Phi_{AB} = 1,44\cdot10^{-3}\,\text{Wb}$$

$$V_B = -M_{BA}\frac{dI_A}{dt} = 0,48\,\text{V}$$

**11)** Sean dos carretes, el carrete 1 tiene $N_1$ = 100 vueltas y de inductancia $L_1$ = 25 mH y el carrete 2 tiene $N_2$ = 200 vueltas y de inductancia $L_2$ = 40 mH. Los dos carretes están fijos y siendo el coeficiente de inductancia mutua $M_{12}$ = 3 mH. Si por el carrete 1 circula una corriente de $I_1$ = 6 mA que está variando a $di_1/dt$ = 4 A/s, determine: a) el flujo enlazante $\Phi_1$ en el carrete 1 y la fem autoinducida que aparece en él; b) el flujo enlazante $\Phi_{21}$ en el carrete 2 debido al carrete 1 y la fem inducida mutuamente. [a) $1,5\cdot 10^{-4}$ Wb y 0,1 V; b) $1,8\cdot 10^{-5}$ Wb y 0,012 V]

**Respuesta**:

$$\Phi_1 = N_1\phi_1 = L_1 I_1 = 0,025\,\mathrm{H}\times 0,006\,\mathrm{A} = 1,5\cdot 10^{-4}\,\mathrm{Wb}$$

$$\varepsilon_{L_1} = -L\frac{di_1}{dt} = -0,025\,\mathrm{H}\times 4\,\tfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}} = -0,1\,\mathrm{V}$$

$$\Phi_{21} = N_2\phi_{21} = M_{21} I_1 = 0,003\,\mathrm{H}\times 0,006\,\mathrm{A} = 1,8\cdot 10^{-5}\,\mathrm{Wb}$$

$$\varepsilon_{M_2} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -N_2\frac{d\phi_{21}}{dt} = -M_{21}\frac{di_1}{dt} = -0,003\,\mathrm{H}\times 4\,\tfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}} = -0,012\,\mathrm{V}$$

**12)** Una espira cuadrada de 10 cm de lado, inicialmente horizontal, gira a 1.200 rev/min, en torno a uno de sus lados, en un campo magnético uniforme de 0,2 T de dirección vertical. a) Calcule el valor máximo de la fuerza electromotriz inducida en la espira y represente, en función del tiempo, el flujo magnético a través de la espira y la fuerza electromotriz inducida. b) ¿Cómo se modificará la fuerza electromotriz inducida en la espira si se redujera la velocidad de rotación a la mitad?, ¿y si se invirtiera el sentido del campo magnético?. [a) 0,251 V; b) bajando a la mitad y cambiando el sentido de la corriente]

**Respuesta**:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\vec{B}\cdot\vec{S}\right) = -\frac{d}{dt}\left(BS\cos\alpha\right) = -\frac{d}{dt}\left(BS\cos\omega t\right) = \omega BS\,\mathrm{sen}\,\omega t = \varepsilon_m\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

$$\left\{\begin{array}{l}\omega = 1.200\times\dfrac{2\pi\,\mathrm{rad}}{60\,\mathrm{s}} = 40\pi\,\tfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\\ \varepsilon_m = \omega BS = 40\pi\,\tfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\times 0,2\,\mathrm{T}\times\left(0,10\,\mathrm{m}\right)^2 = 0,08\pi\,\mathrm{V} = 0,251\,\mathrm{V}\end{array}\right\}\quad\left\{\begin{array}{l}\varepsilon = \varepsilon_m\,\mathrm{sen}\,\omega t\\ \varepsilon = 0,251\,\mathrm{sen}\left(40\pi t\right)\end{array}\right.$$

$$\varepsilon = 0,251\,\mathrm{sen}\left(40\pi t\right)$$

$$\left\{\varepsilon = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{sen}\left(40\pi t\right) = 0 \;\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}40\pi t = n\pi\\ t = \dfrac{n}{40}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{t_{n=1} = \frac{1}{40}\,\mathrm{s} = 0,025\,\mathrm{s}\right\}\right\}$$

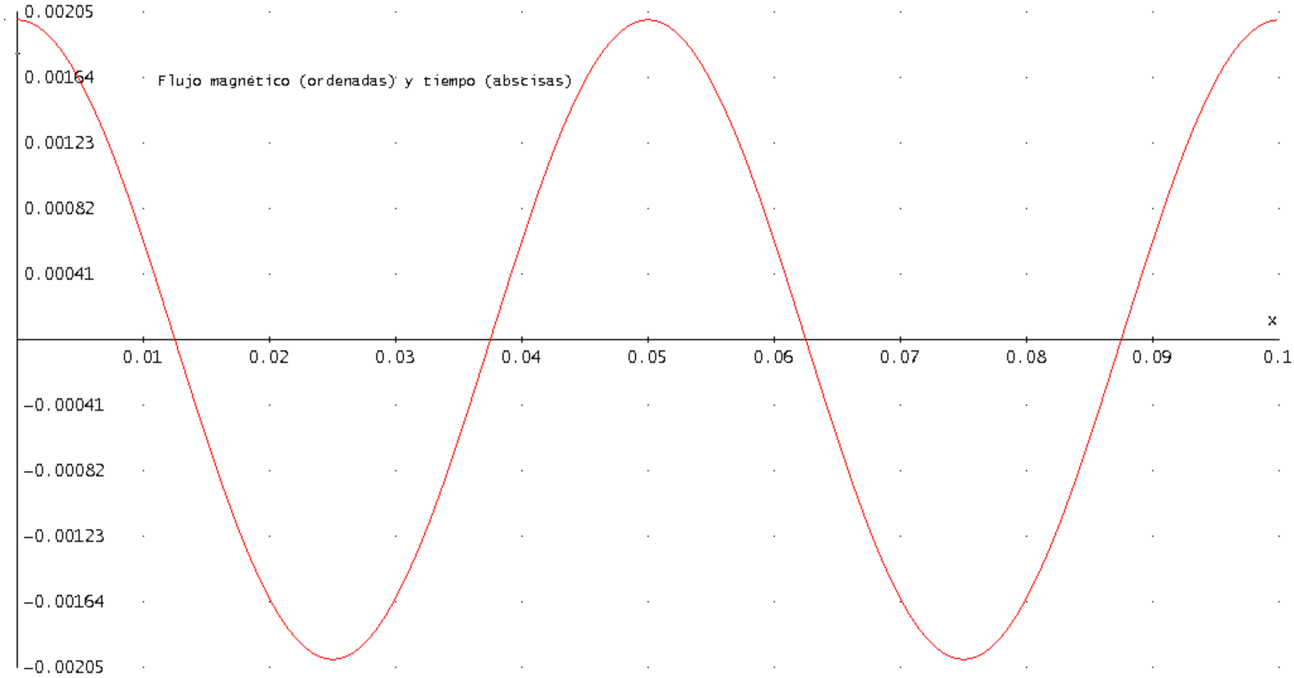
$$\left\{\varepsilon = \pm 0,251\,\mathrm{V} \;\Rightarrow\; \mathrm{sen}\left(40\pi t\right) = \pm 1 \;\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}40\pi t = \left(2n+1\right)\frac{\pi}{2}\\ t = \dfrac{2n+1}{80}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{t_{n=0} = \frac{1}{80} = 0,0125\,\mathrm{s}\right\}\right\}$$

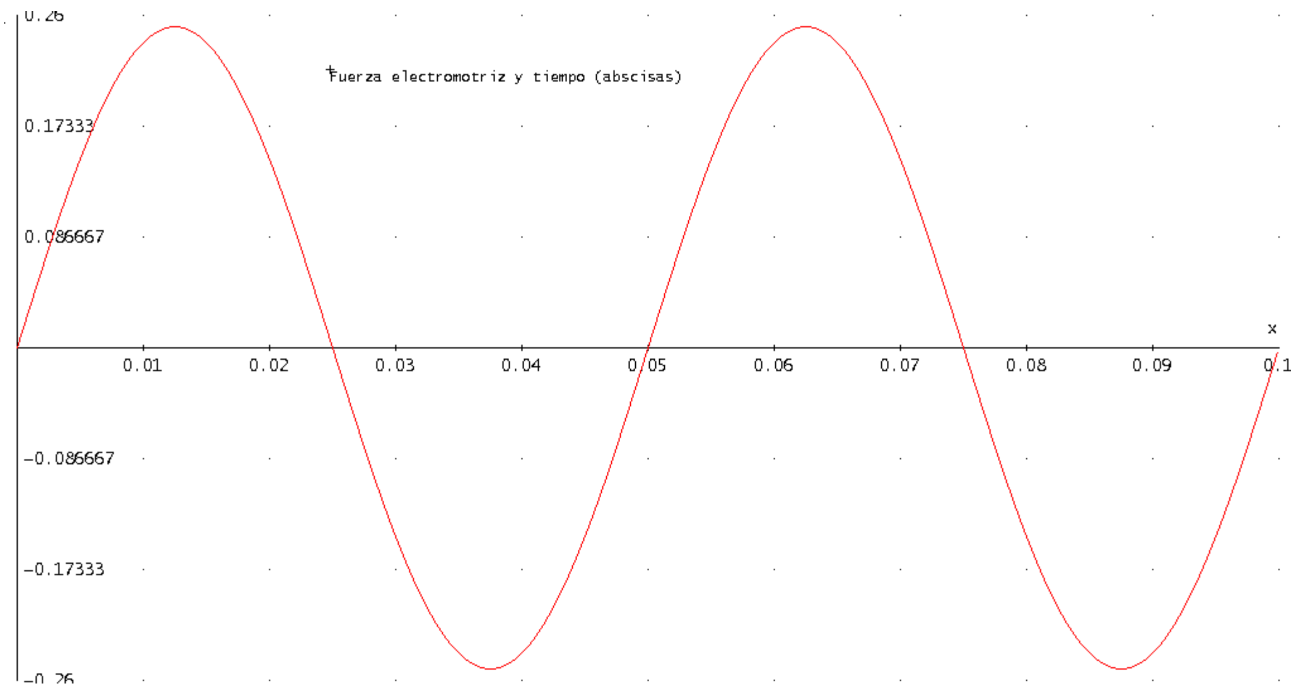
$$\phi = BS\cos\omega t = 0,002\cos\left(40\pi t\right)$$

$$\left\{\phi = 0 \;\Rightarrow\; \cos\left(40\pi t\right) = 0 \;\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}40\pi t = \left(2n+1\right)\frac{\pi}{2}\\ t = \dfrac{2n+1}{80}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{t_{n=0} = \frac{1}{80} = 0,0125\,\mathrm{s}\right\}\right\}$$

$$\left\{\phi = \pm 0,002\,\mathrm{Wb} \;\Rightarrow\; \cos\left(40\pi t\right) = \pm 1 \;\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}40\pi t = n\pi\\ t = \dfrac{n}{40}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{t_{n=1} = \frac{1}{40} = 0,025\,\mathrm{s}\right\}\right\}$$

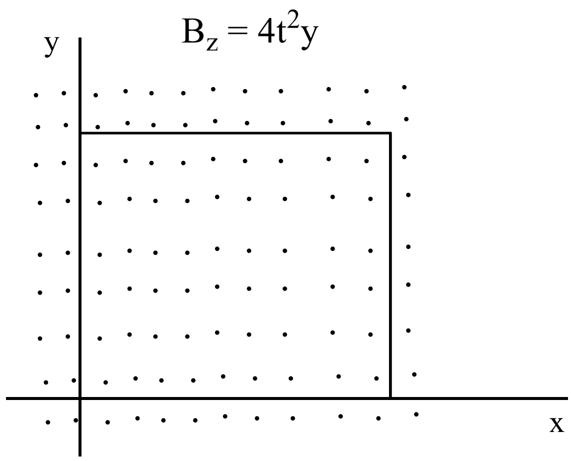
$$\varepsilon' = \omega' BS \operatorname{sen} \omega' t = \frac{\omega}{2} BS \operatorname{sen} \frac{\omega}{2} t = 0{,}125\,\mathrm{V} \operatorname{sen}(20\pi t)$$
$$\varepsilon'' = \omega B'' S \operatorname{sen} \omega t = -\omega BS \operatorname{sen} \omega t = -0{,}251\,\mathrm{V} \operatorname{sen}(40\pi t)$$



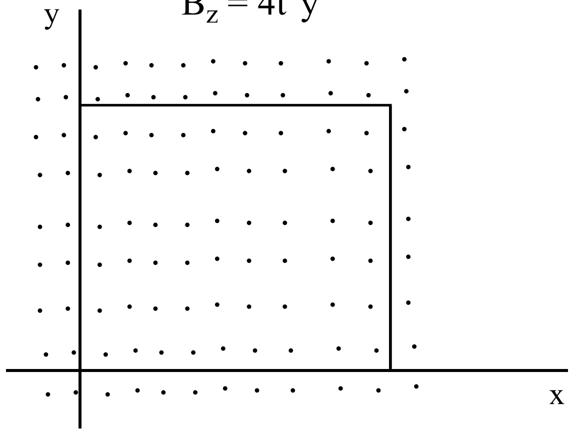




**13)** Razone si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones: a) la fuerza electromotriz inducida en una espira es proporcional al flujo magnético que la atraviesa; b) un transformador eléctrico no puede utilizarse con corriente continua.

**14)** Sea un circuito cuadrado de alambre, de lado 2,0 cm y de resistencia eléctrica 0,02 Ω. Un campo magnético, perpendicular al plano XY y de sentido hacia el eje Z (hacia fuera de la página) tiene una magnitud dada por la expresión: $B = 4 \cdot t^2 \cdot y$, donde B está en teslas, t en segundos, y en metros. Determine: a) la magnitud de la fuerza electromotriz inducida en el circuito al tiempo t = 2,5 s; b) el valor de la intensidad de corriente inducida. [a) 80 μV; b) $I_{indu}$ = 4 mA en el sentido de las agujas del reloj]




**Respuesta**:




$$\begin{cases} \vec{B} = 4t^2y\,\vec{k} \\ d\vec{S} = xdy\,\vec{k} = 0,02 \cdot dy\,\vec{k} \end{cases}$$

$$\Phi_m = \int_0^y \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_0^y \left(4 \cdot t^2 \cdot y\right) \cdot \left(0,02 \cdot dy\right) = \int_0^y 0,08t^2ydy = 0,08t^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^y = 0,04t^2y^2$$

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(0,04t^2y^2\right) = -0,08ty^2 = -0,08 \times 2,5 \times 0,02^2 = -0,00008\,\text{V} = -8,0 \cdot 10^{-5}\,\text{V}$$

$$I_{ind} = \frac{\varepsilon_{ind}}{R} = \frac{8,0 \cdot 10^{-5}\,\text{V}}{2,0 \cdot 10^{-2}\,\Omega} = 0,004\,\text{A}$$

La dirección de la fem inducida es aquella que genera una intensidad y un campo magnético inducido $B_{inducido}$ que se opone a la variación del flujo magnético. Como el flujo magnético aumenta hacia el exterior de la página el campo magnético inducido $B_{inducido}$ se dirigirá hacia dentro y, aplicando la regla de la mano derecha, la intensidad en el sentido de las agujas del reloj.

**15)** Cuando una espira circular, situada en un campo magnético uniforme de 2 T, gira con velocidad angular constante en torno a uno de sus diámetros perpendicular al campo, la fuerza electromotriz inducida es: ε (t) = 10·sen (20·t) (S.I.). a) Deduzca la expresión de la f.e.m. inducida en una espira que gira en las condiciones descritas y calcule el diámetro de la espira y su periodo de revolución. b) Explique cómo variarían el periodo de revolución y la f.e.m. si la velocidad angular fuese la mitad. [a) T = 0,314 s; D = 0,564 m; b) T' = 2·T; ε' (t) = 5·sen (10·t) (S.I.)]

**Respuesta**:

$$\varepsilon = 10 \cdot \text{sen}(20t) \quad \begin{cases} \phi_m = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS\cos(\omega t) \\ \varepsilon = -\dfrac{d\phi_m}{dt} = -\dfrac{d}{dt}\left[BS\cos(\omega t)\right] = BS\omega\,\text{sen}(\omega t) = \varepsilon_m\,\text{sen}(\omega t) \end{cases}$$

$$\omega = 20\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad T = 0{,}1\pi\,\text{s} = 0{,}314\,\text{s}$$

$$\varepsilon_m = BS\omega = 10\,\text{V} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{\varepsilon_m}{B\omega} = \frac{10\,\text{V}}{2\,\text{T} \times 20\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}}} = 0{,}25\,\text{m}^2$$

$$S = 0{,}25\,\text{m}^2 = \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad D = 2r = 2 \times \sqrt{\frac{0{,}25\,\text{m}^2}{\pi}} = 0{,}564\,\text{m}$$

$$\omega' = \frac{1}{2}\omega = 10\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{2\pi}{T'} \quad \Rightarrow \quad T' = 2T = 0{,}2\pi\,\text{s} = 0{,}628\,\text{s}$$

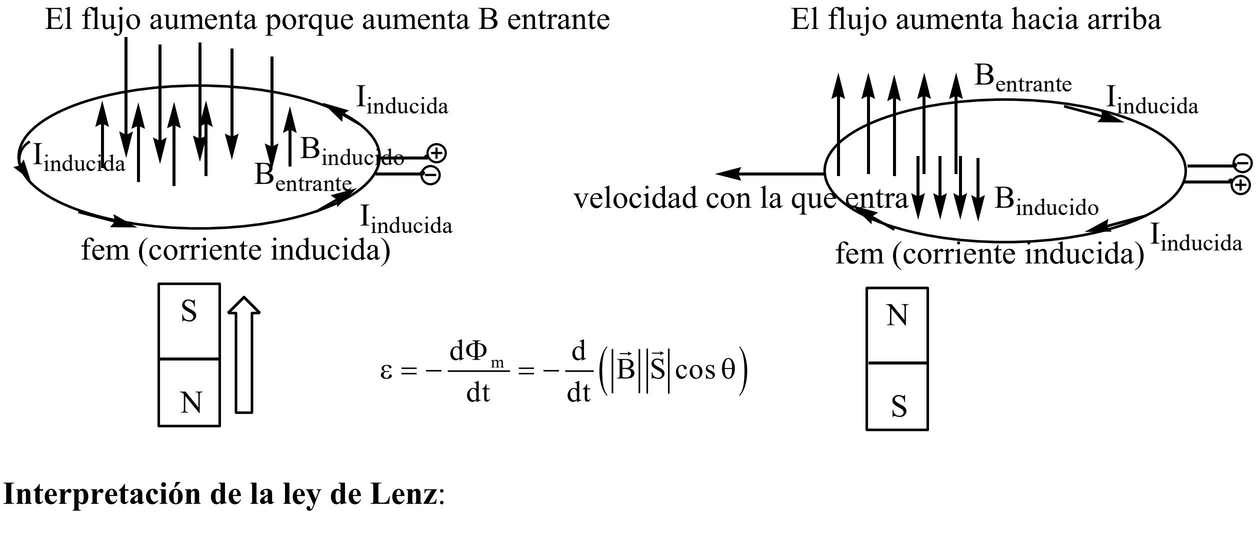
$$\varepsilon' = -\frac{d\phi'_m}{dt} = -\frac{d}{dt}\left[BS\cos(\omega' t)\right] = BS\omega'\,\text{sen}(\omega' t) = \varepsilon_m\,\text{sen}(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon' = 5\,\text{sen}(10t)$$

**16)** Justifique razonadamente, con la ayuda de un esquema, el sentido de la corriente inducida en una espira en cada uno de los siguientes supuestos: a) la espira está en reposo y se le acerca, perpendicularmente al plano de la misma, un imán por su polo sur; b) la espira está penetrando en una región en la que existe un campo magnético uniforme, vertical y hacia arriba, manteniéndose la espira horizontal.

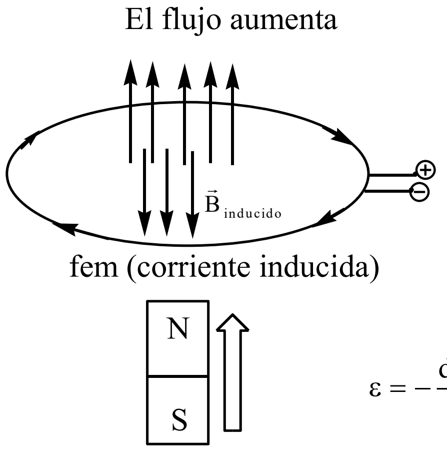
**Respuesta**:

Enunciado de la ley de Lenz: «*Una corriente inducida tiene una dirección de tal forma que el campo magnético debido a la corriente se opone al cambio en el flujo magnético que induce la corriente*».

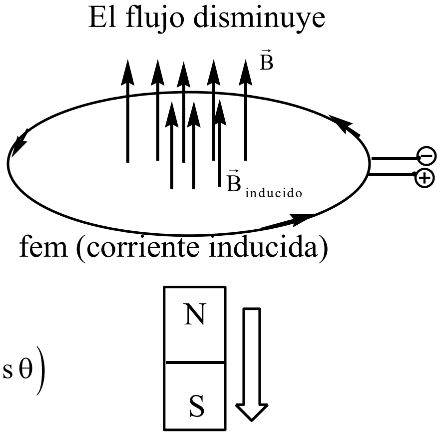
La ley de Lenz se refiere a *corrientes* inducidas y no a fem inducidas, lo que significa que sólo la podemos aplicar directamente a conductores cerrados, formando una malla.



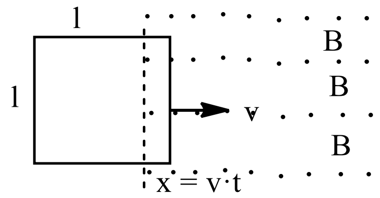

**Interpretación de la ley de Lenz**:



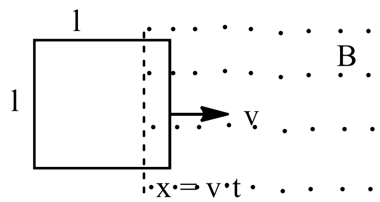

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\left|\vec{B}\right|\left|\vec{S}\right|\cos\theta\right)$$



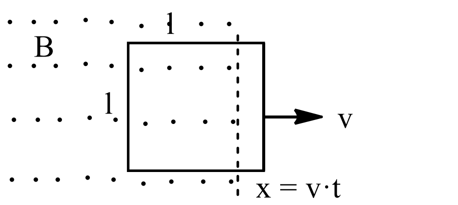

**17)** Una espira cuadrada, de 30 cm de lado, se mueve con una velocidad constante de 10 m/s y penetra en un campo magnético de 0,05 T perpendicular al plano de la espira. a) Explique, razonadamente, qué ocurre en la espira desde que comienza a entrar en la región del campo hasta que toda ella está en el interior del campo. ¿Qué ocurriría si la espira, una vez en el interior del campo, saliera del mismo?. b) Calcule la fuerza electromotriz inducida en la espira mientras está entrando en el campo. [a) Aumenta el flujo magnético por la espira y produce una fem inducida; si sale disminuye el flujo magnético y produce una fem inducida en sentido contrario; b) -0,15 V]




**Respuesta**:




S = l·x = l·v·t




$S = l\cdot(l - x) = l\cdot(l - vt) = l^2 - l\cdot v\cdot t$

La dirección de la fem inducida es aquella que genera una intensidad $I_{inducida}$ y un campo magnético inducido $B_{inducido}$ que se opone a la variación del flujo magnético.

Desde que comienza a entrar en el campo magnético B el flujo magnético aumenta hacia el exterior de la página y el campo magnético inducido $B_{inducido}$ se dirigirá hacia dentro de la página, y aplicando la regla de la mano derecha, la intensidad $I_{inducida}$ en el sentido de las agujas del reloj.

$$S = l\cdot x = l\cdot v\cdot t$$

$$\phi_m = \vec{B}\cdot\vec{S} = B\cdot S\cdot\cos 0^{o} = B\cdot l\cdot v\cdot t$$

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(B\cdot l\cdot v\cdot t\right) = -B\cdot l\cdot v = -0{,}05\,\text{T}\times 0{,}30\,\text{m}\times 10\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} = -0{,}15\,\tfrac{\text{T}\cdot\text{m}^2}{\text{s}} = -0{,}15\,\text{V}$$

Cuando empieza a salir del campo magnético B el flujo magnético disminuye hacia el exterior de la página y el campo magnético inducido $B_{inducido}$ se dirigirá hacia el exterior de la página, y aplicando la regla de la mano derecha, la intensidad $I_{inducida}$ en el sentido contrario de las agujas del reloj.

$$S = l \cdot (l - x) = l \cdot (l - x) = l^2 - l \cdot x = l^2 - l \cdot v \cdot t$$

$$\phi_m = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos 0^o = B \cdot \left(l^2 - l \cdot v \cdot t\right) = B \cdot l^2 - B \cdot l \cdot v \cdot t$$

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(B \cdot l^2 - B \cdot l \cdot v \cdot t\right) = 0 + B \cdot l \cdot v = 0{,}05\,T \times 0{,}30\,m \times 10\,\tfrac{m}{s} = -0{,}15\,V$$