Problemas resueltos de «Interacción Gravitatoria»

$G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ N\cdot m^2/kg^2$; $R_T = 6{,}37\cdot 10^6$ m; $M_T = 5{,}98\cdot 10^{24}$ kg; $g_{0(reposo)} = 9{,}83\ m/s^2 = G\cdot M_T/(R_T)^2$.

1) Calcula: a) la altura sobre la superficie terrestre a la que el valor de g se ha reducido a la mitad; b) el potencial gravitatorio terrestre en un punto situado a 6.370 km de distancia de la Tierra. [a) 2.638 km; b) U = $-3{,}12\cdot 10^7$ J/kg]

Respuesta:

$$\begin{Bmatrix} g_0 = -G\dfrac{M_T}{R_T^2} \\ g = -G\dfrac{M_T}{r^2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} g = \dfrac{1}{2}g_0 \\ -G\dfrac{M_T}{r^2} = -\dfrac{1}{2}G\dfrac{M_T}{R_T^2} \end{Bmatrix} \begin{cases} r^2 = 2R_T^2 \quad \Rightarrow \quad r = R_T + h = \sqrt{2}R_T \\ h = \sqrt{2}R_T - R_T = \left(\sqrt{2}-1\right)R_T = 0{,}414R_T = 2.638\,\text{km} \end{cases}$$

$$U = -G\frac{M_T}{r} = -G\frac{M_T}{R_T+h} = -\frac{g_0R_T^2}{R_T+h} = -\frac{9{,}8\,\frac{m}{s^2}\times\left(6{,}37\cdot 10^6\,m\right)^2}{6{,}37\cdot 10^6\,m + 6{,}37\cdot 10^6\,m} = -3{,}12\cdot 10^7\,\frac{J}{kg}$$

2) Una masa puntual de 8 kg está situada en el punto (0; 0). Calcular: a) punto del eje OY en el que habría que colocar otra masa puntual de 6 kg para que una partícula libre, de 2 kg, se encuentre en reposo en el punto (0;2) m; b) energía potencial gravitatoria de la partícula libre. [a) $(0;2+(3)^{½})$ m ; b) $-9{,}96\cdot 10^{-10}$ J]

Respuesta:

Para que la partícula libre (2 kg) se encuentre en reposo la fuerza neta ejercida sobre ella, por las otras dos masas (de 8 y 6 kg) ha de ser cero. Por lo que la partícula libre ha de estar en medio de las otras dos, siendo iguales las fuerzas, en módulo, ejercidas por cada masa sobre la libre.

$$\begin{Bmatrix} F_{28} = G\dfrac{m_2m_8}{r_{28}^2} \\ F_{26} = G\dfrac{m_2m_6}{r_{26}^2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{28} = F_{26} \\ G\dfrac{m_2m_8}{r_{28}^2} = G\dfrac{m_2m_6}{r_{26}^2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{m_2m_8}{r_{28}^2} = \dfrac{m_2m_6}{r_{26}^2} \\ \dfrac{16}{2^2} = \dfrac{12}{r_{26}^2} \end{Bmatrix} \begin{cases} r_{26} = \sqrt{3}\,m \\ P_6\left(0;2+\sqrt{3}\,m\right) \end{cases}$$

$$E_{p(2)} = -G\frac{m_2m_8}{r_{28}} - G\frac{m_2m_6}{r_{26}}$$

$$E_{p(2)} = -6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{N\,m^2}{kg^2}\times\frac{2\,kg\times 8\,kg}{2\,m} - 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{N\,m^2}{kg^2}\times\frac{2\,kg\times 6\,kg}{\sqrt{3}\,m}$$

$$E_{p(2)} = -5{,}336\cdot 10^{-10}\,J - 4{,}621\cdot 10^{-10}\,J = -9{,}957\cdot 10^{-10}\,J$$

3) Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba desde la superficie terrestre con una velocidad de 1.000 m/s. a) Calcular la altura máxima que alcanzará; b) repetir el cálculo despreciando la variación de g con la altura y comparar el resultado con el del apartado anterior. [a) 51.274,7 m ; b) 51.020,4 m]

Respuesta:

$$E_{m(1)} = E_{m(2)} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{M_T m}{R_T} = \frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{M_T m}{R_T + h} = 0 - G\frac{M_T m}{R_T + h}$$

$$\frac{1}{2}v_1^2 - \frac{GM_T}{R_T} = \frac{-GM_T}{R_T + h} \Rightarrow h = \frac{-GM_T}{\frac{1}{2}v_1^2 - \frac{GM_T}{R_T}} - R_T = \frac{-6,67\cdot 10^{-11}\times 5,98\cdot 10^{24}}{\frac{1}{2}\times 1.000^2 - \frac{6,67\cdot 10^{-11}\times 5,98\cdot 10^{24}}{6,37\cdot 10^6}} - 6,37\cdot 10^6 = 51.274,7\,\text{m}$$

$$E_{m(1)} = E_{m(2)} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 + mg_0h_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mg_0h_2 = 0 + mg_0h_2$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mg_0h_2 - mg_0h_1 = mg_0\Delta h \Rightarrow \Delta h = \frac{\frac{1}{2}mv_1^2}{mg_0} = \frac{\frac{1}{2}v_1^2}{g_0} = \frac{\frac{1}{2}\times 1.000^2}{9,8} = 51.020,4\,\text{m}$$

4) Determine: a) la velocidad de escape de un cohete desde la superficie de la Tierra; b) la velocidad con la que debemos lanzar un proyectil desde la superficie de la Tierra, si queremos que a 400 km tenga una velocidad de 500 m/s. [a) 40.286 km/h = 11.191 m/s; b) 11.016,5 km/h = 3.060 m/s]

Respuesta:

Para que un satélite se escape de la superficie de la Tierra hemos de conseguir llevarlo a una distancia en la que, al menos, su energía mecánica total sea cero, es decir, que al final se pare y no tenga energía cinética y que tampoco tenga energía potencial. Por lo que si aplicamos el principio de conservación de la energía su energía mecánica en la superficie de la Tierra debe ser también cero. Por tanto, la velocidad de escape de la superficie de la Tierra se calcula de la siguiente forma:

$$E_{m(r\to\infty)} = 0 = E_{m(r=R_T)} = 0 = \frac{1}{2}mv_{escape}^2 - G\frac{M_T m}{R_T}$$

$$v_{escape}^2 = 2G\frac{M_T}{R_T} = 2\times 6,67\cdot 10^{-11}\,\tfrac{N\cdot m^2}{kg^2}\times\frac{5,98\cdot 10^{24}\,\text{kg}}{6,37\cdot 10^6\,\text{m}} = 125.232.653,1\,\tfrac{m^2}{s^2}$$

$$v_{escape} = \sqrt{2G\frac{M_T}{R_T}} = 11.191\,\tfrac{m}{s} = 40.286,6\,\tfrac{km}{h}$$

$$\begin{Bmatrix} W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(g)} \\ \Delta E_c + \Delta E_{p(g)} = 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \left(E_c + E_{p(g)}\right)_{r=R_T} = \left(E_c + E_{p(g)}\right)_r \\ E_{m(1)} = E_{m(2)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{M_T m}{R_T} = \frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{M_T m}{R_T + h} \\ \frac{1}{2}v_1^2 - G\frac{M_T}{R_T} = \frac{1}{2}v_2^2 - G\frac{M_T}{R_T + h} \end{Bmatrix} \quad v_1^2 = 2G\frac{M_T}{R_T} + v_2^2 - 2G\frac{M_T}{R_T + h}$$

$$v_1^2 = 2\times 6,67\cdot 10^{-11}\,\tfrac{N\cdot m^2}{kg^2}\times\frac{5,98\cdot 10^{24}\,\text{kg}}{6,37\cdot 10^6\,\text{m}} + 500^2\,\tfrac{m^2}{s^2} - 2\times 6,67\cdot 10^{-11}\,\tfrac{N\cdot m^2}{kg^2}\times\frac{5,98\cdot 10^{24}\,\text{kg}}{\left(6,37\cdot 10^6 + 5,0\cdot 10^5\right)\text{m}} = 9.364.458,049\,\tfrac{m^2}{s^2}$$

$$v_1 = 3.060,1\,\tfrac{m}{s} = 11.016,5\,\tfrac{km}{h}$$

5) Calcula: a) el trabajo que hay que realizar para trasladar un cuerpo de 20 kg desde la superficie terrestre hasta una altura igual al radio de la Tierra; b) velocidad con que habría que lanzarlo para que alcanzara dicha altura. [a) $6,26\cdot 10^8$ J; b) 28.487 km/h = 7.913 m/s]

Respuesta:

$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(g)} + W_{motor}$$

$$W_{motor} = \Delta E_c + \Delta E_{p(g)} = \Delta E_m = E_{m(r)} - E_{m(R_T)}$$

$$\begin{cases} \Delta E_c = 0 - \dfrac{1}{2} m v_{Tierra}^2 = 0 - \dfrac{1}{2} \times 20\,\text{kg} \times \left(463{,}24\,\tfrac{m}{s}\right)_{r=R_T}^2 = -2{,}146 \cdot 10^6\ \text{J} \\ \Delta E_{p(g)} = -G\dfrac{M_T m}{r} + G\dfrac{M_T m}{R_T} = -G\dfrac{M_T m}{2R_T} + G\dfrac{M_T m}{R_T} = \dfrac{1}{2} G \dfrac{M_T m}{R_T} = 6{,}26 \cdot 10^8\ \text{J} \end{cases}$$

$$\Delta E_{p(g)} = \frac{1}{2} \times 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \tfrac{N \cdot m^2}{kg^2} \times \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \times 20\,\text{kg}}{6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m}} = 6{,}26 \cdot 10^8\ \text{J}$$

$$W_{motor} = \Delta E_c + \Delta E_{p(g)} = \Delta E_m = E_{m(r)} - E_{m(R_T)} = \left(0 - G\frac{M_T m}{r}\right) - \left(\frac{1}{2} m v_{Tierra}^2 - G\frac{M_T m}{R_T}\right)$$

$$W_{motor} = \left(-G\frac{M_T m}{2R_T}\right) - \left(\frac{1}{2} m v_{Tierra}^2 - G\frac{M_T m}{R_T}\right) = \frac{1}{2} G \frac{M_T m}{R_T} - \frac{1}{2} m v_{Tierra}^2$$

$$W_{motor} = \Delta E_c + \Delta E_{p(g)} = -2{,}146 \cdot 10^6\ \text{J} + 6{,}26 \cdot 10^8\ \text{J} = 6{,}24 \cdot 10^8\ \text{J} \approx 6{,}26 \cdot 10^8\ \text{J}$$

$$\left\{ \frac{\Delta E_{c(R_T \to r)}}{\Delta E_{p(g)(R_T \to r)}} = \frac{2{,}146 \cdot 10^6\ \text{J}}{6{,}26 \cdot 10^8\ \text{J}} = 0{,}0034 \right.$$

El valor del cambio en la energía cinética del objeto de 20 kg es un 0,34% del valor del cambio en su energía potencial gravitatoria. Por lo que el cambio en la energía cinética se puede despreciar.

$$E_{m(R_T)} = E_{m(r)} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} m v_1^2 - G\frac{M_T m}{R_T} = \frac{1}{2} m v_2^2 - G\frac{M_T m}{r} = 0 - G\frac{M_T m}{2R_T}$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = 0 - G\frac{M_T m}{2R_T} + G\frac{M_T m}{R_T} = \frac{1}{2} G \frac{M_T m}{R_T}$$

$$v_1^2 = G\frac{M_T}{R_T} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \tfrac{N \cdot m^2}{kg^2} \times \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m}} = 62.616.326{,}53\ \tfrac{m^2}{s^2}$$

$$v_1 = \sqrt{G\frac{M_T}{R_T}} = 7.913\ \tfrac{m}{s} = 28.487\ \tfrac{km}{h}$$

6) Un satélite artificial describe una órbita circular a una altura igual a tres radios terrestres sobre la superficie de la Tierra. Calcula: a) la velocidad orbital del satélite; b) la aceleración del mismo. [a) 3.956,5 m/s = 14.243,5 km/h; b) 0,61 m/s^2]

Respuesta:

$$\vec{F}_g = \vec{F}_c \quad \Rightarrow \quad m\vec{g} = m\vec{a}_c \quad \Rightarrow \quad G\frac{M_T m}{r^2} = m\frac{v_{orb}^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v_{orb}^2 = G\frac{M_T}{r}$$

$$v_{orb} = \sqrt{G\frac{M_T}{(R_T + h)}} = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + 3R_T}} = \sqrt{\frac{GM_T}{4R_T}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \times 5{,}98 \cdot 10^{24}}{4 \times 6{,}37 \cdot 10^6}} = 3.956{,}5\ \tfrac{m}{s} = 14.243{,}5\ \tfrac{km}{h}$$

$$a_c = g = \frac{v_{orb}^2}{r} = G\frac{M_T}{r^2} = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2} = \frac{GM_T}{(4R_T)^2} = \frac{1}{4^2}\frac{GM_T}{R_T^2} = \frac{g_0}{16} = 0{,}61\ \tfrac{m}{s^2}$$

7) Un satélite se encuentra girando en la órbita geoestacionaria ($T_{sideral}$ = 23:56:04 h = 86.164 s). Calcule el radio de la órbita y la velocidad del satélite. [r = 42.173,5 km; v_{orb} = 11.071 km/h]

Respuesta:

$$\vec{F}_g = \vec{F}_c \quad \Rightarrow \quad m\vec{g} = m\vec{a}_c \quad \Rightarrow \quad g = a_c \quad \Rightarrow \quad \frac{GM_T}{r^2} = \frac{v_{orb}^2}{r} = \omega^2 \cdot r = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r$$

$$v_{orb}^2 = \frac{GM_T}{r} \quad \Rightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T} \cdot r^3$$

$$r^3 = \frac{GM_T}{4\pi^2} \cdot T^2 = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \, \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \times 5,98 \cdot 10^{24} \, kg}{4\pi^2} \times (86.164 \, s)^2 = 7,501 \cdot 10^{22} \, m^3$$

$$r = 42.173.501,64 \, m = 42.173,5 \, km \quad \Rightarrow \quad h = r - R_T = 42.250,474 \, km - 6.370 \, km = 35.803,5 \, km$$

$$v_{orb} = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \, \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \times 5,98 \cdot 10^{24} \, kg}{42.173.501,64 \, m}} = 3.075,3 \, \tfrac{m}{s} = 11.071 \, \tfrac{km}{h}$$

8) Calcula la velocidad de escape para un cuerpo situado: a) en la superficie terrestre; b) a una altura de 2.000 km sobre dicha superficie. [a) 40.286 km/h; b) 35.145 km/h]

Respuesta:

$$\begin{cases} E_{m(r\to\infty)} = 0 = E_{m(r=R_T)} = \frac{1}{2} m v_{esc}^2 - G\frac{M_T m}{R_T} \\ v_{escape} = \sqrt{2G\frac{M_T}{R_T}} = \sqrt{2 \times 6,67 \cdot 10^{-11} \, \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \times \frac{5,98 \cdot 10^{24} \, kg}{6,37 \cdot 10^6 \, m}} = 11.191 \, \frac{m}{s} = 40.286,6 \, \frac{km}{h} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_{m(f)} = 0 = E_{m(i)} = \frac{1}{2} m v_{esc}^2 - G\frac{M_T m}{r} \\ v_{escape} = \sqrt{2G\frac{M_T}{r}} = \sqrt{2 \times 6,67 \cdot 10^{-11} \, \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \times \frac{5,98 \cdot 10^{24} \, kg}{(6,37 \cdot 10^6 \, m + 2,0 \cdot 10^6 \, m)}} = 9.762,6 \, \frac{m}{s} = 35.145,4 \, \frac{km}{h} \end{cases}$$

9) Un objeto que pesa 686 N, en la superficie de la Tierra, se encuentra en la superficie de un planeta cuyo radio es el doble del terrestre y cuya masa es 8 veces la de la Tierra. Calcule: a) el peso del objeto en dicho lugar; b) el tiempo de caída desde una altura de 20 m sobre la superficie del planeta. [a) 1.372 N; b) 1,430 s]

Respuesta:

$$\left\{ \begin{aligned} & P = 686 \, N = m g_0 \\ & P = F_g = G\frac{M_T m}{R_T^2} = m g_0 \end{aligned} \right\}$$

$$P' = mg' = mG\frac{M'}{R'^2} = mG\frac{8M_T}{(2R_T)^2} = mG\frac{8M_T}{4R_T^2} = m2G\frac{M_T}{R_T^2} = m2g_0 = 2 \cdot P = 2 \times 686 \, N = 1.372 \, N$$

$$g' = 2g_0 = 2 \times 9,8 \, \tfrac{m}{s^2} = 19,6 \, \tfrac{m}{s^2}$$

$$\Delta y = v_0 t - \tfrac{1}{2} g' t^2 = 0 - \tfrac{1}{2} g' t^2 \quad \Rightarrow \quad t' = \sqrt{\frac{2\Delta y}{-g'}} = \sqrt{\frac{2 \times (-20 \, m)}{-19,6 \, \frac{m}{s^2}}} = 1,430 \, s$$

10) Determina el valor de la intensidad del campo gravitatorio en el punto medio del interior de la Tierra. Posteriormente, determina la velocidad con la que llegaría un objeto, de 10 kg, al centro de la Tierra; si cae por un agujero desde la superficie. [g_{int} = -4,9 m/s^2; 7.901 m/s].

Respuesta:

Consideremos una esfera imaginaria de radio r. Siendo r la distancia desde el centro de masas de M hasta el punto interior, y siendo m la masa que hay dentro de la esfera imaginaria. El flujo a través de la esfera imaginaria vendrá dado por el teorema de Gauss

$$\Phi = \vec{g}\cdot\vec{S} = \vec{g}\cdot 4\pi r^2 \vec{u}_r = -4\pi G m \quad\Rightarrow\quad \boxed{\vec{g}_i = -G\frac{m}{r^2}\vec{u}_r}$$

Si la esfera es homogénea su densidad permanece constante:

$$\left\{\begin{aligned} \rho &= \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3} \\ m &= M_T\frac{r^3}{R_T^3} \end{aligned}\right\} \quad \vec{g}_i = -G\frac{m}{r^2}\vec{u}_r = -G\frac{M_T\frac{r^3}{R_T^3}}{r^2}\vec{u}_r = -G\frac{M_T r}{R_T^3}\vec{u}_r$$

$$\left\{\begin{aligned} r &= \frac{1}{2}R_T \\ m &= M_T\frac{\left(\frac{1}{2}R_T\right)^3}{R_T^3} = \frac{1}{8}M_T \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad g_i = -G\frac{M_T}{R_T^3}r = -G\frac{M_T}{R_T^3}\frac{1}{2}R_T = -\frac{1}{2}G\frac{M_T}{R_T^2} = -\frac{1}{2}\cdot 9{,}8\,\tfrac{m}{s^2} = -4{,}9\,\tfrac{m}{s^2}$$

El campo gravitatorio en el interior de la masa M es directamente proporcional a la distancia desde su centro de masas. Si se considera la Tierra homogénea, de masa M_T, y dejamos caer un cuerpo, de masa m, hacia su centro de la Tierra. La velocidad con la que llega será calculada de la siguiente forma, si $v_i = 0$; $r_1 = R_T$; $r_2 = 0$

$$W_i^f = \Delta E_c = -\Delta E_p \quad \left\{\begin{aligned} r_i &= R_T \\ r_f &= 0 \end{aligned}\right\} \quad W_{R_T}^0 = \int_{R_T}^{0} m\vec{g}_i\cdot d\vec{r} = \int_{R_T}^{0} -mG\frac{M_T r}{R_T^3}\vec{u}_r\cdot d\vec{r} = -mG\frac{M_T}{R_T^3}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{R_T}^{0}$$

$$W_{R_T}^0 = -mG\frac{M_T}{R_T^3}\left[0-\frac{R_T^2}{2}\right] = \frac{1}{2}G\frac{M_T m}{R_T} = \Delta E_c = \frac{1}{2}mv_f^2 \quad\Rightarrow\quad v_f = \sqrt{G\frac{M_T}{R_T}} = \sqrt{g_0 R_T} = 7.901{,}0\,\tfrac{m}{s}$$

11) Se desea situar un satélite artificial, de 50 kg de masa, en una órbita circular situada en el plano del ecuador y con un radio igual al doble del radio terrestre. Calcule: a) la energía que hay que comunicar al satélite; b) la velocidad orbital del mismo; c) la energía adicional que habría que aportar al satélite en órbita para que escape de la acción del campo gravitatorio terrestre; d) la velocidad de escape desde la órbita. [a) $2{,}35\cdot 10^9$ J; b) 5.595 m/s = 20.143 km/h; c) $7{,}827\cdot 10^8$ J; d) 7.913 m/s]

Respuesta:

$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(g)} + W_{motor} \quad\Rightarrow\quad W_{motor} = \Delta E_c + \Delta E_{p(g)} = E_{m(r=2\cdot R_T)} - E_{m(r=R_T)}$$

$$W_{motor} = E_{m(r=2\cdot R_T)} - E_{m(r=R_T)} = \left(\frac{1}{2}mv_{orb}^2 - G\frac{M_T m}{r}\right) - \left(\frac{1}{2}mv_{Tierra}^2 - G\frac{M_T m}{R_T}\right)$$

$$\vec{F}_g = \vec{F}_c \quad\Rightarrow\quad G\frac{M_T m}{r^2} = m\frac{v_{orb}^2}{r} \quad\Rightarrow\quad v_{orb}^2 = G\frac{M_T}{r}$$

$$W_{motor} = E_{m(r=2\cdot R_T)} - E_{m(r=R_T)} = \left(\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r} - G\frac{M_T m}{r}\right) - \left(\frac{1}{2}mv^2_{Tierra} - G\frac{M_T m}{R_T}\right)$$

$$W_{motor} = \left(\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{2R_T} - G\frac{M_T m}{2R_T}\right) - \left(\frac{1}{2}mv^2_{Tierra} - G\frac{M_T m}{R_T}\right) = \left(-\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{2R_T}\right) - \left(\frac{1}{2}mv^2_{Tierra} - G\frac{M_T m}{R_T}\right)$$

$$W_{motor} = -\frac{1}{4}G\frac{M_T m}{R_T} + G\frac{M_T m}{R_T} - \frac{1}{2}mv^2_{Tierra} = \frac{3}{4}G\frac{M_T m}{R_T} - \frac{1}{2}mv^2_{Tierra}$$

$$W_{motor} = \frac{3}{4}\times 6,67\cdot 10^{-11}\,\tfrac{N\cdot m^2}{kg^2}\times\frac{5,98\cdot 10^{24}\,kg\times 50\,kg}{6,37\cdot 10^6\,m} - \frac{1}{2}\times 50\,kg\times\left(463,24\,\tfrac{m}{s}\right)^2_{r=R_T}$$

$$W_{motor} = 2,348\cdot 10^9\,J - 5,365\cdot 10^6\,J = 2,343\cdot 10^9\,J$$

$$v^2_{orb} = G\frac{M_T}{r} = G\frac{M_T}{2R_T} \quad\Rightarrow\quad v_{orb} = \sqrt{\frac{GM_T}{2R_T}} = \sqrt{\frac{6,67\cdot 10^{-11}\times 5,98\cdot 10^{24}}{2\times 6,37\cdot 10^6}} = 5.595,37\,\tfrac{m}{s} = 20.143\,\tfrac{km}{h}$$

El trabajo motor se invierte en aumentar la velocidad del satélite para poder escapar de la interacción gravitatoria:

$$W_{motor} = \Delta E_c + \Delta E_{p(g)} = E_{m(r=\infty)} - E_{m(r)} = 0 - \left(E_c + E_{p(g)}\right)_{r=2R_T}$$

$$W_{motor} = 0 - \left(\frac{1}{2}mv^2_{orb} - G\frac{M_T m}{r}\right)_{r=2R_T} = 0 - \left(\frac{1}{2}mG\frac{M_T}{r} - G\frac{M_T m}{r}\right) = 0 - \left(-\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r}\right)$$

$$W_{motor} = \frac{1}{2}G\frac{M_T m}{2R_T} = \frac{1}{4}\times 6,67\cdot 10^{-11}\,\tfrac{N\cdot m^2}{kg^2}\times\frac{5,98\cdot 10^{24}\,kg\times 50\,kg}{6,37\cdot 10^6\,m} = 7,827\cdot 10^8\,J$$

$$W_{motor} = \Delta E'_{c(esc)} = \frac{1}{2}mv^2_{esc} - \frac{1}{2}mv^2_{orb} = \frac{1}{2}G\frac{M_T m}{2R_T}$$

$$\frac{1}{2}mv^2_{esc} = \frac{1}{4}G\frac{M_T m}{R_T} + \frac{1}{2}mv^2_{orb} = \frac{1}{4}G\frac{M_T m}{R_T} + \frac{1}{4}G\frac{M_T m}{R_T} = \frac{1}{2}G\frac{M_T m}{R_T}$$

$$v^2_{esc} = G\frac{M_T}{R_T} \quad\Rightarrow\quad v_{escape} = 7.913,048\,\tfrac{m}{s}$$

Otra forma de calcular la velocidad de escape:

$$\left\{\begin{array}{l} E_{m(r)} = E_{m(\infty)} = 0 \\ \frac{1}{2}mv^2_{escape} - G\frac{M_T m}{r} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}mv^2_{escape} = G\frac{M_T m}{r} \\ v^2_{escape} = 2G\frac{M_T}{2R_T} \end{array}\right\} \quad v_{escape} = 7.913,048\,\tfrac{m}{s}$$

12) Se desea situar un satélite artificial, de 100 kg de masa, en una órbita circular situada en el plano del ecuador y con un radio igual a $2,5\cdot R_T$. Calcule: a) la energía que hay que comunicar al satélite b) la velocidad orbital del mismo; c) la energía adicional que habría que aportar al satélite en órbita para que escape de la acción del campo gravitatorio terrestre; d) la velocidad de escape desde la órbita. [a) $5,00\cdot 10^9$ J; b) 5.004,65 m/s; c) $1,196\cdot 10^9$ J; d) 7.077,65 m/s]

Respuesta:

$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(g)} + W_{motor} \quad \Rightarrow \quad W_{motor} = \Delta E_c + \Delta E_{p(g)} = E_{m(r=2\cdot R_T)} - E_{m(r=R_T)}$$

$$W_{motor} = E_{m(r=2\cdot R_T)} - E_{m(r=R_T)} = \left(\frac{1}{2}mv_{orb}^2 - G\frac{M_T m}{r}\right) - \left(\frac{1}{2}mv_{Tierra}^2 - G\frac{M_T m}{R_T}\right)$$

$$\vec{F}_g = \vec{F}_c \quad \Rightarrow \quad G\frac{M_T m}{r^2} = m\frac{v_{orb}^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v_{orb}^2 = G\frac{M_T}{r}$$

$$W_{motor} = E_{m(r=2\cdot R_T)} - E_{m(r=R_T)} = \left(\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r} - G\frac{M_T m}{r}\right) - \left(\frac{1}{2}mv_{Tierra}^2 - G\frac{M_T m}{R_T}\right)$$

$$W_{motor} = \left(\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{2,5R_T} - G\frac{M_T m}{2,5R_T}\right) - \left(\frac{1}{2}mv_{Tierra}^2 - G\frac{M_T m}{R_T}\right) = \left(-\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{2,5R_T}\right) - \left(\frac{1}{2}mv_{Tierra}^2 - G\frac{M_T m}{R_T}\right)$$

$$W_{motor} = -\frac{1}{5}G\frac{M_T m}{R_T} + G\frac{M_T m}{R_T} - \frac{1}{2}mv_{Tierra}^2 = \frac{4}{5}G\frac{M_T m}{R_T} - \frac{1}{2}mv_{Tierra}^2$$

$$W_{motor} = \frac{4}{5}\times 6,67\cdot 10^{-11}\,\tfrac{N\cdot m^2}{kg^2}\times\frac{5,98\cdot 10^{24}\,kg\times 100\,kg}{6,37\cdot 10^6\,m} - \frac{1}{2}\times 100\,kg\times\left(463,24\,\tfrac{m}{s}\right)_{r=R_T}^2$$

$$W_{motor} = 5,0093\cdot 10^9\,J - 1,07295\cdot 10^7\,J = 5,00\cdot 10^9\,J$$

$$v_{orb}^2 = G\frac{M_T}{r} = G\frac{M_T}{2,5R_T} \Rightarrow v_{orb} = \sqrt{\frac{GM_T}{2,5R_T}} = \sqrt{\frac{6,67\cdot 10^{-11}\times 5,98\cdot 10^{24}}{2,5\times 6,37\cdot 10^6}} = 5.004,65\,\tfrac{m}{s} = 18.016,7\,\tfrac{km}{h}$$

El trabajo motor se invierte en aumentar la velocidad del satélite para poder escapar de la interacción gravitatoria:

$$W_{motor} = \Delta E_c + \Delta E_{p(g)} = E_{m(r=\infty)} - E_{m(r)} = 0 - \left(E_c + E_{p(g)}\right)_{r=2R_T}$$

$$W_{motor} = 0 - \left(\frac{1}{2}mv_{orb}^2 - G\frac{M_T m}{r}\right)_{r=2R_T} = 0 - \left(\frac{1}{2}mG\frac{M_T}{r} - G\frac{M_T m}{r}\right) = 0 - \left(-\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r}\right)$$

$$W_{motor} = \frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r} = \frac{1}{2}G\frac{M_T m}{2,5R_T} = \frac{1}{5}G\frac{M_T m}{R_T} = 1,196\cdot 10^9\,J$$

$$W_{motor} = \Delta E'_{c(esc)} = \frac{1}{2}mv_{esc}^2 - \frac{1}{2}mv_{orb}^2 = \frac{1}{5}G\frac{M_T m}{R_T}$$

$$\frac{1}{2}mv_{esc}^2 = \frac{1}{5}G\frac{M_T m}{R_T} + \frac{1}{2}mv_{orb}^2 = \frac{1}{5}G\frac{M_T m}{R_T} + \frac{1}{2}G\frac{M_T m}{2,5R_T} = \frac{2}{5}G\frac{M_T m}{R_T}$$

$$v_{esc}^2 = \frac{4}{5}G\frac{M_T}{R_T} \quad \Rightarrow \quad v_{escape} = \sqrt{\frac{4}{5}\times 6,67\cdot 10^{-11}\,\tfrac{N\cdot m^2}{kg^2}\times\frac{5,98\cdot 10^{24}\,kg}{6,37\cdot 10^6\,m}} = 7.077,65\,\tfrac{m}{s}$$

Otra forma de calcular la velocidad de escape:

$$\left.\begin{cases} E_{m(r)} = E_{m(\infty)} = 0 \\ \frac{1}{2}mv_{escape}^2 - G\frac{M_T m}{r} = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}mv_{escape}^2 = G\frac{M_T m}{r} \\ v_{escape}^2 = 2G\frac{M_T}{2,5R_T} \end{cases} \quad v_{escape} = 7.077,65\,\tfrac{m}{s}$$

13) Un meteorito de 1.000 kg colisiona con otro, a una altura sobre la superficie terrestre de 6 veces el radio de la Tierra, y pierde toda su energía cinética. a) ¿Cuánto pesa el meteorito en ese punto y cuál es su energía mecánica tras la colisión?. b) Si cae a la Tierra, haga un análisis energético del proceso de caída. Calcule la energía cinética, la energía potencial gravitatoria y la velocidad con la que llega a la superficie de la

Tierra. ¿Dependerá esa velocidad de la trayectoria seguida. Razone las respuestas. [a) P = 200 N; E_m = -8,945·10^9 J; b) E_p = -6.26·10^{10} J; E_c = 5,367·10^{10} J; v = 10.360 m/s]

Respuesta:

$$g = G\frac{M_T}{r^2} = G\frac{M_T}{\left(R_T + 6R_T\right)^2} = G\frac{M_T}{\left(7R_T\right)^2} = \frac{1}{49}G\frac{M_T}{R_T^2} = \frac{1}{49}g_0 = \frac{1}{49}\times 9{,}8\,\tfrac{m}{s^2} = 0{,}2\,\tfrac{m}{s^2}$$

$$P = mg = 1.000\,kg \times 0{,}2\,\tfrac{m}{s^2} = 200\,N$$

$$E_m = E_c + E_{p(g)(r=7R_T)} = 0 - G\frac{M_T m}{7R_T} = 0 - 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\tfrac{N\cdot m^2}{kg^2}\times\frac{5{,}98\cdot 10^{24}\,kg\times 1.000\,kg}{7\times 6{,}37\cdot 10^6\,m} = -8{,}945\cdot 10^9\,J$$

Durante la caída la energía mecánica permanece constante, por lo que se va transformando parte de la energía potencial gravitatoria en energía cinética. Siendo la energía cinética con la que llega a la Tierra:

$$E_m = \left(E_c + E_{p(g)}\right)_{r=7R_T} = \left(E_c + E_{p(g)}\right)_{R_T}$$

$$\left\{\begin{aligned} \left(E_c + E_{p(g)}\right)_{r=7R_T} &= 0 - G\frac{M_T m}{7R_T} \\ \left(E_c + E_{p(g)}\right)_{R_T} &= \frac{1}{2}mv_{Tierra}^2 - G\frac{M_T m}{R_T} \end{aligned}\right\}\left\{\begin{aligned} E_{p(g)(7R_T)} &= -G\frac{M_T m}{7R_T} = -8{,}945\cdot 10^9\,J \\ E_{p(g)(R_T)} &= -G\frac{M_T m}{R_T} = 7\cdot E_{p(g)(7R_T)} = -6{,}2615\cdot 10^{10}\,J \end{aligned}\right.$$

$$E_{c(R_T)} = \frac{1}{2}mv_{Tierra}^2 = E_{p(g)(7R_T)} - E_{p(g)(R_T)} = -G\frac{M_T m}{7R_T} + G\frac{M_T m}{R_T} = \frac{6}{7}\cdot G\frac{M_T m}{R_T} = 5{,}367\cdot 10^{10}\,J$$

$$v_{Tierra} = \sqrt{\frac{2E_{c(R_T)}}{m}} = 10.360{,}50\,\tfrac{m}{s} = 37.297{,}8\,\tfrac{km}{h}$$

14) A una altura de 500 km giran dos satélites de masa 1.000 kg, cada uno, describiendo la misma órbita circular, pero en sentido contrario, con lo que chocarán. Si la colisión es totalmente inelástica calcula: a) la energía mecánica inmediatamente después de la colisión; b) la velocidad con la que llegan al suelo si despreciamos el rozamiento con la atmósfera terrestre. Datos: g_0 = 9,8 m·s^{-2}; R_T = 6,37·10^6 m. [a) -1,16·10^{11}J; b) 3.022 m/s]

Respuesta:

$$F_c = F_g \quad \left\{m\frac{v_{órbita}^2}{r} = G\frac{M_T m}{r^2}\right\} \quad v_{órbita}^2 = G\frac{M_T}{r} \quad \Rightarrow \quad v_{1(órbita)} = v_{2(órbita)}$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}' \quad \left\{\begin{aligned} m_1 &= m_2 = m \\ v_{1(órbita)} &= -v_{2(órbita)} \end{aligned}\right\} \quad \left\{\begin{aligned} mv_{1(órbita)} + mv_{2(órbita)} &= 2mv' \\ m\left(v_{1(órbita)} + v_{2(órbita)}\right) &= 2mv' \end{aligned}\right\} \quad v' = 0$$

$$E_m = E_c + E_{p(g)} = \frac{1}{2}\left(2m\right)v'^2 - G\frac{M_T\left(2m\right)}{r}$$

$$E_m = E_c + E_{p(g)} = 0 - 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\tfrac{N\cdot m^2}{kg^2}\times\frac{5{,}98\cdot 10^{24}\,kg\times\left(2\times 1.000\right)kg}{\left(6{,}37\cdot 10^6\,m + 500.000\,m\right)} = -1{,}161\cdot 10^{11}\,J$$

$$E_{m(r)} = E_{m(R_T)} \quad \begin{cases} E_{m(r)} = -1{,}161 \cdot 10^{11}\ \text{J} \\ E_{m(R_T)} = E_{c(R_T)} + E_{p(g)(R_T)} = \frac{1}{2}(2m)v_{R_T}^2 - G\frac{M_T(2m)}{R_T} \end{cases}$$

$$E_{m(R_T)} = E_{c(R_T)} - 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \tfrac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2} \times \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \times (2 \times 1.000)\,\text{kg}}{6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m}} = E_{c(R_T)} - 1{,}252 \cdot 10^{11}\ \text{J}$$

$$E_{c(R_T)} = E_{m(R_T)} - E_{p(g)(R_T)} = -1{,}161 \cdot 10^{11}\ \text{J} + 1{,}252 \cdot 10^{11}\ \text{J} = 9{,}1326 \cdot 10^9\ \text{J} = \frac{1}{2}(2m)v_{R_T}^2$$

$$v_{R_T}^2 = \frac{2 \cdot E_{c(R_T)}}{2m} \quad \Rightarrow \quad v_{R_T} = 3.022\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

15) Un satélite, de 1.000 kg, está girando alrededor de la Tierra en una órbita circular a una altura de 350 km. a) ¿Cuál es la energía mecánica del satélite?. b) ¿Cuál es la energía que se ha gastado para colocarlo en dicha órbita?. Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; $g_0 = 9{,}8$ ms^{-2}; $R_T = 6.370$ km. [a) $-2{,}96 \cdot 10^{10}$ J; b) $3{,}28 \cdot 10^{10}$ J]

Respuesta:

$$E_m = E_c + E_{p(g)} = \frac{1}{2}mv_{orb}^2 - G\frac{M_T m}{r} \qquad \left.\begin{cases} F_g = F_c \\ G\frac{M_T m}{r^2} = m\frac{v_{orb}^2}{r} \end{cases}\right\} \left\{ v_{orb}^2 = G\frac{M_T}{r} \right\}$$

$$E_m = E_c + E_{p(g)} = \frac{1}{2}mG\frac{M_T}{r} - G\frac{M_T m}{r} = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r}$$

$$E_m = E_c + E_{p(g)} = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r} = -\frac{1}{2} \times 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \tfrac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2} \times \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \times 1.000\,\text{kg}}{(6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m} + 350.000\,\text{m})} = -2{,}97 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

$$W_{motor} = \Delta E_c + \Delta E_{p(g)} = \Delta E_m$$

$$\Delta E_m = E_{m(r)} - E_{m(R_T)} = \left(-\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r}\right) - \left(\frac{1}{2}mv_{Tierra}^2 - G\frac{M_T m}{R_T}\right)$$

$$E_m = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r} = -\frac{1}{2} \times 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \tfrac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2} \times \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \times 1.000\,\text{kg}}{(6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m} + 350.000\,\text{m})} = -2{,}97 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

$$E_{m(R_T)} = \left(\frac{1}{2}mv_{Tierra}^2 - G\frac{M_T m}{R_T}\right) \approx -G\frac{M_T m}{R_T} = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \tfrac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2} \times \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \times 1.000\,\text{kg}}{6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m}} = -6{,}26 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

$$\Delta E_m = E_{m(r)} - E_{m(R_T)} = (-2{,}97 \cdot 10^{10}\ \text{J}) - (-6{,}26 \cdot 10^{10}\ \text{J}) = 3{,}29 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

16) Un cuerpo, inicialmente en reposo a una altura de 150 km sobre la superficie terrestre, se deja caer libremente. a) Explique cualitativamente cómo varían las energías cinética, potencial y mecánica del cuerpo durante el descenso, si se supone nula la resistencia del aire, y determine la velocidad del cuerpo cuando llega a la superficie terrestre. b) Si, en lugar de dejar caer el cuerpo, lo lanzamos verticalmente hacia arriba desde la posición inicial, ¿cuál sería su velocidad de escape?. Datos: G, R_T y M_T. [a) 1.694 m/s; b) 11.044 m/s]

Respuesta:

$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(g)} \quad \Rightarrow \quad \Delta E_c + \Delta E_{p(g)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta E_m = 0$$

$$E_{m(i)} = E_{m(f)}$$

$$E_{m(i)} = \left(E_c + E_{p(g)}\right)_i = 0 - G\frac{M_T m}{R_T + h} = -6{,}67\cdot 10^{-11}\times\frac{5{,}98\cdot 10^{24}\times m}{\left(6{,}37\cdot 10^6 + 150.000\right)} = -6{,}118\cdot 10^7\cdot m$$

$$E_{m(f)} = \left(E_c + E_{p(g)}\right)_f = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_T m}{R_T} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_T m}{R_T} = \frac{1}{2}mv^2 - 6{,}26\cdot 10^7\cdot m$$

$$E_{m(i)} = E_{m(f)} \quad \Rightarrow \quad -6{,}118\cdot 10^7\cdot m = \frac{1}{2}mv^2 - 6{,}26\cdot 10^7\cdot m$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = -6{,}118\cdot 10^7\cdot m + 6{,}26\cdot 10^7\cdot m = 1{,}42\cdot 10^6\cdot m$$

$$v = \sqrt{2\times 1{,}42\cdot 10^6} = 1.685\ \tfrac{m}{s}$$

$$E_{m(\infty)} = 0 = E_m = \frac{1}{2}mv_{esc}^2 - G\frac{M_T m}{R_T + h}$$

$$\frac{1}{2}mv_{esc}^2 = G\frac{M_T m}{R_T + h} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}v_{esc}^2 = G\frac{M_T}{R_T + h} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\times\frac{5{,}98\cdot 10^{24}}{\left(6{,}37\cdot 10^6 + 150.000\right)} = 6{,}118\cdot 10^7$$

$$v_{escape} = \sqrt{2\times 6{,}118\cdot 10^7} = 11.061{,}6\ \tfrac{m}{s}$$

17) Dos satélites idénticos A y B describen órbitas circulares de diferente radio ($R_A > R_B$) alrededor de la Tierra. Conteste razonadamente a las siguientes preguntas: a) ¿cuál de los dos tiene mayor energía cinética?; b) si los dos satélites estuviesen en la misma órbita ($R_A = R_B$) y tuviesen distinta masa ($m_A < m_B$), ¿cuál de los dos se movería con mayor velocidad?, ¿cuál de ellos tendría más energía cinética?. [a) El B; b) con la misma velocidad; el B tiene la energía cinética mayor.]

Respuesta:

$$F_g = F_c \quad \left\{G\frac{M_T m}{r^2} = m\frac{v_{orb}^2}{r}\right\} \quad \left\{v_{orb}^2 = G\frac{M_T}{r}\right\} \quad E_c = \frac{1}{2}mv_{orb}^2 = \frac{1}{2}mG\frac{M_T}{r}$$

$$\left\{\begin{matrix} m_A = m_B = m \\ r_A > r_B \end{matrix}\right\} \quad \left\{\begin{matrix} E_{c(A)} = \frac{1}{2}mG\frac{M_T}{r_A} \\ E_{c(B)} = \frac{1}{2}mG\frac{M_T}{r_B} \end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad E_{c(A)} < E_{c(B)}$$

$$\left\{\begin{matrix} m_A < m_B \\ r_A = r_B \end{matrix}\right\} \quad v_{orb}^2 = G\frac{M_T}{r} \quad \Rightarrow \quad v_{orb(A)} = v_{orb(B)}$$

$$\left\{\begin{matrix} E_{c(A)} = \frac{1}{2}m_A v_{orb(A)}^2 \\ E_{c(B)} = \frac{1}{2}m_B v_{orb(B)}^2 \end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{matrix} v_{orb(A)} = v_{orb(B)} \\ E_{c(A)} < E_{c(B)} \end{matrix}\right.$$

18) a) Explique la influencia que tienen la masa y el radio de un planeta en la aceleración de la gravedad en su superficie y en la energía potencial de una partícula próxima a dicha superficie. b) Imagine que la Tierra aumentara su radio al doble y su masa al cuádruple, ¿cuál sería el nuevo valor de g?, y ¿el nuevo período de la Luna?. Datos: G, R_T, M_T, la distancia Tierra-Luna es $3{,}8\cdot 10^5$ km. [a) $g = GM/R^2$; $E_p = mgh = m(GM/R^2)h$; b) el valor de g sería el mismo y el período de la Luna sería la mitad.]

Respuesta:

a) La aceleración de la gravedad g en un planeta es directamente proporcional a la masa del planeta M e inversamente proporcional al cuadrado de su radio R: $\vec{g} = \lim_{m\to 0} \frac{\vec{F}_g}{m} = -G\frac{M}{R^2}\vec{u}_r$

$$W_{por-gravedad} = \int_i^f \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = -mg[r]_i^f = -mg\Delta r = -\Delta E_{p(g)}$$

$$E_{p(g)} = mgr = mgh = mG\frac{M}{R^2}h$$

La influencia en la energía potencial de una partícula próxima a la superficie es igual a la de la aceleración de la gravedad, ya que depende directamente de la aceleración de la gravedad.

b) El nuevo valor de g sería: $g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2} \Rightarrow g = G\frac{4M_T}{(2R_T)^2} = \frac{4}{4}G\frac{M_T}{R_T^2} = g_0$.

El nuevo período de la Luna sería la mitad del actual:

$$\left\{\begin{array}{l} F_g = F_c \\ G\frac{M_T m_L}{r_{TL}^2} = m_L\frac{v_{orb}^2}{r_{TL}} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} v_{orb}^2 = G\frac{M_T}{r_{TL}} \\ v_{orb}^2 = \omega^2 r_{TL}^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}r_{TL}^2 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} G\frac{M_T}{r_{TL}} = \frac{4\pi^2}{T^2}r_{TL}^2 \\ T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T}r_{TL}^3 \end{array}\right.$$

$$T'^2 = \frac{4\pi^2}{G(4M_T)}r_{TL}^3 \Rightarrow T' = \sqrt{\frac{4\pi^2}{G2^2M_T}r_{TL}^3} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\pi^2}{GM_T}r_{TL}^3} = \frac{1}{2}T$$

19) Analice las siguientes proposiciones, razonando si son verdaderas o falsas: a) el trabajo realizado por una fuerza sobre un cuerpo es igual a la variación de su energía cinética; b) la energía cinética necesaria para escapar de la Tierra depende de la elección del origen de energía potencial.

Respuesta:

a) El teorema trabajo-energía cinética se refiere al trabajo neto, es decir a la suma de los trabajos realizados por cada fuerza aplicada al cuerpo. Luego es cierta la proposición si esa fuerza aplicada al cuerpo es la única que realiza trabajo sobre el mismo.

b) $W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(g)} + W_{motor}$

$W_{motor} = \Delta E_c + \Delta E_{p(g)} = \Delta E_m$

$W_{motor} = \Delta E'_c$

La energía necesaria para escapar de la Tierra es igual al incremento en la energía mecánica, que es la suma del incremento en su energía cinética y en su energía potencial gravitatoria. Luego es independiente de la elección del origen de energía potencial.

Por otra parte, la energía necesaria para escapar se invierte en aumentar su energía cinética ($\Delta E'_c$) en la superficie para adquirir la velocidad de escape y salir de la atracción gravitatoria.

20) Razone las respuestas a las siguientes preguntas: a) si el cero de energía potencial gravitatoria de una partícula de masa m se sitúa en la superficie de la Tierra, ¿cuál es el valor de la energía de la partícula cuando se encuentra a una distancia infinita de la Tierra?; b) ¿puede ser negativo el trabajo realizado por una fuerza gravitatoria?; ¿puede ser negativa la energía potencial gravitatoria?. [a) GMm/R_T; b) el trabajo es negativo si el desplazamiento es de sentido contrario a la fuerza, la energía potencial gravitatoria es siempre negativa ya que es cero en el infinito.]

Respuesta:

La fuerza gravitatoria es conservativa, lo que implica que a cada punto del campo de fuerzas le asignamos un escalar. Siendo la relación $\left\{\vec{F}\cdot d\vec{r}=-dE_p \Rightarrow \vec{F}=-\vec{\nabla}E_p\right\}$. Lo que tiene sentido físico en un campo de fuerzas conservativo es la relación entre la dirección de la fuerza y el incremento de la energía potencial. Al poner el signo menos en la relación escogemos el criterio de que la fuerza se dirige hacia donde disminuya la energía potencial. Por lo que si el cero de la energía potencial gravitatoria de una partícula de masa m se sitúa en la superficie de la Tierra, el valor a una distancia infinita será $E_{p(g)(r\to\infty)}=G\dfrac{Mm}{R_T}$:

$$W_{por-gravedad}=\int_i^f -G\frac{M_T m}{r^2}\vec{u}_r d\vec{r}=-GM_T m\left[-\frac{1}{r}\right]_i^f=-\left[-G\frac{M_T m}{r_f}+G\frac{M_T m}{r_i}\right]=-\Delta E_{p(g)}$$

$$\left\{E_{p(g)(r\to\infty)}=0\right\}$$

$$\begin{cases} W_{por-gravedad}=-\left[\Delta E_{p(g)}\right]_{R_T}^{\infty}=-\left[E_{p(g)(r\to\infty)}-E_{p(g)(r=R_T)}\right]=-\left[0-E_{p(g)(r=R_T)}\right] \\ W_{por-gravedad}=-\left[0+G\dfrac{Mm}{R_T}\right]=-G\dfrac{Mm}{R_T}=E_{p(g)(r=R_T)}=-W_{contra-gravedad}\end{cases}$$

$$\left\{E_{p(g)(r=R_T)}=0\right\}$$

$$W_{por-gravedad}=-\left[\Delta E_{p(g)}\right]_{R_T}^{\infty}=-\left[E_{p(g)(r\to\infty)}-E_{p(g)(r=R_T)}\right]=-\left[E_{p(g)(r\to\infty)}-0\right]=-E_{p(g)(r\to\infty)}$$

$$W_{por-gravedad}=-\left[\Delta E_{p(g)}\right]_{R_T}^{\infty}=-G\frac{Mm}{R_T}=-E_{p(g)(r\to\infty)} \quad\Rightarrow\quad \boxed{E_{p(g)(r\to\infty)}=G\frac{Mm}{R_T}}$$

21) Un satélite artificial de 1.000 kg gira alrededor de la Tierra en una órbita circular de 7.650 km de radio, a 1.280 km de altura. Calcule: a) los cambios que ha experimentado el satélite, desde su lanzamiento de un punto del ecuador de la Tierra, en la energía cinética, la energía potencial y la energía mecánica; b) el trabajo que se ha tenido que realizar para colocarlo en esa órbita; c) la aceleración de la gravedad en esa órbita así como el peso del satélite. Datos: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N·m²/kg²; $R_T = 6{,}37\cdot10^{6}$ m; $M_T = 5{,}98\cdot10^{24}$ kg. [a) $\Delta E_c = 2{,}60\cdot10^{10}$ J; $\Delta E_{p(g)} = 1{,}048\cdot10^{10}$ J; $\Delta E_m = 3{,}643\cdot10^{10}$ J; b) $W = 3{,}643\cdot10^{10}$ J; c) $g = 6{,}81$ m/s²; 0]

Respuesta:

$$E_{m(r=R_T)}=E_{c(r=R_T)}+E_{p(g)(r=R_T)}=\frac{1}{2}mv^2_{(r=R_T)}-G\frac{M_T m}{R_T}=\frac{1}{2}m\left(\omega R_T\right)^2-G\frac{M_T m}{R_T}$$

$$E_{m(r=R_T)}=\frac{1}{2}\times1.000\,\text{kg}\times\left(\frac{2\pi}{86.400\,\text{s}}\times6{,}37\cdot10^6\,\text{m}\right)^2-6{,}67\cdot10^{-11}\,\tfrac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\times\frac{5{,}98\cdot10^{24}\,\text{kg}\times1.000\,\text{kg}}{6{,}37\cdot10^6\,\text{m}}$$

$$E_{m(r=R_T)}=1{,}073\cdot10^8\,\text{J}-6{,}262\cdot10^{10}\,\text{J}=-6{,}25\cdot10^{10}\,\text{J}$$

$$E_{m(r)} = E_{c(r)} + E_{p(g)(r)} = \frac{1}{2}mv_{orb}^2 - G\frac{M_T m}{r} \quad \left\{\begin{array}{l} F_g = F_c \\ G\frac{M_T m}{r^2} = m\frac{v_{orb}^2}{r} \end{array}\right\} v_{orb}^2 = G\frac{M_T}{r}$$

$$E_{m(r)} = E_{c(r)} + E_{p(g)(r)} = \frac{1}{2}mG\frac{M_T}{r} - G\frac{M_T m}{r} = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r}$$

$$E_{m(r)} = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r} = -\frac{1}{2}\times 6,67\cdot 10^{-11}\,\tfrac{N\cdot m^2}{kg^2}\times\frac{5,98\cdot 10^{24}\,kg\times 1.000\,kg}{7,650\cdot 10^6\,m} = -2,607\cdot 10^{10}\,J$$

$$\begin{cases} \Delta E_c = E_{c(r)} - E_{c(r=R_T)} = -E_{m(r)} - E_{c(r=R_T)} = 2,607\cdot 10^{10}\,J - 1,073\cdot 10^{8}\,J = 2,60\cdot 10^{10}\,J \\ \Delta E_{p(g)} = E_{p(g)(r)} - E_{p(g)(r=R_T)} = 2\cdot E_{m(r)} - E_{p(g)(r=R_T)} = -5,214\cdot 10^{10}\,J - \left(-6,262\cdot 10^{10}\,J\right) = 1,048\cdot 10^{10}\,J \\ \Delta E_m = E_{m(r)} - E_{m(r=R_T)} = -2,607\cdot 10^{10}\,J - \left(-6,25\cdot 10^{10}\,J\right) = 3,643\cdot 10^{10}\,J \end{cases}$$

$$W_{motor} = \Delta E_m = 3,643\cdot 10^{10}\,J$$

$$F_g = F_c \;\Rightarrow\; G\frac{M_T m}{r^2} = m\frac{v_{orb}^2}{r} \;\Rightarrow\; G\frac{M_T}{r^2} = \frac{v_{orb}^2}{r} \;\Rightarrow\; \boxed{g = a_c}$$

$$g = G\frac{M_T}{r^2} = 6,67\cdot 10^{-11}\,\tfrac{N\cdot m^2}{kg^2}\times\frac{5,98\cdot 10^{24}\,kg}{\left(7,650\cdot 10^6\,m\right)^2} = 6,81\,\tfrac{m}{s^2}$$

$$F_{n(balanza)} - P = -ma_c \;\Rightarrow\; F_{n(balanza)} = P - ma_c = mg - ma_c = m\left(g - a_c\right) = 0$$

22) Un satélite artificial en órbita geoestacionaria es aquél que, al girar con la misma velocidad angular de rotación que la Tierra, se mantiene sobre la misma vertical. a) Explique las características de esa órbita y calcule su altura respecto a la superficie de la Tierra; b) Razone qué valores obtendrá para la masa y el peso de un cuerpo situado en dicho satélite sabiendo que su masa en la Tierra es de 20 kg. Datos: G, R_T; M_T.[a) Órbita alrededor de la Tierra en el plano ecuatorial para tener el mismo eje de rotación que la Tierra y a una altura de 35.837,6 km; b) la masa es la misma, 20 kg, pero el peso es cero.]

Respuesta:

$$\left\{\begin{array}{l} F_g = F_c \\ G\frac{M_T m}{r^2} = m\frac{v_{orb}^2}{r} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} v_{orb}^2 = G\frac{M_T}{r} \\ v_{orb} = \omega\cdot r = \frac{2\pi}{T}r \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} v_{orb}^2 = G\frac{M_T}{r} = \frac{4\pi^2}{T^2}r^2 \\ r^3 = G\frac{M_T T^2}{4\pi^2} \;\Rightarrow\; r = \left(G\frac{M_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \end{array}\right\}$$

$$r = \left(G\frac{M_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = \left(6,67\cdot 10^{-11}\,\tfrac{N\cdot m^2}{kg^2}\times\frac{5,98\cdot 10^{24}\,kg\times\left(86.400\,s\right)^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 42.250.474\,m$$

$$h = r - R_T = 35.880.474\,m \;\Rightarrow\; v_{orb} = \frac{2\pi r}{T} = 3.072,54\,\tfrac{m}{s} = 11.061\,\tfrac{km}{h}$$

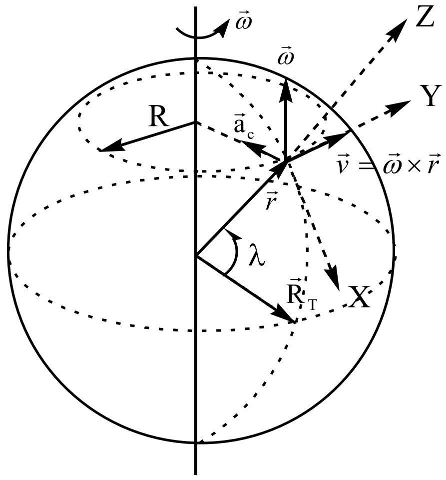
La masa es de 20 kg y no varía. El peso colocado en una balanza sería:

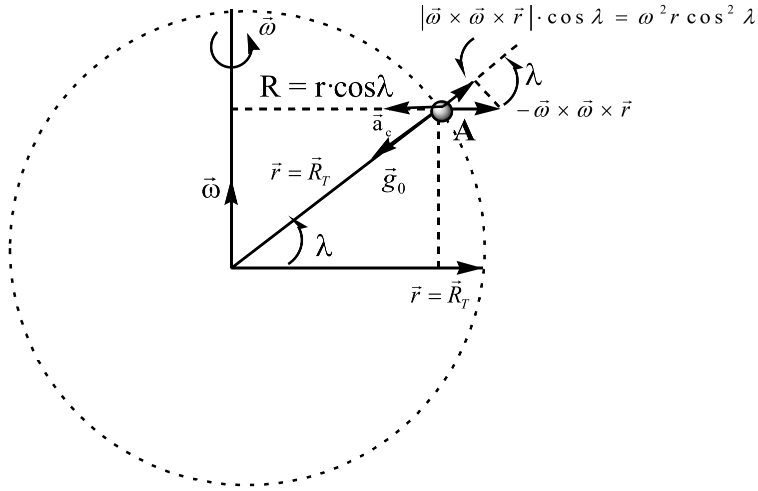
$$F_g = F_c \;\Rightarrow\; G\frac{M_T m}{r^2} = m\frac{v_{orb}^2}{r} \;\Rightarrow\; G\frac{M_T}{r^2} = \frac{v_{orb}^2}{r} \;\Rightarrow\; \boxed{g = a_c}$$

$$F_{n(balanza)} - P = -ma_c \;\Rightarrow\; F_{n(balanza)} = P - ma_c = mg - ma_c = m\left(g - a_c\right) = 0$$

23) La aceleración de caída libre en un punto de la superficie de la Tierra depende de la latitud y del período de rotación de la Tierra. Demuestre: a) si la aceleración de caída libre sobre el ecuador sería mayor, menor o igual si el período de rotación de la Tierra disminuyese a 16 horas; b) lo mismo pero sobre el polo norte. [a) Ecuador: $g_{rotando(T=24h)} = 9{,}780\ m/s^2 > g_{rotando(T=16h)} = 9{,}738\ m/s^2$; b) polo norte: $g_{rotando(T=24h)} = g_{rotando(T=16h)}$]

Respuesta:





$$\vec{g} = \vec{g}_0 - \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r} \quad \left\{\vec{g}_{rotando} = \vec{g}_{0(reposo)} - \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left|\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)\right| = \omega^2 r\cos\lambda == \left(2\pi/86.164\,s\right)^2\cdot 6.378.137\,m\cdot\cos\lambda = 0{,}03392\,\frac{m}{s^2}\cdot\cos\lambda \\ \left|\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)\right|_{ecuador} = 0{,}03392\,\frac{m}{s^2}\cdot\cos 0º = 0{,}03392\,\frac{m}{s^2} \end{array}\right\}$$

$$g_{ecuador} = g_{0(ecuador)} - \left|\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)\right|_{ecuador} = 9{,}7803\,\frac{m}{s^2} \quad \left\{g_{0(ecuador)} = 9{,}7803\,\frac{m}{s^2} + 0{,}03392\,\frac{m}{s^2} = 9{,}8142\,\frac{m}{s^2}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{g} = \vec{g}_0 - \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r} \\ \vec{g}_{rotando} = \vec{g}_{reposo} - \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} g_{0(polos)} = 9{,}8321\,\frac{m}{s^2} \\ g_{0(ecuador)} = 9{,}7803\,\frac{m}{s^2} + 0{,}03392\,\frac{m}{s^2} = 9{,}8142\,\frac{m}{s^2} \end{array}\right\} \left\{g_0 \gg \left|\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)\right|\right.$$

$$\boxed{g \approx g_0 - \left|\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}\right|\cdot\cos\lambda = g_0 - \omega^2 r\cos\lambda\cdot\cos\lambda = g_0 - \omega^2 r\cos^2\lambda = g_0 - \omega^2 R_T\cos^2\lambda}$$

$g_{rotando} = g_{0(sin\text{-}rotar)} - a_{centrípeta}$

$a_{c(Ecuador)T=24h} = \omega^2\cdot R_T = (2\cdot\pi/\ T_{sideral})^2\cdot R_T = (2\cdot\pi/86.164\ rad/s)^2\times 6.378.137\ m = 0{,}03392\ m/s^2$.

$a_{c(Ecuador)T=16h} = \omega^2\cdot R_T = (2\cdot\pi/\ T_{16h})^2\cdot R_T = (2\cdot\pi/57.600\ rad/s)^2\times 6.378.137\ m = 0{,}0759\ m/s^2$.

$g_{rotando(T=24h)} = 9{,}8142\ m/s^2 - 0{,}03392\ m/s^2 = 9{,}780\ m/s^2$

$g_{rotando(T=16h)} = 9{,}8142\ m/s^2 - 0{,}0759\ m/s^2 = 9{,}738\ m/s^2$

Las mediciones de la aceleración de la gravedad en el ecuador deben tener en cuenta también la rotación del planeta con una velocidad angular $\omega = 2\cdot\pi/T_{sideral}$ ($T_{sideral}$ = 23:56:04 h). Por ello cualquier objeto que se encuentre en reposo en la superficie de la Tierra está rotando y describe una trayectoria circular alrededor del eje de rotación de la Tierra, siendo la aceleración centrípeta en el ecuador de $0{,}0339\ m/s^2$:

$a_{centrípeta(Ecuador)} = \omega^2\cdot R_T = (2\cdot\pi/\ T_{sideral})^2\cdot R_T = (2\cdot\pi/86.164\ rad/s)^2\times 6.378.137\ m = 0{,}03392\ m/s^2$.

La aceleración de la gravedad (g) de la Tierra es menor que si esta no rotase (g_0). Siendo el valor en el ecuador: $\mathbf{g_{rotando} = g_{0(sin\text{-}rotar)} - a_{centrípeta}}$. Lo que hace que en el ecuador la aceleración gravitatoria eficaz tiene un valor de $\mathbf{g_{rotando} = 9{,}7803\ m/s^2}$, esto significa que la verdadera aceleración gravitatoria en el ecuador debe ser $\mathbf{g_{0(sin\text{-}rotar)} = 9{,}8142\ m/s^2 = 9{,}7803\ m/s^2 + 0{,}0339\ m/s^2}$.

Si el período de rotación de la Tierra pasase a ser de 16 horas:

$\mathbf{a_{c(Ecuador)T=16h} = \omega^2 \cdot R_T = (2\cdot\pi/\ T_{16h})^2 \cdot R_T = (2\cdot\pi/57.600\ rad/s)^2 \times 6.378.137\ m = 0{,}0759\ m/s^2}$.

Sin embargo, en los polos, donde no hay aceleración centrífuga la aceleración gravitatoria real es **9,8321 m/s²**, que es mayor que la de 9,8142 m/s² que corresponde al ecuador sin rotación de la Tierra. Esto se debe a que la Tierra está achatada por los polos y un objeto en el ecuador está a más distancia del centro de la Tierra que si está en el polo, concretamente en el ecuador está a 21,384 km más alejado del centro, siendo el radio ecuatorial de 6.378.137 m y el radio polar de 6.356.752,3 m.

En resumen, hay dos causas que contribuyen a que la aceleración efectiva de la gravedad sea menor en el ecuador que en los polos. Alrededor del 70% de la diferencia se debe a que la Tierra está rotando y el 30% restante a la forma no esférica de la Tierra.

24) Considere un satélite de 100 kg situado sobre un punto del ecuador en la superficie de la Tierra. Calcule: a) la velocidad del satélite en la superficie de la Tierra; b) la energía mecánica del satélite en el punto del ecuador sobre la superficie de la Tierra; c) la energía mecánica que tendrá el satélite cuando gire en una órbita a 400 km sobre la superficie de la Tierra; d) el trabajo que hay que realizar para trasladar el satélite desde la superficie de la Tierra hasta la órbita en la que está girando a 400 km sobre la superficie de la Tierra. Datos: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}\ N\cdot m^2/kg^2$; $R_T = 6{,}37\cdot10^6$ m; $M_T = 5{,}98\cdot10^{24}$ kg. [a) 463 m/s; b) $-6{,}25\cdot10^9$ J ; c) $-2{,}95\cdot10^9$ J; d) $3{,}3\cdot10^9$ J]

Respuesta:

$$v_0 = \omega R_T = \frac{2\pi}{T} R_T = \frac{2\pi}{86.400\,s} \times 6{,}37\cdot10^6\ m = 463\ \tfrac{m}{s}$$

$$E_{m(r=R_T)} = E_{c(r=R_T)} + E_{p(g)(r=R_T)} = \frac{1}{2} m v_0^2 - G\frac{M_T m}{R_T}$$

$$E_{c(r=R_T)} = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} \times 100\,kg \times \left(463\ \tfrac{m}{s}\right)^2 = 1{,}072\cdot10^7\ J$$

$$E_{p(g)(r=R_T)} = -G\frac{M_T m}{R_T} = -6{,}67\cdot10^{-11}\ \tfrac{N\cdot m^2}{kg^2} \times \frac{5{,}98\cdot10^{24}\ kg \times 100\,kg}{6{,}37\cdot10^6\ m} = -6{,}26\cdot10^9\ J$$

$$E_{m(r=R_T)} = E_{c(r=R_T)} + E_{p(g)(r=R_T)} = 1{,}072\cdot10^7\ J - 6{,}26\cdot10^9\ J = -6{,}25\cdot10^9\ J$$

$$E_{m(r)} = E_{c(r)} + E_{p(g)(r)} = \frac{1}{2} m v_{orb}^2 - G\frac{M_T m}{r} \qquad \left\{\begin{aligned} & F_g = F_c \\ & G\frac{M_T m}{r^2} = m\frac{v_{orb}^2}{r}\end{aligned}\right\} \left\{ v_{orb}^2 = G\frac{M_T}{r} \right\}$$

$$E_{m(r)} = E_{c(r)} + E_{p(g)(r)} = \frac{1}{2} m G\frac{M_T}{r} - G\frac{M_T m}{r} = -\frac{1}{2} G\frac{M_T m}{r}$$

$$E_{m(r)} = -\frac{1}{2} G\frac{M_T m}{r} = -\frac{1}{2} \times 6{,}67\cdot10^{-11}\ \tfrac{N\cdot m^2}{kg^2} \times \frac{5{,}98\cdot10^{24}\ kg \times 100\,kg}{\left(6{,}37\cdot10^6\ m + 400.000\,m\right)} = -2{,}95\cdot10^9\ J$$

$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(g)} + W_{motor} \quad \Rightarrow \quad W_{motor} = \Delta E_c + \Delta E_{p(g)}$$

$$W_{motor} = E_{m(r)} - E_{m(r=R_T)} = -2{,}95\cdot10^9\ J - \left(-6{,}25\cdot10^9\ J\right) = 3{,}3\cdot10^9\ J$$

25) Considere un satélite artificial, de masa 50 kg, en órbita geoestacionaria. Determine: a) el radio de la órbita y la velocidad del satélite; b) el cambio en la energía del satélite al pasar de la órbita geoestacionaria a la órbita de la estación orbital terrestre, a 400 km sobre la superficie de la Tierra. Datos: G = 6,67·10^{-11} N·m^2/kg^2; R_T = 6,37·10^6 m; M_T = 5,98·10^{24} kg. [a) 42.250 km; b) -1,234·10^9 J]

Respuesta:

$$\left\{\begin{array}{l} F_g = F_c \\ G\dfrac{M_T m}{r^2} = m\dfrac{v_{orb}^2}{r} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} v_{orb}^2 = G\dfrac{M_T}{r} \\ v_{orb} = \omega \cdot r = \dfrac{2\pi}{T} r \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} v_{orb}^2 = G\dfrac{M_T}{r} = \dfrac{4\pi^2}{T^2} r^2 \\ r^3 = G\dfrac{M_T T^2}{4\pi^2} \quad \Rightarrow \quad r = \left(G\dfrac{M_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \end{array}\right\}$$

$$r = \left(G\frac{M_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = \left(6,67\cdot 10^{-11}\,\tfrac{N\cdot m^2}{kg^2} \times \frac{5,98\cdot 10^{24}\,kg \times (86.400\,s)^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 42.250.474\,m$$

$$h = r - R_T = 35.880.474\,m \quad \Rightarrow \quad v_{orb} = \frac{2\pi r}{T} = 3.072,54\,\tfrac{m}{s} = 11.061\,\tfrac{km}{h}$$

$$\Delta E_m = E_{m(f)} - E_{m(i)} \quad \left\{\begin{array}{l} F_g = F_c \\ G\dfrac{M_T m}{r^2} = m\dfrac{v_{orb}^2}{r} \end{array}\right\} \left\{ v_{orb}^2 = G\frac{M_T}{r} \right\}$$

$$E_{m(i)} = \frac{1}{2} m v_{orb(i)}^2 - G\frac{M_T m}{r_i} = \frac{1}{2} m G\frac{M_T}{r_i} - G\frac{M_T m}{r_i} = -\frac{1}{2} G\frac{M_T m}{r_i}$$

$$E_{m(f)} = \frac{1}{2} m v_{orb(f)}^2 - G\frac{M_T m}{r_f} = \frac{1}{2} m G\frac{M_T}{r_f} - G\frac{M_T m}{r_f} = -\frac{1}{2} G\frac{M_T m}{r_f}$$

$$E_{m(i)} = -\frac{1}{2} \times 6,67\cdot 10^{-11}\,\tfrac{N\cdot m^2}{kg^2} \times \frac{5,98\cdot 10^{24}\,kg \times 50\,kg}{42.250.474\,m} = -2,36\cdot 10^8\,J$$

$$E_{m(f)} = -\frac{1}{2} \times 6,67\cdot 10^{-11}\,\tfrac{N\cdot m^2}{kg^2} \times \frac{5,98\cdot 10^{24}\,kg \times 50\,kg}{6,37\cdot 10^6 + 400.000\,m} = -1,47\cdot 10^9\,J$$

$$\Delta E_m = E_{m(f)} - E_{m(i)} = -1,47\cdot 10^9\,J + 0,236\cdot 10^9\,J = -1,234\cdot 10^9\,J$$

26) Suponga que la masa terrestre se duplicara. a) Calcule razonadamente el nuevo período orbital de la Luna suponiendo que su radio orbital permaneciera constante. b) Si, además de duplicarse la masa terrestre, se duplicara su radio, ¿cuál sería el valor de g en la superficie terrestre?. Datos: G = 6,67·10^{-11} N·m^2/kg^2; R_T = 6,37·10^6 m; M_T = 5,98·10^{24} kg; $R_{orbita\text{-}Luna}$ = 3,84·10^8 m. [a) T/2$^{1/2}$; b) g_0/2]

Respuesta:

$$\left\{\begin{array}{l} F_{c(luna)} = F_g \\ m_L\dfrac{v_{orb}^2}{r} = G\dfrac{M_T m_L}{r^2} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} v_{orb}^2 = G\dfrac{M_T}{r} \\ v_{orb}^2 = \omega^2 r^2 = \dfrac{4\pi^2}{T^2} r^2 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} G\dfrac{M_T}{r} = \dfrac{4\pi^2}{T^2} r^2 \\ T^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM_T} r \end{array}\right\} \left\{ T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM_T} r^3} = 2,367\cdot 10^6 s \right.$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM_T} r^3} = 2,367353\cdot 10^6 s = 657,6\,h = 27,4\,d$$

$$T' = \sqrt{\frac{4\pi^2}{G(2M_T)} r^3} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{4\pi^2}{GM_T} r^3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 2,367353\cdot 10^6 s = 1,673971\cdot 10^6 s = 465\,h = 19,4\,d$$

El nuevo valor de g sería el mismo que antes:

$$g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2} \quad \Rightarrow \quad g = G\frac{2M_T}{(2R_T)^2} = \frac{2}{4}G\frac{M_T}{R_T^2} = \frac{1}{2}g_0$$

27) Sean las cuatro masas: $m_1 = 1$ kg en el punto (0;0), $m_2 = 2$ kg en el punto (0;1) m, $m_3 = 3$ kg en el punto (1;1) m y $m_4 = 4$ kg en el punto (1;0) m. Calcule: a) la fuerza, módulo y dirección, ejercida sobre la masa m_1 por las otras tres masas; b) la intensidad del campo gravitatorio ejercida sobre la masa m_1 por las otras tres masas; c) la energía potencial del sistema formado por las cuatro masas; d) el trabajo que hay que realizar sobre el sistema, contra la fuerza gravitatoria, para separar las cuatro masas hasta el infinito. Dato: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N·m²·kg⁻². [a) $F_{1(total)} = 3{,}9448\cdot10^{-10}$ N a 31,165º; b) $3{,}945\cdot10^{-10}$ m/s² a 31,165º; c) $-2{,}11\cdot10^{-9}$ J; c) $2{,}11\cdot10^{-9}$ J]

Respuesta:

$$\vec{F}_{1(neta)} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14}$$

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\vec{u}_{12} \quad \left\{\vec{u}_{12} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \frac{0-(0\,\vec{i}+1\,\vec{j})\text{m}}{1\text{m}} = -1\,\vec{j}\right\} \vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\vec{u}_{12} = -G\frac{1\cdot 2}{1^2}(-1\,\vec{j}) = 2G\,\vec{j}$$

$$\vec{F}_{13} = -G\frac{m_1 m_3}{r_{13}^2}\vec{u}_{13} \quad \left\{\vec{u}_{13} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|} = \frac{-(1\,\vec{i}+1\,\vec{j})\text{m}}{\sqrt{2}\,\text{m}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\right\}$$

$$\vec{F}_{13} = -G\frac{m_1 m_3}{r_{13}^2}\vec{u}_{13} = -G\frac{1\cdot 3}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\right) = G\frac{3}{2\sqrt{2}}\vec{i} + G\frac{3}{2\sqrt{2}}\vec{j}$$

$$\vec{F}_{14} = -G\frac{m_1 m_4}{r_{14}^2}\vec{u}_{14} \quad \left\{\vec{u}_{14} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_4}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_4|} = \frac{0-(1\,\vec{i}+0\,\vec{j})\text{m}}{1\text{m}} = -1\,\vec{i}\right\} \vec{F}_{14} = -G\frac{m_1 m_4}{r_{14}^2}\vec{u}_{14} = -G\frac{1\cdot 4}{1^2}(-1\,\vec{i}) = 4G\,\vec{i}$$

$$\vec{F}_{1(neta)} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} = 2G\,\vec{j} + G\frac{3}{2\sqrt{2}}\vec{i} + G\frac{3}{2\sqrt{2}}\vec{j} + 4G\,\vec{i}$$

$$\vec{F}_{1(neta)} = G\left(\frac{3}{2\sqrt{2}} + 4\right)\vec{i} + G\left(2 + \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)\vec{j} = 5{,}06066G\,\vec{i} + 3{,}06066G\,\vec{j}$$

$$\left|\vec{F}_{1(neta)}\right| = \sqrt{(5{,}06066G)^2 + (3{,}06066G)^2} = G\sqrt{5{,}06066^2 + 3{,}06066^2} = 5{,}914G = 3{,}9448\cdot10^{-10}\text{ N}$$

$$\theta = \arctan\frac{F_{1y}}{F_{1x}} = \arctan\frac{3{,}06066G}{5{,}06066G} = 31{,}165^{\text{o}}$$

$$\vec{g}_1 = \frac{\vec{F}_{1(neta)}}{m_1} = \frac{5{,}06066G\,\vec{i} + 3{,}06066G\,\vec{j}}{1\text{kg}} = 3{,}37546\cdot10^{-10}\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\,\vec{i} + 2{,}04146\cdot10^{-10}\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\,\vec{j}$$

$$g_{1(neta)} = \frac{\left|\vec{F}_{1(neta)}\right|}{m_1} = \frac{3{,}9448\cdot10^{-10}\text{ N}}{1\text{kg}} = 3{,}9448\cdot10^{-10}\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$E_p = E_{p(12)} + E_{p(13)} + E_{p(14)} + E_{p(23)} + E_{p(24)} + E_{p(34)}$$

$$E_p = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}} - G\frac{m_1 m_3}{r_{13}} - G\frac{m_1 m_4}{r_{14}} - G\frac{m_2 m_3}{r_{23}} - G\frac{m_2 m_4}{r_{24}} - G\frac{m_3 m_4}{r_{34}}$$

$$E_p = -G\frac{1\cdot 2}{1} - G\frac{1\cdot 3}{\sqrt{2}} - G\frac{1\cdot 4}{1} - G\frac{2\cdot 3}{1} - G\frac{2\cdot 4}{\sqrt{2}} - G\frac{3\cdot 4}{1}$$

$$E_p = -G\left(2 + \frac{3}{\sqrt{2}} + 4 + 6 + \frac{8}{\sqrt{2}} + 12\right) = -G\left(24 + \frac{11}{\sqrt{2}}\right) = -31{,}778G = -2{,}11\cdot10^{-9}\text{ J}$$

$$W_{\text{contra-campo}} = \Delta E_p = E_{p(f)} - E_{p(i)} = 0 - (-31{,}778G) = 31{,}78G = 2{,}11\cdot10^{-9}\text{ J}$$

28) a) Un satélite artificial describe una órbita circular en torno a la Tierra. ¿Qué trabajo realiza la fuerza con la que la Tierra atrae al satélite, durante una órbita?. Justifique la respuesta.

29) La masa del planeta Júpiter es, aproximadamente, 300 veces la de la Tierra, su diámetro 10 veces mayor que el terrestre y su distancia media al Sol 5 veces mayor que la de la Tierra al Sol. a) Razone cuál sería el peso en Júpiter de un astronauta de 75 kg. b) Calcule el tiempo que Júpiter tarda en dar una vuelta completa alrededor del Sol, expresado en años terrestres. Datos: g = 9,8 m/s^2; radio orbital terrestre alrededor del Sol es de $1{,}5\cdot10^{11}$ m. [a) 2.203 N; b) $11{,}18\cdot T_{Tierra}$]

Respuesta:

$$F_{g(\text{Tierra})} = G\frac{M_T m}{R_T^2} = mg_0 = 75\,\text{kg}\times 9{,}8\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} = 735\,\text{N}$$

$$F_{g(\text{Júpiter})} = G\frac{M_J m}{R_J^2} = G\frac{300 M_T m}{(10R_T)^2} = \frac{300}{100}\cdot G\frac{M_T m}{R_T^2} = 3\cdot F_{g(\text{Tierra})} = 3\times 735\,\text{N} = 2.203\,\text{N}$$

$$F_{g(\text{Sol-Júpiter})} = F_{c(\text{Júpiter})}\left\{ G\frac{M_{Sol}M_J}{\left(R_{\text{Sol-Júpiter}}\right)^2} = M_J\omega^2 R_{\text{Sol-Júpiter}} = M_J\frac{4\pi^2}{T_{\text{Júpiter}}^2}R_{\text{Sol-Júpiter}}\right\} T_{\text{Júpiter}}^2 = \frac{4\pi^2\left(R_{\text{Sol-Júpiter}}\right)^3}{GM_{Sol}}$$

$$F_{g(\text{Sol-Tierra})} = F_{c(\text{Tierra})}\left\{ G\frac{M_{Sol}M_T}{\left(R_{\text{Sol-Tierra}}\right)^2} = M_T\omega'^2 R_{\text{Sol-Tierra}} = M_J\frac{4\pi^2}{T_{\text{Tierra}}^2}R_{\text{Sol-Tierra}}\right\} T_{\text{Tierra}}^2 = \frac{4\pi^2\left(R_{\text{Sol-Tierra}}\right)^3}{GM_{Sol}}$$

$$T_{\text{Júpiter}}^2 = \frac{4\pi^2\left(R_{\text{Sol-Júpiter}}\right)^3}{GM_{Sol}} = \frac{4\pi^2\left(5\cdot R_{\text{Sol-Tierra}}\right)^3}{GM_{Sol}} = \frac{4\pi^2\cdot 5^3\left(R_{\text{Sol-Tierra}}\right)^3}{GM_{Sol}} = 5^3\times\frac{4\pi^2\left(R_{\text{Sol-Tierra}}\right)^3}{GM_{Sol}} = 5^3\cdot T_{\text{Tierra}}^2$$

$$T_{\text{Júpiter}}^2 = 5^3\cdot T_{\text{Tierra}}^2 = 125\cdot T_{\text{Tierra}}^2 \Rightarrow \boxed{T_J = \sqrt{125}\cdot T_T = 11{,}18\cdot T_{\text{Tierra}}}$$

30) a) Analice las características de la interacción gravitatoria entre dos masas puntuales. b) ¿Cómo se ve afectada la interacción gravitatoria descrita en el apartado anterior si en las proximidades de las dos masas se coloca una tercera masa, también puntual?. Haga un esquema de las fuerzas gravitatorias que actúan sobre la tercera masa.

31) Sean las cuatro masas: m_1 = 1 kg en el punto (0;0); m_2 = 2 kg en el punto (1;0) m; m_3 = 3 kg en el punto (0;1) m; m_4 = 4 kg en el punto (-1;0) m. Calcule: a) la fuerza ejercida sobre la masa m_1 por las otras tres masas; b) el trabajo que hay que realizar sobre el sistema, contra la fuerza gravitatoria, para separar las cuatro masas hasta el infinito. Dato: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2}. [a) $2{,}40\cdot10^{-10}$ N a 123,7º; b) $W_{\text{contra-campo}} = 1{,}7\cdot10^{-9}$ J]

Respuesta:

$$\vec{F}_{1(neta)} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14}$$

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\vec{u}_{12} \quad \left\{\vec{u}_{12} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \frac{0 - 1\,m\,\vec{i}}{1\,m} = -\vec{i}\right\} \vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\vec{u}_{12} = -G\frac{1\cdot 2}{1^2}\left(-\vec{i}\right) = 2G\,\vec{i}$$

$$\vec{F}_{13} = -G\frac{m_1 m_3}{r_{13}^2}\vec{u}_{13} \quad \left\{\vec{u}_{13} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|} = \frac{0 - 1\,m\,\vec{j}}{1\,m} = -\vec{j}\right\} \vec{F}_{13} = -G\frac{m_1 m_3}{r_{13}^2}\vec{u}_{13} = -G\frac{1\cdot 3}{1^2}\left(-\vec{j}\right) = 3G\,\vec{j}$$

$$\vec{F}_{14} = -G\frac{m_1 m_4}{r_{14}^2}\vec{u}_{14} \quad \left\{\vec{u}_{14} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_4}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_4|} = \frac{0 - \left(-1\,m\,\vec{i}\right)}{1\,m} = +\vec{i}\right\} \vec{F}_{14} = -G\frac{m_1 m_4}{r_{14}^2}\vec{u}_{14} = -G\frac{1\cdot 4}{1^2}\left(+\vec{i}\right) = -4G\,\vec{i}$$

$$\vec{F}_{1(neta)} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} = 2G\,\vec{i} + 3G\,\vec{j} - 4G\,\vec{i} = -2G\,\vec{i} + 3G\,\vec{j}$$

$$\left|\vec{F}_{1(neta)}\right| = \sqrt{(-2G)^2 + (3G)^2} = \sqrt{13G^2} = \sqrt{13}G = 2,40\cdot 10^{-10}\text{ N}$$

$$\theta = \arctan\frac{F_{1(y)}}{F_{1(x)}} = \arctan\frac{3G}{-2G} = -56,3^{\circ} = 123,7^{\circ}$$

$$W_{\text{contra-campo}} = \Delta E_p = E_{p(\infty)} - E_{p(i)} = 0 - E_{p(i)}$$

$$E_{p(i)} = E_{p(12)} + E_{p(13)} + E_{p(14)} + E_{p(23)} + E_{p(24)} + E_{p(34)}$$

$$E_p = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}} - G\frac{m_1 m_3}{r_{13}} - G\frac{m_1 m_4}{r_{14}} - G\frac{m_2 m_3}{r_{23}} - G\frac{m_2 m_4}{r_{24}} - G\frac{m_3 m_4}{r_{34}}$$

$$E_p = -G\frac{1\cdot 2}{1} - G\frac{1\cdot 3}{1} - G\frac{1\cdot 4}{1} - G\frac{2\cdot 3}{\sqrt{2}} - G\frac{2\cdot 4}{2} - G\frac{3\cdot 4}{\sqrt{2}}$$

$$E_p = -G\left(2 + 3 + 4 + \frac{6}{\sqrt{2}} + 4 + \frac{12}{\sqrt{2}}\right) = -G\left(13 + \frac{18}{\sqrt{2}}\right) = -25,73\cdot G = -1,7\cdot 10^{-9}\text{ J}$$

$$W_{\text{contra-campo}} = \Delta E_p = E_{p(\infty)} - E_{p(i)} = 0 - \left(-1,7\cdot 10^{-9}\text{ J}\right) = +1,7\cdot 10^{-9}\text{ J}$$

32) La velocidad de escape de un satélite, lanzado desde la superficie de la Luna, es de 2.370 m/s. a) Explique el significado de la velocidad de escape y calcule el radio de la Luna. b) Determine la intensidad del campo gravitatorio lunar en un punto de su superficie. Datos: G = 6,67·10^{-11} N·m^2/kg^2; M_{Luna} = 7,4·10^{22} kg. [a) R_L = 1,76·10^6 m; b) g_{Luna} = 1,60 m/s^2]

Respuesta:

$$\left\{\begin{array}{l} E_{m(r)} = E_{m(r\to\infty)} = 0 \\ E_{m(r)} = \frac{1}{2}mv_{esc}^2 - G\frac{M_L m}{R_L} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}mv_{esc}^2 = G\frac{M_L m}{R_L} \\ R_L = 2G\frac{M_L}{v_{esc}^2} \end{array}\right\}$$

$$R_L = 2\times 6,67\cdot 10^{-11}\,\tfrac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\times\frac{7,4\cdot 10^{22}\text{ kg}}{\left(2.370\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 1.757.481,9\text{ m} = 1,76\cdot 10^6\text{ m}$$

$$g_{0(L)} = G\frac{M_L}{R_L^2} = 6,67\cdot 10^{-11}\,\tfrac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\times\frac{7,4\cdot 10^{22}\text{ kg}}{\left(1,76\cdot 10^6\text{ m}\right)^2} = 1,60\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

33) Dos masas puntuales m_1 = 10 kg y m_2 = 5 kg están situadas en los puntos P_1(0,3) m y P_2(4,0) m, respectivamente. a) Dibuje el campo gravitatorio producido por cada una de las masas en el punto A(0,0) m y en el punto B(4,3) m y calcule el campo gravitatorio total en ambos puntos. b) Determine el trabajo necesario para desplazar una partícula de 0,5 kg desde el punto B hasta el A. Discuta el signo de este trabajo y razone si su valor depende de la trayectoria seguida. G = 6,67·10^{-11} N·m^2/kg^2. [a) g_A = 7,7·10^{-11} m/s^2; θ_A = 15,7º; g_B = 5,58·10^{-11} m/s^2; θ_B = 221,6º; b) $W_{contra\text{-}campo}$ = -1,3·10^{-11} J]

Respuesta:

$$\vec{g}_{A1} = -G\frac{m_1}{r_{A1}^2}\vec{u}_1 \quad \left\{\vec{u}_1 = \frac{\vec{r}_A - \vec{r}_1}{|\vec{r}_A - \vec{r}_1|} = \frac{0 - 3m\,\vec{j}}{3m} = -\vec{j}\right\} \quad \vec{g}_{A1} = G\frac{m_1}{r_{A1}^2}\vec{j}$$

$$\vec{g}_{A2} = -G\frac{m_2}{r_{A2}^2}\vec{u}_2 \quad \left\{\vec{u}_2 = \frac{\vec{r}_A - \vec{r}_2}{|\vec{r}_A - \vec{r}_2|} = \frac{0 - 4m\,\vec{i}}{4m} = -\vec{i}\right\} \quad \vec{g}_{A2} = G\frac{m_2}{r_{A2}^2}\vec{i}$$

$$\vec{g}_A = \vec{g}_{A1} + \vec{g}_{A2} = G\frac{m_1}{r_{A1}^2}\vec{i} + G\frac{m_2}{r_{A2}^2}\vec{j} = 7,41\cdot 10^{-11}\,\tfrac{m}{s^2}\,\vec{i} + 2,0844\cdot 10^{-11}\,\tfrac{m}{s^2}\,\vec{j}$$

$$|\vec{g}_A| = 7,70\cdot 10^{-11}\,\frac{m}{s^2} \quad \Rightarrow \quad \theta_A = \arctan\frac{2,0844\cdot 10^{-11}\,\frac{m}{s^2}}{7,41\cdot 10^{-11}\,\frac{m}{s^2}} = 15,7^o$$

$$\vec{g}_{B1} = -G\frac{m_1}{r_{B1}^2}\vec{u}_1 \quad \left\{\vec{u}_1 = \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_1}{|\vec{r}_B - \vec{r}_1|} = \frac{4m\,\vec{i} + 3m\,\vec{j} - 3m\,\vec{j}}{4m} = \vec{i}\right\} \quad \vec{g}_{B1} = -G\frac{m_1}{r_{B1}^2}\vec{i}$$

$$\vec{g}_{B2} = -G\frac{m_2}{r_{B2}^2}\vec{u}_2 \quad \left\{\vec{u}_2 = \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_2}{|\vec{r}_B - \vec{r}_2|} = \frac{4m\,\vec{i} + 3m\,\vec{j} - 4m\,\vec{i}}{3m} = \vec{j}\right\} \quad \vec{g}_{B2} = -G\frac{m_2}{r_{B2}^2}\vec{j}$$

$$\vec{g}_B = \vec{g}_{B1} + \vec{g}_{B2} = -G\frac{m_1}{r_{B1}^2}\vec{i} - G\frac{m_2}{r_{B2}^2}\vec{j} = -4,17\cdot 10^{-11}\,\tfrac{m}{s^2}\,\vec{i} - 3,7055\cdot 10^{-11}\,\tfrac{m}{s^2}\,\vec{j}$$

$$|\vec{g}_B| = 5,58\cdot 10^{-11}\,\frac{m}{s^2} \quad \Rightarrow \quad \theta_B = \arctan\frac{-3,7055\cdot 10^{-11}\,\frac{m}{s^2}}{-4,17\cdot 10^{-11}\,\frac{m}{s^2}} = 221,6^o$$

$$W_{contra\text{-}campo} = \Delta E_p = E_{p(A)} - E_{p(B)}$$

$$E_{p(B)} = -G\frac{m_1 m}{r_{B1}} - G\frac{m_2 m}{r_{B2}} = -8,34\cdot 10^{-11}\,J - 5,558\cdot 10^{-11}\,J = -1,40\cdot 10^{-10}\,J$$

$$E_{p(A)} = -G\frac{m_1 m}{r_{A1}} - G\frac{m_2 m}{r_{A2}} = -1,11\cdot 10^{-10}\,J - 4,17\cdot 10^{-11}\,J = -1,53\cdot 10^{-10}\,J$$

$$W_{contra\text{-}campo} = \Delta E_p = E_{p(A)} - E_{p(B)} = -1,53\cdot 10^{-10}\,J + 1,40\cdot 10^{-10}\,J = -1,3\cdot 10^{-11}\,J$$

$$W_{contra\text{-}campo} = \Delta E_p = E_{p(\infty)} - E_{p(i)} = 0 - E_{p(i)}$$

$$E_{p(i)} = E_{p(12)} + E_{p(13)} + E_{p(14)} + E_{p(23)} + E_{p(24)} + E_{p(34)}$$

$$E_p = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}} - G\frac{m_1 m_3}{r_{13}} - G\frac{m_1 m_4}{r_{14}} - G\frac{m_2 m_3}{r_{23}} - G\frac{m_2 m_4}{r_{24}} - G\frac{m_3 m_4}{r_{34}}$$

$$E_p = -G\frac{1\cdot 2}{1} - G\frac{1\cdot 3}{1} - G\frac{1\cdot 4}{1} - G\frac{2\cdot 3}{\sqrt{2}} - G\frac{2\cdot 4}{2} - G\frac{3\cdot 4}{\sqrt{2}}$$

$$E_p = -G\left(2 + 3 + 4 + \frac{6}{\sqrt{2}} + 4 + \frac{12}{\sqrt{2}}\right) = -G\left(13 + \frac{18}{\sqrt{2}}\right) = -25,73\cdot G = -1,7\cdot 10^{-9}\,J$$

$$W_{contra\text{-}campo} = \Delta E_p = E_{p(\infty)} - E_{p(i)} = 0 - \left(-1,7\cdot 10^{-9}\,J\right) = +1,7\cdot 10^{-9}\,J$$

34) a) Deduzca la expresión de la energía potencial gravitatoria de una masa puntual en presencia de otra. b) Deduzca la expresión de la velocidad de escape de un cuerpo desde la superficie de un planeta esférico de masa M y radio R. c) Explique las características de la interacción gravitatoria entre dos masas puntuales. d) ¿Qué trabajo realiza la fuerza que actúa sobre una de las dos masas puntuales al describir media órbita circular de radio R alrededor de la otra? ¿Y si se desplazara desde esa distancia R hasta el infinito? Razone las respuestas.

35) Se desea lanzar un satélite de 500 kg desde la superficie terrestre para que describa una órbita circular de radio $r = 10 \cdot R_T$. a) ¿A qué velocidad debe lanzarse para que alcance dicha altura? Explique los cambios de energía que tienen lugar desde su lanzamiento hasta ese momento. b) ¿Cómo cambiaría la energía mecánica del satélite en órbita si el radio orbital fuera el doble?. Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg ; $R_T = 6.370$ km. [a) $v_{lanzamiento} = 10.907$ m/s; b) aumentaría en 782,7 MJ]

Respuesta:

La diferencia de energía mecánica entre la órbita y la superficie de la Tierra se la aporta el motor que le aumenta inicialmente su energía cinética.

$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(g)} + W_{motor} \quad \Rightarrow \quad W_{motor} = \Delta E_c + \Delta E_{p(g)} = \Delta E_m$$

$$\begin{cases} W_{motor} = \Delta E_m = \left(\frac{1}{2} m v_{orb}^2 - G\frac{M_T m}{r}\right)_{r=10R_T} - \left(\frac{1}{2} m v_{Tierra}^2 - G\frac{M_T m}{R_T}\right)_{r=R_T} \\ W_{motor} = \Delta E'_c = \frac{1}{2} m v_{lanzamiento}^2 - \frac{1}{2} m v_{Tierra}^2 \end{cases}$$

$$W_{motor} = \frac{1}{2} m v_{lanz}^2 - \frac{1}{2} m v_{Tierra}^2 = \left(-\frac{1}{2} G\frac{M_T m}{r}\right)_{r=10R_T} - \left(\frac{1}{2} m v_{Tierra}^2 - G\frac{M_T m}{R_T}\right)_{r=R_T}$$

$$\frac{1}{2} m v_{lanz}^2 = -\frac{1}{2} G\frac{M_T m}{10R_T} + G\frac{M_T m}{R_T} \Rightarrow \quad v_{lanz}^2 = -G\frac{M_T}{10R_T} + 2G\frac{M_T}{R_T} = 1{,}9G\frac{M_T}{R_T} \quad v_{lanz} = 10.907{,}4\,\tfrac{m}{s}$$

$$v_{Tierra} = \omega R_T \cos\lambda = \frac{2\pi}{24 \times 3.600} \times 6{,}37 \cdot 10^6\ m \times \cos\lambda = 463 \cdot \cos\lambda\,\tfrac{m}{s}$$

$$\Delta v = v_{lanz} - v_{Tierra} \approx 10.907{,}4\,\tfrac{m}{s} = 10.444\,\tfrac{m}{s}$$

$$\Delta E_m = \left(\frac{1}{2} m v_{orb}^2 - G\frac{M_T m}{r}\right)_{r=20R_T} - \left(\frac{1}{2} m v_{orb}^2 - G\frac{M_T m}{r}\right)_{r=10R_T}$$

$$\Delta E_m = \left(-\frac{1}{2} G\frac{M_T m}{r}\right)_{r=20R_T} - \left(-\frac{1}{2} G\frac{M_T m}{r}\right)_{r=10R_T} = -\frac{1}{2} G\frac{M_T m}{20R_T} + \frac{1}{2} G\frac{M_T m}{10R_T}$$

$$\Delta E_m = G\frac{M_T m}{R_T}\left(\frac{1}{20} - \frac{1}{40}\right) = \frac{1}{40} G\frac{M_T m}{R_T} = \frac{1}{40} G\frac{M_T m}{R_T} = 7{,}827 \cdot 10^8\ J = 782{,}7\,MJ$$

36) Un meteorito de 400 kg que se dirige en caída libre hacia la Tierra, tiene una velocidad de 20 m/s a una altura h = 500 km sobre la superficie terrestre. Determine razonadamente: a) el peso del meteorito a dicha altura; b) la velocidad con la que impactará sobre la superficie terrestre despreciando la fricción con la atmósfera. Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg ; $R_T = 6.370$ km. [a) 3.380 N; b) 3.937 m/s]

Respuesta:

$$P = mg = mG\frac{M_T}{r^2} = 400\,\text{kg}\times 6,67\cdot 10^{-11}\,\tfrac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2}\times\frac{5,98\cdot 10^{24}\,\text{kg}}{\left(6,37\cdot 10^6+5,0\cdot 10^5\right)^2\,\text{m}^2} = 3.380\,\text{N}$$

$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(g)} \quad\Rightarrow\quad 0 = \Delta E_c + \Delta E_{p(g)} = \left(E_c + E_{p(g)}\right)_f - \left(E_c + E_{p(g)}\right)_i$$

$$\begin{cases}\left(E_c + E_{p(g)}\right)_f = \left(E_c + E_{p(g)}\right)_i \\ \dfrac{1}{2}mv^2_{impacto} - G\dfrac{M_T m}{R_T} = \dfrac{1}{2}mv^2_{caída} - G\dfrac{M_T m}{R_T+h}\end{cases}$$

$$v^2_{impacto} = 2G\frac{M_T}{R_T} + v^2_{caída} - 2G\frac{M_T}{R_T+h} = 2GM_T\left(\frac{1}{R_T}-\frac{1}{R_T+h}\right) + v^2_{caída} = 1,550\cdot 10^7\left(\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2$$

$$v_{impacto} = 3.937,5\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

37) La masa de la Tierra es 81 veces la de la Luna y la distancia entre sus centros es $3,85\cdot 10^5$ km. a) Calcula en qué punto, entre la Tierra y la Luna, se encontraría en equilibrio un meteorito de 200 kg; b) ¿cuál sería la energía potencial del meteorito en ese punto?. Datos: $G = 6,67\cdot 10^{-11}$ $\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$; $M_L = 7,35\cdot 10^{22}$ kg. [a) 345.600 km del centro de la Tierra; b) $-2,5553\cdot 10^8$ J]

Respuesta:

$$\left.\begin{cases}F_{T-m} = F_{L-m} \\ F_{T-m} = G\dfrac{M_T m}{r^2} = F_{L-m} = G\dfrac{M_L m}{r'^2}\end{cases}\right\}\begin{cases}G\dfrac{M_T m}{r^2} = G\dfrac{M_L m}{r'^2} \\ \dfrac{M_T}{r^2} = \dfrac{M_L}{r'^2}\end{cases}$$

$$\frac{81\cdot M_L}{r^2} = \frac{M_L}{\left|d_{T-L}-r\right|^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{81}{r^2} = \frac{1}{\left|d-r\right|^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{9}{r} = \frac{1}{\left|d-r\right|} \quad\Rightarrow\quad 9d-9r = r$$

$$r_{T-m} = 0,9\cdot d = 0,9\times 3,84\cdot 10^5\,\text{km} = 345.600\,\text{km}$$

$$r'_{L-m} = 0,1\cdot d = 0,1\times 3,84\cdot 10^5\,\text{km} = 38.400\,\text{km}$$

$$E_{p(meteorito)} = E_{p(T-meteorito)} + E_{p(L-meteorito)} = -G\frac{M_T m}{r_{T-m}} - G\frac{M_L m}{r'_{L-m}}$$

$$E_{p(T-meteorito)} = -6,67\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2}\times\frac{81\times 7,35\cdot 10^{22}\,\text{kg}\times 200\,\text{kg}}{3,456\cdot 10^8\,\text{m}} = -2,30\cdot 10^8\,\text{J}$$

$$E_{p(L-meteorito)} = -6,67\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2}\times\frac{7,35\cdot 10^{22}\,\text{kg}\times 200\,\text{kg}}{3,84\cdot 10^7\,\text{m}} = -2,553\cdot 10^7\,\text{J}$$

$$E_{p(meteorito)} = E_{p(T-meteorito)} + E_{p(L-meteorito)} = -2,30\cdot 10^8\,\text{J} - 2,553\cdot 10^7\,\text{J} = -2,5553\cdot 10^8\,\text{J}$$

38) Un satélite artificial de 400 kg describe una órbita circular a una altura h sobre la superficie terrestre. El valor de la gravedad a dicha altura es la tercera parte de su valor en la superficie de la Tierra. a) Explique si hay que realizar trabajo para mantener el satélite en esa órbita y calcule el valor de h; b) determine el período de la órbita y la energía mecánica del satélite. Datos: g = 9,8 m/s^2; $R_T = 6,37\cdot 10^6$ m. [a) h = 4.663,163 km; b) T = 3,2 h; $E_m = -7,2\cdot 10^9$ J]

Respuesta:

No hay que realizar trabajo ya que en la órbita la velocidad es constante.

$$\left.\begin{cases} g_0 = G\dfrac{M_T}{R_T^2} \\ g = G\dfrac{M_T}{\left(R_T + h\right)^2} \end{cases}\right\} \frac{g_0}{g} = \frac{g_0}{\frac{1}{3}g_0} = 3 = \frac{G\dfrac{M_T}{R_T^2}}{G\dfrac{M_T}{r^2}} = \frac{r^2}{R_T^2}$$

$$\frac{r}{R_T} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{3} \cdot R_T = 11.033.163\,\text{m} = 11.033{,}163\,\text{km}$$

$$h = r - R_T = 11.033{,}163\,\text{km} - 6.370\,\text{km} = 4.663{,}163\,\text{km}$$

$$\left.\begin{cases} F_g = F_c \\ G\dfrac{M_T m}{r^2} = m\dfrac{v_{orb}^2}{r} \end{cases}\right\} \begin{cases} v_{orb}^2 = G\dfrac{M_T}{r} = \dfrac{4\pi^2}{T^2} r^2 \\ T^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM_T} r^3 \end{cases}$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM_T} r^3} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{g_0 R_T^2} r^3} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{9{,}8\,\frac{m}{s^2} \times \left(6{,}37 \cdot 10^6\,\text{m}\right)^2}\left(11.033.163\,\text{m}\right)^3} = 11.547\,\text{s} = 3{,}2\,\text{h}$$

$$E_m = E_c + E_{p(g)} = \frac{1}{2} m v_{orb}^2 - G\frac{M_T m}{r} \qquad \left.\begin{cases} F_g = F_c \\ G\dfrac{M_T m}{r^2} = m\dfrac{v_{orb}^2}{r} \end{cases}\right\} \left\{ v_{orb}^2 = G\frac{M_T}{r} \right\}$$

$$E_m = E_c + E_{p(g)} = \frac{1}{2} m G\frac{M_T}{r} - G\frac{M_T m}{r} = -\frac{1}{2} G\frac{M_T m}{r} = -\frac{1}{2}\frac{g_0 R_T^2 m}{r}$$

$$E_m = -\frac{1}{2}\frac{g_0 R_T^2 m}{r} = -\frac{1}{2} \times \frac{9{,}8\,\frac{m}{s^2} \times \left(6{,}37 \cdot 10^6\,\text{m}\right)^2 \times 400\,\text{kg}}{11.033.163\,\text{m}} = -7{,}2083 \cdot 10^9\,\text{J}$$

39) Desde la superficie terrestre se desea lanzar un satélite, de masa 100 kg, para que describa una órbita circular alrededor de la Tierra de radio $r = 5 \cdot R_T$. Calcule la energía cinética de lanzamiento para colocarlo en esa órbita y la velocidad de lanzamiento. Datos: $g_0 = 9{,}8\ m/s^2$; $R_T = 6.370$ km. [$E_{c(lanz)} = 5{,}618 \cdot 10^9$ J; $v_{lanz} = 10.600$ m/s]

Respuesta:

$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(g)} + W_{motor}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} W_{motor} = \Delta E_c + \Delta E_{p(g)} = \Delta E_m = \left(\dfrac{1}{2} m v_{orb}^2 - G\dfrac{M_T m}{r}\right)_{r=5R_T} - \left(\dfrac{1}{2} m v_{Tierra}^2 - G\dfrac{M_T m}{R_T}\right)_{r=R_T} \\ W_{motor} = \Delta E'_c = \dfrac{1}{2} m v_{lanzamiento}^2 - \dfrac{1}{2} m v_{Tierra}^2 \end{array}}$$

$$\vec{F}_g = \vec{F}_c \quad \Rightarrow \quad G\frac{M_T m}{r^2} = m\frac{v_{orb}^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v_{orb}^2 = G\frac{M_T}{r}$$

$$\begin{cases} W_{motor} = \Delta E_m = \left(-\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r}\right)_{r=5R_T} - \left(\frac{1}{2}mv_{Tierra}^2 - G\frac{M_T m}{R_T}\right)_{r=R_T} \\ W_{motor} = \Delta E'_c = \frac{1}{2}mv_{lanz}^2 - \frac{1}{2}mv_{Tierra}^2 \end{cases}$$

$$W_{motor} = \Delta E'_c = \Delta E_m = \frac{1}{2}mv_{lanz}^2 - \frac{1}{2}mv_{Tierra}^2 = \left(-\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r}\right)_{r=5R_T} - \left(\frac{1}{2}mv_{Tierra}^2 - G\frac{M_T m}{R_T}\right)_{r=R_T}$$

$$E'_{c(lanz)} = \frac{1}{2}mv_{lanz}^2 = \left(-\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r}\right)_{r=5R_T} - \left(-G\frac{M_T m}{R_T}\right)_{r=R_T} = -\frac{1}{2}g_0 R_T^2 \frac{m}{5R_T} + g_0 R_T^2 \frac{m}{R_T}$$

$$E'_{c(lanz)} = g_0 R_T m\left(-\frac{1}{10}+1\right) = 0{,}9 g_0 R_T m = 0{,}9 \times 9{,}8\,\tfrac{m}{s^2} \times 6{,}37\cdot 10^6\ m \times 100\,kg = 5{,}61834\cdot 10^9\ J$$

$$v_{lanz} = \sqrt{\frac{2\cdot E'_{c(lanz)}}{m}} = \sqrt{\frac{2\times 5{,}61834\cdot 10^9\ J}{100\,kg}} = 10.600{,}3\,\tfrac{m}{s}$$

<u>Preguntas de teoría de interacción gravitatoria</u>

1. Suponga que la Tierra redujese su radio a la mitad manteniendo su masa. a) ¿Aumentaría la intensidad del campo gravitatorio en su nueva superficie?. b) ¿Se modificaría sustancialmente su órbita alrededor del Sol?. Justifique las respuestas.

2. Demuestre, razonadamente, las siguientes afirmaciones: a) a una órbita de radio R de un satélite le corresponde una velocidad orbital v característica; b) la masa M de un planeta puede calcularse a partir de la masa m y del radio orbital R de uno de sus satélites.

3. Un satélite artificial describe una órbita circular alrededor de la Tierra. a) Explique qué se entiende por velocidad orbital y deduzca razonadamente su expresión. b) Conociendo el radio de la órbita y su período, ¿podemos determinar las masas de la Tierra y del satélite? Razone la respuesta

4. a) Haciendo uso de consideraciones energéticas, determine la velocidad mínima que habría que imprimirle a un objeto de masa m, situado en la superficie de un planeta de masa M y radio R, para que saliera de la influencia del campo gravitatorio del planeta. b) Se desea que un satélite se encuentre en una órbita geoestacionaria. ¿Con qué período de revolución y a qué altura debe hacerlo?

5. a) Enuncie la ley de gravitación universal y comente el significado físico de las magnitudes que intervienen en ella. b) Según la ley de gravitación universal, la fuerza que ejerce la Tierra sobre un cuerpo es proporcional a la masa de éste. ¿Por qué no caen más deprisa los cuerpos con mayor masa?

6. a) Explique qué se entiende por velocidad de escape y deduzca razonadamente su expresión. b) Si consideramos la presencia de la atmósfera, ¿qué ocurriría si lanzásemos un cohete desde la superficie de la Tierra con una velocidad igual a la velocidad de escape? Razone la respuesta.

7. Una partícula de masa m, situada en un punto A, se mueve en línea recta hacia otro punto B, en una región en la que existe un campo gravitatorio creado por una masa M. a) Si el valor del potencial gravitatorio en el punto B es mayor que en el punto A, razone si la partícula se acerca o se aleja de M. b) Explique las transformaciones energéticas de la partícula durante el desplazamiento indicado y escriba su expresión. ¿Qué cambios cabría esperar si la partícula fuera de A a B siguiendo una trayectoria no rectilínea?

8. a) La energía potencial de un cuerpo de masa m en el campo gravitatorio producido por otro cuerpo de masa m' depende de la distancia entre ambos. ¿Aumenta o disminuye dicha energía potencial al alejar los dos cuerpos? ¿Por qué?. b) ¿Qué mide la variación de energía potencial del cuerpo de masa m al desplazarse desde una posición A hasta otra B? Razone la respuesta.

9. a) ¿Qué se entiende por fuerza conservativa? Explique la relación entre fuerza y energía potencial. b) Sobre un cuerpo actúa una fuerza conservativa. ¿Cómo varía su energía potencial al desplazarse en la dirección y sentido de la fuerza? ¿Qué mide la variación de energía potencial del cuerpo al desplazarse desde un punto A hasta otro B? Razone las respuestas.

10. Razone la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones: a) El peso de un cuerpo en la superficie de un planeta cuya masa fuera la mitad que la de la Tierra sería la mitad de su peso en la superficie de la Tierra. b) El estado de "ingravidez" de los astronautas en el interior de las naves espaciales orbitando alrededor de la Tierra se debe a que la fuerza que ejerce la Tierra sobre ellos es nula.

11. Un satélite describe una órbita circular alrededor de la Tierra. Conteste razonadamente a las siguientes preguntas: a) ¿Qué trabajo realiza la fuerza de atracción hacia la Tierra a lo largo de media órbita?. b) Si la órbita fuera elíptica, ¿cuál sería el trabajo de esa fuerza a lo largo de una órbita completa?

12. a) Considere un punto situado a una determinada altura sobre la superficie terrestre. ¿Qué velocidad es mayor en ese punto, la orbital o la de escape?. b) A medida que aumenta la distancia de un cuerpo a la superficie de la Tierra disminuye la fuerza con que es atraído por ella. ¿Significa eso que también disminuye su energía potencial? Razone las respuestas.

13. Dibuje en un esquema las líneas de fuerza del campo gravitatorio creado por una masa puntual M. Sean A y B dos puntos situados en la misma línea de fuerza del campo, siendo B el punto más cercano a M. a) Si una masa, m, está situada en A y se traslada a B, ¿aumenta o disminuye su energía potencial? ¿Por qué?. b) Si una masa, m, está situada en A y se traslada a otro punto C, situado a la misma distancia de M que A, pero en otra línea de fuerza, ¿aumenta o disminuye la energía potencial? Razone su respuesta.

14. Dibuje en un esquema las líneas de fuerza del campo gravitatorio creado por una masa puntual M. Sean A y B dos puntos situados en la misma línea de fuerza del campo, siendo B el punto más cercano a M. a) Si una masa, m, está situada en A y se traslada a B, ¿aumenta o disminuye su energía potencial? ¿Por qué?. b) Si una masa, m, está situada en A y se traslada a otro punto C, situado a la misma distancia de M que A, pero en otra línea de fuerza, ¿aumenta o disminuye la energía potencial? Razone su respuesta.

15. Si por alguna causa la Tierra redujese su radio a la mitad manteniendo su masa, razone cómo se modificarían: a) La intensidad del campo gravitatorio en su superficie. b) Su órbita alrededor del Sol.

16. Razone si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones: a) Según la ley de la gravitación la fuerza que ejerce la Tierra sobre un cuerpo es directamente proporcional a la masa de éste. Sin embargo, dos cuerpos de diferente masa que se sueltan desde la misma altura llegan al suelo simultáneamente. b) El trabajo realizado por una fuerza conservativa en el desplazamiento de una partícula entre dos puntos es menor si la trayectoria seguida es el segmento que une dichos puntos.

17. Conteste razonadamente a las siguientes preguntas: a) Si se redujera el radio de la órbita lunar en torno a la Tierra, ¿aumentaría su velocidad orbital?. b) ¿Dónde es mayor la velocidad de escape, en la Tierra o en la Luna?

18. a) Enuncie las leyes de Kepler. b) Razone, a partir de la segunda ley de Kepler, cómo cambia la velocidad de un planeta a lo largo de su órbita al variar la distancia al Sol.

19. a) Enuncie las leyes de Kepler y razone si la velocidad de traslación de un planeta alrededor del Sol es la misma en cualquier punto de la órbita. b) Justifique si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: "la gravedad en la superficie de Venus es el 90% de la gravedad en la superficie de la Tierra y, en consecuencia, si midiésemos en Venus la constante de gravitación universal, G, el valor obtenido sería el 90% del medido en la Tierra".

20. a) Analice las características de la interacción gravitatoria entre dos masas puntuales. b) ¿Cómo se ve afectada la interacción gravitatoria descrita en el apartado anterior si en las proximidades de las dos masas se coloca una tercera masa, también puntual?. Haga un esquema de las fuerzas gravitatorias que actúan sobre la tercera masa.

21. a) Haciendo uso de consideraciones energéticas, deduzca la expresión de la velocidad mínima que habría que imprimirle a un objeto de masa m, situado en la superficie de un planeta de masa M y radio R, para que saliera de la influencia del campo gravitatorio del planeta. b) Se desea que un satélite se encuentre en una órbita geoestacionaria. Razone con qué período de revolución y a qué altura debe hacerlo.

22. a) Explique qué se entiende por velocidad orbital de un satélite y deduzca razonadamente su expresión para un satélite artificial que describe una órbita circular alrededor de la Tierra. b) ¿Se pueden determinar las masas de la Tierra y del satélite conociendo los datos de la órbita descrita por el satélite? Razone la respuesta.

23. a) Enuncie las leyes de Kepler. b) El radio orbital de un planeta es N veces mayor que el de la Tierra. Razone cuál es la relación entre sus períodos.

24. a) Explique qué se entiende por velocidad de escape y deduzca razonadamente su expresión. b) Razone qué energía habría que comunicar a un objeto de masa m, situado a una altura h sobre la superficie de la Tierra, para que se alejara indefinidamente de ella.

25. a) Enuncie las leyes de Kepler. b) Demuestre la tercera ley de Kepler a partir de la ley de gravitación universal de Newton para un órbita circular.

26. a) Indique las características de la interacción gravitatoria entre dos masas puntuales. b) Explique en qué punto, entre dos masas puntuales, puede encontrarse en equilibrio una tercera masa puntual y cuál sería su energía potencial.

27. a) Explique qué se entiende por velocidad orbital y deduzca su expresión para un satélite que describe una órbita circular alrededor de la Tierra. b) Razone cómo variaría la energía mecánica del satélite si se duplicara su masa.

28. a) Relación entre campo y potencial gravitatorios. b) Dibuje en un esquema las líneas del campo gravitatorio creado por una masa puntual M. Una masa m, situada en un punto A, se traslada hasta otro punto B, más próximo a M. Razone si aumenta o disminuye su energía potencial.

29. a) Escriba la ley de gravitación universal y explique las características de la interacción gravitatoria. b) Según la ley de gravitación, la fuerza que la Tierra ejerce sobre un cuerpo es proporcional a la masa de éste. Razone por qué no caen con mayor velocidad los cuerpos con mayor masa.

30. a) Energía potencial gravitatoria terrestre. b) Dos satélites idénticos giran alrededor de la Tierra en órbitas circulares de distinto radio. ¿Cuál de los dos se moverá a mayor velocidad? ¿Cuál de los dos tendrá mayor energía mecánica? Razone las respuestas.

31. a) Velocidad orbital de un satélite. b) Suponga que el radio de la Tierra se redujera a la mitad de su valor manteniéndose constante la masa terrestre. ¿Afectaría ese cambio al periodo de revolución de la Tierra alrededor del Sol? Razone la respuesta.

32. a) Explique las características de la interacción gravitatoria entre dos masas puntuales. b) ¿Qué trabajo realiza la fuerza que actúa sobre una de las dos masas puntuales al describir media órbita circular de radio R alrededor de la otra? ¿Y si se desplazara desde esa distancia R hasta el infinito?. Razone las respuestas.

33. a) Energía potencial gravitatoria de una masa puntual en presencia de otra. b) Deduzca la velocidad de escape de un cuerpo desde la superficie de un planeta esférico de masa M y radio R.

34. a) Explique el movimiento de un satélite en órbita circular en torno a la Tierra y deduzca la expresión de la velocidad orbital. b) Indique el significado de velocidad de escape y razone cómo cambia la velocidad de escape de un cuerpo si varía su altura sobre la superficie terrestre de $2 \cdot R_T$ a $3 \cdot R_T$.

35. a) Enuncie las leyes de Kepler. b) Razone, a partir de la segunda ley de Kepler y con la ayuda de un esquema, cómo cambia la velocidad de un planeta al describir su órbita elíptica en torno al Sol.