Cuestiones y Problemas resueltos de «Trabajo y Energía. Campos escalares y vectoriales»

Cuestiones

1) Conteste razonadamente a las siguientes preguntas: a) ¿puede asociarse una energía potencial a una fuerza de rozamiento?; b) ¿qué tiene más sentido físico, la energía potencial en un punto o la variación de energía potencial entre dos puntos?

Problemas

1) Un automóvil de 1.200 kg está subiendo una pendiente de inclinación 5º. La fuerza de fricción tiene de magnitud 500 N. Si la longitud de la pendiente es de 300 m, ¿cuál será la magnitud de la fuerza que lo hace subir? sabiendo que el trabajo neto hecho por todas las fuerzas actuantes sobre el coche es de +150.000 J. [2.025 N]

Respuesta:

$$W_{neto} = \Delta E_c = W_{F(externa)} + W_{P(gravedad)} + W_{roz} = 150.000\ \text{J}$$

$$W_{neto} = \Delta E_c = 150.000\ \text{J} \begin{cases} W_{P(gravedad)} = P \cdot d \cdot \cos 95^o = (P \operatorname{sen} 5^o) \cdot d \cdot \cos 180^o \\ W_{P(gravedad)} = 1200\ \text{kg} \times 9,8\ \frac{m}{s^2} \times 300\ \text{m} \times \cos 95^o = -307.485,5\ \text{J} \\ W_{roz} = f_{roz} \cdot d \cdot \cos 180^o = 500\ \text{N} \times 300\ \text{m} \times (-1) = -150.000\ \text{J} \end{cases}$$

$$W_{F(externa)} = W_{neto} - W_{P(gravedad)} - W_{roz} = 150.000\ \text{J} + 307.485,5\ \text{J} + 150.000\ \text{J} = 607.485,5\ \text{J}$$

$$W_{F(externa)} = F_{ext} \cdot d \cdot \cos 0^o \quad \{F_{ext} = 2.025\ \text{N}$$

2) Un avión, de masa 6.000 kg, está volando inclinado en un ángulo 10 grados hacia abajo durante una distancia de 1.700 m. Sobre el avión actúan cuatro fuerzas: su peso, la fuerza ascendente que actúa perpendicular a la dirección del avión, la fuerza de los motores (de magnitud 18.000 N) y la fuerza de la resistencia del aire opuesta a la dirección del movimiento del avión. El trabajo neto realizado por estas cuatro fuerzas es $2,9 \cdot 10^7$ J. Calcula: a) el trabajo hecho por la resistencia del aire, y b) la magnitud de la fuerza de la resistencia del aire. [a) $-1,896 \cdot 10^7$ J; b) -11.151,7 N]

Respuesta:

$$W_{neto} = \Delta E_c = W_{F(motor)} + W_{P(gravedad)} + W_{F(normal)} + W_{roz} = 2,9 \cdot 10^7\ \text{J}$$

$$W_{neto} = \Delta E_c = 2,9 \cdot 10^7\ \text{J} \begin{cases} W_{P(gravedad)} = P \cdot d \cdot \cos(-80^o) = (P \operatorname{sen} 10^o) \cdot d \cdot \cos 0^o \\ W_{P(gravedad)} = 6.000\ \text{kg} \times 9,8\ \frac{m}{s^2} \times 1.700\ \text{m} \times \cos(-80^o) = 17.357.872\ \text{J} \\ W_{F(motor)} = F_{motor} \cdot d \cdot \cos 0^o = 18.000\ \text{N} \times 1.700\ \text{m} \times 1 = 30.600.000\ \text{J} \end{cases}$$

$$W_{F(normal)} = F_n \cdot d \cdot \cos 90^o = F_n \cdot \Delta s \cdot 0 = 0\ \text{J}$$

$$W_{roz} = W_{neto} - W_{F(motor)} - W_{P(gravedad)} = 2,9 \cdot 10^7\ \text{J} - 30.600.000\ \text{J} - 17.357.872\ \text{J} = -18.957.872\ \text{J}$$

$$W_{roza} = f_{roz} \cdot d \cdot \cos 180^o = -f_{roz} \cdot d = -18.957.872\ \text{J} \quad \{f_{roz} = -11.151,7\ \text{N}$$

3) La frenada de un coche tiene 65 m de longitud. El coeficiente de fricción cinética entre los neumáticos y la carretera es 0,80. ¿Qué velocidad llevaba el coche antes de aplicar los frenos?. [31,9 m/s]

Respuesta:

$$W_{neto} = \Delta E_c = W_{roza} \quad \left\{\begin{array}{l} f_{roz} \cdot d \cdot \cos 180^o = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = \\ -\mu_k m g d = 0 - \frac{1}{2} m v_i^2 \\ \mu_k g d = \frac{1}{2} v_i^2 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} v_i^2 = 2\mu_k g d \\ v_i = 31{,}9 \ \frac{m}{s} \end{array}\right.$$

4) Una nave espacial viaja a través del espacio vacío con una velocidad de 11.000 m/s, siendo su masa de 50.000 kg. Suponemos que no actúan fuerzas sobre la nave excepto aquellas generadas por su motor. El motor ejerce una fuerza constante de 400 kN, que es paralela al desplazamiento, y si ésta se mantiene durante un desplazamiento de 2.500 km, determina: a) la energía cinética final de la nave; b) la velocidad final de la nave. [a) $4{,}025 \cdot 10^{12}$ J; b) 12.688,6 m/s]

Respuesta:

$$\left\{\begin{array}{l} W_{neto} = \Delta E_c = W_{motor} \\ \Delta E_c = E_{c(f)} - E_{c(i)} = W_{motor} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} E_{c(i)} = \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} \times 5{,}0 \cdot 10^4 \ kg \times \left(1{,}1 \cdot 10^4 \ \frac{m}{s}\right)^2 = 3{,}025 \cdot 10^{12} \ J \\ W_{motor} = F_{motor} \cdot d \cdot \cos 0^o = 4{,}0 \cdot 10^5 \ N \times 2{,}5 \cdot 10^6 \ m = 1{,}0 \cdot 10^{12} \ J \end{array}\right.$$

$$E_{c(f)} = E_{c(i)} + W_{motor} = 3{,}025 \cdot 10^{12} \ J + 1{,}0 \cdot 10^{12} \ J = 4{,}025 \cdot 10^{12} \ J$$

$$E_{c(f)} = \frac{1}{2} m v_f^2 \quad \Rightarrow \quad v_f^2 = \frac{2 \cdot E_{c(f)}}{m} = \frac{2 \times 4{,}025 \cdot 10^{12} \ J}{5{,}0 \cdot 10^4 \ kg} = 1{,}61 \cdot 10^8 \ \frac{m^2}{s^2} \quad \Rightarrow \quad v_f = 12.688{,}6 \ \frac{m}{s}$$

5) Un esquiador de 58 kg está bajando por una pendiente de 25º, siendo la fuerza de fricción cinética de 70 N. Si la velocidad inicial del esquiador era de 3,6 m/s, e ignoramos la resistencia del aire, después de recorrer 57 m determina: a) la energía cinética final esquiador; b) la velocidad final. [a) 10.078,1 J; b) 18,64 m/s]

Respuesta:

$$W_{neto} = \Delta E_c = W_{gravedad} + W_{roz} \quad \left\{ E_{c(i)} = \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} \times 58 \, kg \times \left(3{,}6 \ \frac{m}{s}\right)^2 = 375{,}8 \, J \right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} W_{P(gravedad)} = P \cdot d \cdot \cos\left(-65^o\right) = P \cdot d \cdot \cos 295^o = 58 \ kg \times 9{,}8 \ \frac{m}{s^2} \times 57 \, m \times \cos\left(-65^o\right) = 13.692{,}3 \, J \\ W_{roz} = f_{roz} \cdot d \cdot \cos 180^o = 70 \, N \times 57 \, m \times \left(-1\right) = -3.990 \, J \end{array}\right.$$

$$W_{neto} = W_{gravedad} + W_{roz} = 13.692{,}3 \, J - 3.990 \, J = 9.702{,}3 \, J$$

$$W_{neto} = 9.702{,}3 = \Delta E_c = E_{c(f)} - E_{c(i)}$$

$$E_{c(f)} = E_{c(i)} + W_{neto} = 375{,}8 \, J + 9.702{,}3 \, J = 10.078{,}1 \, J$$

$$E_{c(f)} = \frac{1}{2} m v_f^2 \quad \Rightarrow \quad v_f^2 = \frac{2E_{c(f)}}{m} \quad \Rightarrow \quad v_f = 18{,}64 \ \frac{m}{s}$$

6) Un gimnasta de 48,0 kg salta verticalmente hacia arriba desde un trampolín. El gimnasta sale del trampolín a una altura de 1,20 m y alcanza una altura máxima de 4,80 m, siempre con relación al suelo. Si ignoramos la resistencia del aire, determina: a) el trabajo debido a la fuerza de la gravedad en la subida y la velocidad inicial con la que el gimnasta sale del trampolín; b) la velocidad del gimnasta al volver a caer a una altura de 3,50 m, así como el trabajo debido a la fuerza de la gravedad en la caída. [a) -1693 J; 8,40 m/s; b) 612 J; 5,05 m/s]

Respuesta:

$$W_{neto(subida)} = \Delta E_c = E_{c(f)} - E_{c(i)} = W_{gravedad} \quad \Rightarrow \quad 0 - E_{c(i)} = W_{gravedad}$$

$$W_{gravedad} = P \cdot d \cdot \cos 180^o = \left(48\ kg \times 9,8\ \tfrac{m}{s^2}\right) \times \left(4,80\ m - 1,20\ m\right) \times \left(-1\right) = -1.693,44\ J$$

$$-E_{c(i)} = W_{gravedad} = -1.693,44\ J \quad \Rightarrow \quad E_{c(i)} = 1.693,44\ J = \tfrac{1}{2} m v_i^2 \quad \Rightarrow v_i^2 = \frac{2E_{c(i)}}{m} \Rightarrow \quad v_i = 8,4\ \tfrac{m}{s}$$

$$W'_{neto(caída)} = \Delta E'_c = W'_{gravedad}$$

$$W'_{gravedad} = P \cdot d' \cdot \cos 0^o = \left(48\ kg \times 9,8\ \tfrac{m}{s^2}\right) \times \left(4,80\ m - 3,50\ m\right) \times 1 = 611,5\ J$$

$$\Delta E'_c = E'_{c(f)} - E'_{c(i)} = E'_{c(f)} - 0 = W'_{gravedad} = 611,5\ J$$

$$E'_{c(f)} = \tfrac{1}{2} m v_f'^2 = 611,5\ J \quad \Rightarrow \quad v_f'^2 = \frac{2E'_{c(f)}}{m} \quad \Rightarrow \quad v'_f = 5,05\ \tfrac{m}{s}$$

7) La montaña rusa más alta del mundo tiene una caída vertical de 59,3 m. Si consideramos que la velocidad en el punto más alto es cero y que la fricción es prácticamente nula, calcula la velocidad de los viajeros en el punto más bajo de la trayectoria. Posteriormente compara el resultado obtenido con el obtenido en la experiencia en que la velocidad de los viajeros en la parte más baja es de 32,2 m/s, que es menor que la calculada teóricamente. Con estos datos calcula cuánto trabajo realiza la fuerza de fricción sobre un vagón de 55,0 kg. [34 m/s; 3.449,6 J]

Respuesta:

$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(gravitatoria)}$$

$$E_{c(f)} - E_{c(i)} = -\left[E_{p(f)} - E_{p(i)}\right] = -E_{p(f)} + E_{p(i)} \quad \Rightarrow \quad E_{c(f)} + E_{p(f)} = E_{c(i)} + E_{p(i)}$$

$$\tfrac{1}{2} m v_f^2 - \tfrac{1}{2} m v_i^2 = -mgy_f + mgy_i$$

$$\tfrac{1}{2} m v_f^2 = mgy_i \quad \Rightarrow \quad v_f^2 = \frac{mgy_i}{\tfrac{1}{2} m} = 2gy_i = 2 \times 9,8\ \tfrac{m}{s^2} \times 59,3\ m \quad \Rightarrow \quad v_f = 34,09\ \tfrac{m}{s}$$

$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(gravitatoria)} + W_{roz}$$

$$W_{roz} = \Delta E_c + \Delta E_{p(gravitatoria)} = \left(E_{c(f)} - E_{c(i)}\right) + \left(E_{p(f)} - E_{p(i)}\right) = \tfrac{1}{2} m v_f^2 - \tfrac{1}{2} m v_i^2 + mgy_f - mgy_i$$

$$W_{roz} = \tfrac{1}{2} m v_f^2 - mgy_i = \tfrac{1}{2} \times 55\ kg \times \left(32,2\ \tfrac{m}{s}\right)^2 - 55\ kg \times 9,8\ \tfrac{m}{s^2} \times 59,3\ m = -3.449,6\ J$$

8) Calcular el trabajo neto realizado al arrastrar un bloque de 80 kg, sobre un plano horizontal, aplicándole una fuerza de 400 N durante una distancia de 15 m si: a) la fuerza aplicada es horizontal y no existe rozamiento entre el bloque y el plano; b) la fuerza aplicada forma un ángulo de 60º con la horizontal y no existe rozamiento entre el bloque y el plano; c) la fuerza aplicada es horizontal y existe rozamiento entre el bloque y el plano siendo μ = 0,2; d) la fuerza forma un ángulo de 60º con la horizontal y existe rozamiento entre el bloque y el plano siendo μ = 0,2. [a) 6.000 J; b) 3.000 J; c) 3.648 J; d) 1687,2 J]

Respuesta:

$$W_{neto}=\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}=F\cdot\Delta r\cdot\cos 0^o=400\text{ N}\times 15\text{ m}=6.000\text{ J}$$

$$W_{neto}=\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}=F\cdot\Delta r\cdot\cos 60^o=400\text{ N}\times 15\text{ m}\times 0,5=3.000\text{ J}$$

$$\begin{cases} W_{neto}=\left(\vec{F}+\vec{f}_{roz}\cdot\right)\Delta\vec{r}=F\cdot\Delta r\cdot\cos 0^o+f_{roz}\cdot\Delta r\cdot\cos 180^o \\ W_{neto}=F\cdot\Delta r\cdot\cos 0^o-\mu\cdot F_{normal}\cdot\Delta r=F\cdot\Delta r\cdot\cos 0^o-\mu\cdot m\cdot g\cdot\Delta r \\ W_{neto}=400\text{ N}\times 15\text{ m}-0,2\times 80\text{ kg}\times 9,8\,\frac{m}{s^2}\times 15\text{ m}=6.000\text{ J}-2.352\text{ J}=3.648\text{ J}\end{cases}$$

$$\begin{cases} W_{neto}=\left(\vec{F}+\vec{f}_{roz}\cdot\right)\Delta\vec{r}=F\cdot\Delta r\cdot\cos 60^o+f_{roz}\cdot\Delta r\cdot\cos 180^o \\ W_{neto}=F\cdot\Delta r\cdot\cos 60^o-\mu\cdot F_{normal}\cdot\Delta r=F\cdot\Delta r\cdot\cos 60^o-\mu\cdot\left(m\cdot g-F\cdot\text{sen }60^o\right)\cdot\Delta r \\ W_{neto}=400\text{ N}\times 15\text{ m}\times 0,5-0,2\times\left(80\text{ kg}\times 9,8\,\frac{m}{s^2}-400\text{ N}\times\text{sen }60^o\right)\times 15\text{ m} \\ W_{neto}=3.000\text{ J}-1.312,77\text{ J}=1.687,2\text{ J}\end{cases}$$

9) Un bloque de 5 kg desliza por una superficie horizontal lisa con una velocidad de 4 m/s y choca con un resorte de masa despreciable y constante elástica 800 N/m, en equilibrio y con el otro extremo fijo. Calcular: a) cuánto se comprime el resorte; b) desde qué altura por encima del resorte colocado verticalmente debería caer el bloque para producir la misma compresión obtenida en el apartado anterior. [a) Δx_{muelle} = 0,3162 m; b) 0,500 m].

Respuesta:

$$W_{neto}=\Delta E_c=-\Delta E_{p(muelle)}$$

$$\begin{cases}\Delta E_c=E_{c(f)}-E_{c(i)}=\frac{1}{2}mv_f^2-\frac{1}{2}mv_i^2=0-\frac{1}{2}mv_i^2=-\frac{1}{2}\times 5\text{ kg}\times\left(4\,\frac{m}{s}\right)^2=-40\text{ J} \\ \Delta E_{p(muelle)}=E_{p(f)}-E_{p(i)}=\frac{1}{2}k\Delta x_{muelle}^2-0\end{cases}$$

$$\left.\begin{cases}\Delta E_c=-\Delta E_{p(muelle)}=-40\text{ J} \\ \Delta E_{p(muelle)}=40\text{ J}=\frac{1}{2}k\Delta x_{muelle}^2\end{cases}\right\}\quad \Delta x_{muelle}=0,3162\text{ m}$$

$$W_{neto}=\Delta E_c=-\Delta E_{p(gravitatoria)}-\Delta E_{p(muelle)}$$

$$\left.\begin{cases}\Delta E_c=E_{c(f)}-E_{c(i)}=\frac{1}{2}mv_f^2-\frac{1}{2}mv_i^2=0-0 \\ \Delta E_{p(muelle)}=40\text{ J}=\frac{1}{2}k\Delta y_{muelle}^2 \\ \Delta E_{p(gravitatoria)}=mg\Delta y_{total}=mg\left(\Delta h+\Delta y_{muelle}\right)\end{cases}\right\}\begin{cases}\Delta E_c=-\Delta E_{p(gravitatoria)}-\Delta E_{p(muelle)} \\ 0=-\Delta E_{p(gravitatoria)}-40\text{ J}\end{cases}$$

$$\Delta E_{p(gravitatoria)}=-40\text{ J}=mg\Delta y_{total}$$

$$\Delta y_{total}=\frac{\Delta E_{p(gravitatoria)}}{mg}=\frac{-40\text{ J}}{5\text{ kg}\times 9,8\,\frac{m}{s^2}}=-0,816\text{ m}=\Delta h+\Delta y_{muelle}$$

$$\Delta h=-0,816\text{ m}-\Delta y_{muelle}=-0,816\text{ m}-\left(-0,316\text{ m}\right)=-0,50\text{ m}$$

10) Un bloque de 10 kg se lanza hacia arriba por un plano inclinado de 30º, con la horizontal, con una velocidad de 10 m/s. El bloque vuelve al punto de partida con una velocidad de 5 m/s. Calcula: a) el trabajo de rozamiento total, en subir y bajar; b) la longitud que recorre en subir; c) el coeficiente de rozamiento con el plano; d) la deformación máxima y final de un resorte de constante elástica 500 N/m, colocado en dicho punto de partida y con el que choca el bloque al volver. [a) -375 J; b) 6,38 m; c) μ = 0,346; d) 0,7475 m y 0,0386 m]

Respuesta:

$$W_{neto(subir-bajar)} = \Delta E_{c(subir-bajar)} = -\Delta E_{p(g)(subir-bajar)} + W_{roz(subir-bajar)}$$
$$\Delta E_{c(subir-bajar)} = \tfrac{1}{2} m v_f^2 - \tfrac{1}{2} m v_i^2 = 125\ \mathrm{J} - 500\ \mathrm{J} = -375\ \mathrm{J}$$
$$\Delta E_{p(g)(subir-bajar)} = mg\Delta y = 0$$
$$W_{roz(subir-bajar)} = \Delta E_{c(subir-bajar)} + \Delta E_{p(g)(subir-bajar)} = -375\ \mathrm{J}$$

$$W_{roz(subir-bajar)} = W_{roz(subir)} + W_{roz(bajar)} = -375\ \mathrm{J}$$
$$W_{roz(subir)} = W_{roz(bajar)} = -f_{roz} \cdot \Delta s = -\mu mg \cos 30^{o} \cdot \Delta s$$
$$W_{roz(subir)} = W_{roz(bajar)} = -\tfrac{1}{2} \times 375\ \mathrm{J} = -187{,}5\ \mathrm{J}$$
$$W_{neto(subir)} = \Delta E_{c(subir)} = -\Delta E_{p(g)(subir)} + W_{roz(subir)}$$
$$\left\{\begin{array}{l} \Delta E_{c(subir)} = 0 - \tfrac{1}{2} m v_i^2 = -500\ \mathrm{J} \\ \Delta E_{p(g)(subir)} = mg\Delta y = mg\Delta s \cdot \mathrm{sen}\, 30^{o} = 49 \cdot \Delta s \\ W_{roz(subir)} = -187{,}5 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \Delta E_{c(subir)} = -\Delta E_{p(g)(subir)} + W_{roz(subir)} \\ -500\ \mathrm{J} = -49 \cdot \Delta s - 187{,}5\ \mathrm{J} \\ \Delta s = 6{,}3775\ \mathrm{m} \end{array}\right.$$

$$W_{roz(subir)} = -f_{roz} \cdot \Delta s = -\mu F_{nor} \cdot \Delta s = -\mu mg \cos 30^{o} \cdot \Delta s = -187{,}5\ \mathrm{J}$$
$$\mu = \frac{W_{roz(subir)}}{mg \cos 30^{o} \cdot \Delta s} = 0{,}346$$
$$W_{neto(comprimir-muelle)} = \Delta E_{c(comprimir-muelle)} = -\Delta E_{p(comprimir-muelle)} - \Delta E_{p(g)(comprimir-muelle)} + W_{roz(comprimir-muelle)}$$
$$\left\{\begin{array}{l} \Delta E_{c(comprimir-muelle)} = 0 - \tfrac{1}{2} m v_f^2 = -125\ \mathrm{J} \\ \Delta E_{p(comprimir-muelle)} = \tfrac{1}{2} k (\Delta s')^2 - 0 = 250 (\Delta s')^2 \\ \Delta E_{p(g)(comprimir-muelle)} = -mg|\Delta h'| = -mg|\Delta s'| \cdot \mathrm{sen}\, 30^{o} = -49|\Delta s'| \\ W_{roz(comprimir-muelle)} = -\mu mg \cos 30^{o} \cdot |\Delta s'| = -29{,}365 \cdot |\Delta s'| \end{array}\right.$$
$$\Delta E_{c(comprimir-muelle)} = -\Delta E_{p(g)(comprimir-muelle)} - \Delta E_{p(comprimir-muelle)} + W_{roz(comprimir-muelle)}$$
$$-125\ \mathrm{J} = -250 (\Delta s')^2 + 49|\Delta s'| - 29{,}365 \cdot |\Delta s'|$$
$$250 (\Delta s')^2 - 19{,}635|\Delta s'| - 125\ \mathrm{J} = 0$$
$$|\Delta s'| = \frac{19{,}635 \pm \sqrt{19{,}635^2 + 4 \times 250 \times 125}}{2 \times 250} = 0{,}7475\ \mathrm{m}$$
$$\boxed{F_{muelle(equilibrio)} = F_{peso} - f_{roz}} \quad \Rightarrow \quad k\Delta s''_{(equilibrio)} = mg\,\mathrm{sen}\, 30^{o} - \mu mg \cos 30^{o}$$
$$\Delta s''_{(equilibrio)} = \frac{mg\,\mathrm{sen}\, 30^{o} - \mu mg \cos 30^{o}}{k} = \frac{mg (\mathrm{sen}\, 30^{o} - \mu \cos 30^{o})}{k} = 0{,}0386\ \mathrm{m}$$

11) Una bola pequeña de metal es lanzada por un plano inclinado desde una altura sobre el suelo de 3,00 m. Al final del plano, siguiendo un camino curvado, es proyectado verticalmente hacia arriba hasta una altura de 4,00 m sobre el suelo. Si ignoramos la fricción y la resistencia del aire, encuentra la velocidad inicial de la bola. [4,43 m/s]

Respuesta:

$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(gravitatoria)}$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta E_c = 0 - \frac{1}{2} m v_i^2 \\ \Delta E_{p(g)} = mg\Delta y \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} m v_i^2 = -mg\Delta y \\ v_i^2 = 2g\Delta y \end{cases}$$

$$v = \sqrt{2g\Delta y} = \sqrt{2 \times 9,8 \, \tfrac{m}{s^2} \times \left(4\ m - 3\ m\right)} = 4,43$$

12) Un cohete de 3 kg es lanzado verticalmente hacia arriba con suficiente velocidad inicial para alcanzar una altura máxima de 100 m. Si la resistencia del aire realiza un trabajo de -800 J sobre el cohete, ¿qué altura alcanzaría el cohete sin resistencia del aire?. [127,5 m]

Respuesta:

$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(gravitatoria)} + W_{roz}$$

$$\begin{cases} \Delta E_c = 0 - E_{c(i)} = -\frac{1}{2} m v_i^2 \\ \Delta E_{p(g)} = mg\Delta y = 3\,kg \times 9,8 \, \tfrac{m}{s^2} \times 100\,m = 2.940\,J \\ W_{roz} = -800\,J \end{cases}$$

$$\Delta E_c = 0 - E_{c(i)} = -E_{c(i)} = -\tfrac{1}{2} m v_i^2 = -2.940\,J - 800\,J = -3.740\,J$$

$$E_{c(i)} = \tfrac{1}{2} m v_i^2 = 3.740\,J$$

$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E'_{p(gravitatoria)} \qquad \begin{cases} \Delta E_c = 0 - E_{c(i)} = -3.740\,J = -mg\Delta y' \\ \Delta y' = \dfrac{3.740\,J}{mg} = \dfrac{3.740\,J}{29,4\,N} = 127,21\,m \end{cases}$$

13) Un bloque de 2 kg se lanza hacia arriba con una velocidad de 10 m/s por un plano inclinado que forma un ángulo de 30º con la horizontal. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano es μ = 0,4. Calcula: a) el incremento en la energía potencial gravitatoria del bloque cuando alcanza el punto más alto y el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento en la subida; b) la energía cinética del bloque cuando vuelve a caer al punto de lanzamiento y su velocidad. [a) $\Delta E_{p(g)}$ = 59,07 J; W_{roz} = -40,93 J; b) E_c = 18,14 J; v = 4,26 m/s]

Respuesta:

$$W_{neto(subir)} = \Delta E_{c(subir)} = -\Delta E_{p(gravitatoria)(subir)} + W_{roz(subir)}$$

$$\begin{cases} \Delta E_{c(subir)} = 0 - \frac{1}{2} m v_i^2 = -\frac{1}{2} \times 2\,kg \times \left(10 \, \tfrac{m}{s}\right)^2 = -100\,J \\ \Delta E_{p(g)(subir)} = mg\Delta y = mg\Delta s \cdot sen\,30º = mg\Delta s \cdot sen\,30º = 9,8 \cdot \Delta s \\ W_{roz(subir)} = -f_{roz} \cdot \Delta s = -\mu mg \cos 30º \cdot \Delta s = -6,79 \cdot \Delta s \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta E_{c(subir)} = -\Delta E_{p(gravitatoria)(subir)} + W_{roz(subir)} \\ -100\,J = -9,8 \cdot \Delta s - 6,79 \cdot \Delta s \\ \Delta s = \dfrac{100}{9,8 + 6,79}\,m = 6,0277\,m \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \Delta E_{c(subir)} = -100\,J \\ \Delta E_{p(g)(subir)} = 59,07\,J \\ W_{roz(subir)} = -40,93\,J \end{Bmatrix}$$

$$W_{neto(bajar)} = \Delta E_{c(bajar)} = -\Delta E_{p(g)(bajar)} + W_{roz(bajar)}$$

$$\left.\begin{cases} \Delta E_{c(bajar)} = \frac{1}{2} m v_f^2 - 0 = \frac{1}{2} \times 2\,kg \times v_f^2 \\ \Delta E_{p(g)(subir)} = -\Delta E_{p(g)(bajar)} = 59,07\,J \\ W_{roz(bajar)} = W_{roz(subir)} = -f_{roz} \cdot \Delta s = -40,93\,J \end{cases}\right\} \begin{cases} \Delta E_{c(bajar)} = \frac{1}{2} \times 2\,kg \times v_f^2 = 59,07\,J - 40,93\,J = 18,14\,J \\ v_f = 4,26\,\frac{m}{s} \end{cases}$$

14) Un bloque de 2,0 kg se deja caer desde una altura de 40 cm sobre un muelle colocado verticalmente. La constante elástica del muelle es de 1.960 $N \cdot m^{-1}$. Calcula: a) la longitud máxima que se comprime el muelle; b) la longitud comprimida del muelle cuando se alcance el equilibrio. Dato: g = 9,8 $m \cdot s^{-2}$. [a) 0,10 m; b) 0,010 m]

Respuesta:

$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(gravitatoria)} - \Delta E_{p(muelle)}$$

$$\left.\begin{cases} \Delta E_c = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = 0 \\ \Delta E_{p(g)} = mg\Delta y_{total} = mg\left(\Delta h + \Delta y_{muelle}\right) \\ \Delta E_{p(muelle)} = \frac{1}{2} k \Delta y_{muelle}^2 \end{cases}\right\} \begin{cases} W_{neto} = \Delta E_c = 0 = -mg\left(\Delta h + \Delta y_{muelle}\right) - \frac{1}{2} k \Delta y_{muelle}^2 \\ mg\left(\Delta h + \Delta y_{muelle}\right) + \frac{1}{2} k \Delta y_{muelle}^2 = 0 \\ 19,6\left(-0,4 + \Delta y_{muelle}\right) + \frac{1}{2} \times 1.960 \Delta y_{muelle}^2 = 0 \end{cases}$$

$$980 \Delta y_{muelle}^2 + 19,6 \Delta y_{muelle} - 7,84 = 0$$

$$\Delta y_{muelle} = \frac{-19,6 \pm \sqrt{19,6^2 + 4 \times 980 \times 7,84}}{2 \times 980} = \begin{cases} 0,08\,m \\ -0,10\,m \end{cases} \Rightarrow \quad \Delta y_{muelle} = -0,10\,m$$

$$\left.\begin{cases} F_{muelle(equilibrio)} = F_{peso} \\ -k\Delta y' = mg \end{cases}\right\} \quad \Delta y' = -\frac{mg}{k} = -0,010\,m$$

15) Un objeto de masa 1 kg se encuentra a una altura de 100 m. Se deja caer, con velocidad inicial cero, siendo la fuerza de rozamiento del aire de 2 N. Determina: a) la energía cinética con la que llega al suelo; b) la velocidad cuando llega al suelo. Dato: g = 9,8 m/s^2. [a) 780 J; b) 39,50 m/s]

Respuesta:

$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(gravitatoria)} + W_{roz}$$

$$\begin{cases} \Delta E_c = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 \\ \Delta E_{p(g)} = mg\Delta y = 1\,kg \times 9,8\,\frac{m}{s^2} \times \left(0 - 100\,m\right) = -980\,J \\ W_{roz} = \vec{f}_{roz} \cdot \Delta\vec{r} = -f_{roz} \cdot \left|\Delta y\right| = -2\,N \times 100\,m = -200\,J \end{cases}$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m v^2 = +980\,J - 200\,J = 780\,J \quad \begin{cases} v^2 = \dfrac{\Delta E_c}{\frac{1}{2} m} = \dfrac{780\,J}{\frac{1}{2} \times 1\,kg} = 1.560\,\frac{m^2}{s^2} \\ v = 39,50\,\frac{m}{s} \end{cases}$$

16) Calcula el Trabajo realizado sobre una partícula al desplazarla desde el punto (1,1) m hasta el (2,4) m por los campos de fuerzas: $\vec{F} = x^2\vec{i} - y^2\vec{j}$; $\vec{F} = y^2\vec{i} - x^2\vec{j}$. Siguiendo las trayectorias: a) por la recta que pasa por los citados puntos; b) por la quebrada que pasa por los puntos (1,1), (2,1) y (2,4); c) por la quebrada que pasa por los puntos (1,1), (1,4) y (2,4); d) por la parábola de ecuación $y = x^2$. Posteriormente determina si el campo de fuerzas es conservativo. [1º: a) -56/3 J; b) -56/3; c) -56/3; d) -56/3; Conservativo][2º: a) 0 J; b) -11 J; c) 13 J; d) -1,3 J. No conservativo]

Respuesta:

$$W_A^B = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B \left(F_x dx + F_y dy\right) = \int_A^B F_x dx + \int_A^B F_y dy = \int_A^B x^2 dx - \int_A^B y^2 dy$$

$$y = 3x - 2 \quad \begin{Bmatrix} A(1,1) \\ B(2,4) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 = a\cdot 1 + b \\ 4 = a\cdot 2 + b \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a = 3 \\ b = -2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} y = 3x - 2 \\ dy = 3dx \end{Bmatrix}$$

$$W_{1,1}^{2,4} = \int_1^2 x^2 dx - \int_1^2 (3x-2)^2\, 3dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 - 27\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 + 36\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 - 12[x]_1^2 = -\frac{56}{3}$$

$$W_{1,1}^{2,4} = W_{1,1}^{2,1} + W_{2,1}^{2,4} \quad \left\{ W_{1,1}^{2,4} = \left[\int_{1,1}^{2,1} x^2 dx\right] + \left[-\int_{2,1}^{2,4} y^2 dy\right] = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 - \left[\frac{y^3}{3}\right]_1^4 = -\frac{56}{3} \right.$$

$$W_{1,1}^{2,4} = W_{1,1}^{1,4} + W_{1,4}^{2,4} \quad \left\{ W_{1,1}^{2,4} = \left[-\int_1^4 y^2 dy\right] + \left[\int_1^2 x^2 dx\right] = -\left[\frac{y^3}{3}\right]_1^4 + \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = -\frac{56}{3} \right.$$

$$y = x^2 \quad \{dy = 2xdx\} \quad W_{1,1}^{2,4} = \int_1^2 x^2 dx - \int_1^2 x^4\, 2xdx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 - 2\left[\frac{x^6}{6}\right]_1^2 = -\frac{56}{3}$$

17) Sea el campo de fuerzas que actúa sobre una partícula: $\vec{F} = 2xy\vec{i} - x^2\vec{j}$. Calcula el Trabajo realizado al desplazar la partícula desde el punto (0,0) m hasta el (2,4) m siguiendo las trayectorias siguientes: a) por la quebrada (0,0), (2,0) y (2,4); b) por la quebrada (0,0), (0,4) y (2,4); c) a lo largo de la recta que une los dos puntos (0,0) y (2,4). Posteriormente comprobar si el campo es conservativo. [a) -16 J ; b) 16 J; c) 16/3 J. No Conservativo]

Respuesta:

$$W_A^B = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B \left(F_x dx + F_y dy\right) = \int_A^B F_x dx + \int_A^B F_y dy = \int_A^B 2xydx - \int_A^B x^2 dy$$

$$W_{0,0}^{2,4} = W_{0,0}^{2,0} + W_{2,0}^{2,4} \quad \left\{ W_{0,0}^{2,4} = \left[\int_{0,0}^{2,0} 2xydx\right] + \left[-\int_{2,0}^{2,4} x^2 dy\right] = -2^2 \int_{2,0}^{2,4} dy = -2^2 [y]_0^4 = -16 \right.$$

$$W_{0,0}^{2,4} = W_{0,0}^{0,4} + W_{0,4}^{2,4} \quad \left\{ W_{0,0}^{2,4} = \left[-\int_{0,0}^{0,4} x^2 dy\right] + \left[\int_{0,4}^{2,4} 2xydx\right] = -0 + 2\times 4\times\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 16 \right.$$

$$y = 2x \quad \begin{Bmatrix} A(0,0) \\ B(2,4) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 = a\cdot 0 + b \\ 4 = a\cdot 2 + b \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a = 2 \\ b = 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} y = 2x \\ dy = 2dx \end{Bmatrix}$$

$$W_{0,0}^{2,4} = \int_{0,0}^{2,4} 2xydx - \int_{0,0}^{2,4} x^2 dy = \int_0^2 4x^2 dx - \int_0^2 x^2\, 2dx = 4\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 - 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{16}{3}$$

18) Un cuerpo se mueve a lo largo de la trayectoria [x = t + 1; y = 2t - 2; z = t] y bajo la acción del campo: $\vec{F} = t\vec{i} - (3t+1)\vec{j} + 2\vec{k}$. Calcular: a) el trabajo realizado entre los instantes 2 s y 3 s; b) el desplazamiento de la partícula. [a) -12,5 J; b) $6^{1/2}$ m]

Respuesta:

$$W_A^B = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right) = \int_A^B F_x dx + \int_A^B F_y dy + \int_A^B F_z dz$$

$$W_t^{t'} = \int_t^{t'} t dt - \int_t^{t'} \left(3t+1\right) 2dt + \int_t^{t'} 2dt$$

$$W_2^3 = \left[\frac{t^2}{2}\right]_2^3 - 6\left[\frac{t^2}{2}\right]_2^3 - 2\left[t\right]_2^3 + 2\left[t\right]_2^3 = -\frac{25}{2}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r} = \left[4\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}\right] - \left[3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\right] = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \quad \left\{ \left|\Delta\vec{r}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6} \right.$$

19) Una bala, de masa m_b = 0,01 kg, con velocidad horizontal de valor v_b = 200 m/s, se incrusta en un bloque colgado (péndulo balístico), de masa m_p = 4 kg, suspendido de un punto fijo mediante una cuerda de longitud 0,5 m. Calcule: a) la velocidad del sistema, formado por las dos masas, tras el impacto; b) la energía cinética del sistema tras el impacto; c) la altura a la que asciende el sistema tras el impacto; d) la velocidad mínima de la bala para que el bloque con la bala describa una circunferencia vertical completa. [a) 0,50 m/s; b) 0,50 J; c) 0,0127 m; d) 1.984 m/s].

Respuesta:

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f \quad \Rightarrow \quad m_b\vec{v}_b + m_p\vec{v}_p = \left(m_b + m_p\right)\vec{v}_{sistema}$$

$$v_{sistema} = \frac{m_b}{m_b + m_p} v_b = \frac{0,01\,kg}{4,01\,kg}\times 200\,\tfrac{m}{s} = 0,50\,\tfrac{m}{s}$$

$$E_{c(sistema)} = \tfrac{1}{2}\left(m_b + m_p\right)v_{sistema}^2 = \tfrac{1}{2}\times 4,01\,kg\times\left(0,50\,\tfrac{m}{s}\right)^2 = 0,50\,J$$

$$\Delta E_{c(sistema)} = -\Delta E_{p(g)(sistema)}$$

$$\left.\begin{cases} \Delta E_{c(sistema)} = 0 - \tfrac{1}{2}\left(m_b + m_p\right)v_{sistema}^2 = -0,50\,J \\ \Delta E_{p(g)(sistema)} = \left(m_b + m_p\right)g\Delta y = 39,298\,kg\cdot\tfrac{m}{s^2}\times\Delta y \end{cases}\right\} \Delta y = \frac{-0,50\,J}{-39,298\,N} = 0,0127\,m$$

En el punto más alto al describir una circunferencia de radio R es el diámetro 2·R:

$$\vec{F}_{neta} = \vec{P} + \vec{F}_n = \left(m_b + m_p\right)\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} F_{centrípeta} = P + F_n = \left(m_b + m_p\right)a_{centrípeta} \\ \left(m_b + m_p\right)g + F_n = \left(m_b + m_p\right)a_{centrípeta} \end{cases}$$

$$a_{centrípeta} = \frac{\left(m_b + m_p\right)g + F_n}{\left(m_b + m_p\right)} \xrightarrow{F_n = 0} a_{c(mínima)} = \frac{\left(m_b + m_p\right)g}{\left(m_b + m_p\right)} = g = \frac{v'^2_{sistema(mínima)}}{R}$$

$$v'^2_{sistema(mínima)} = gR = 4,9\,\tfrac{m^2}{s^2} \quad \Rightarrow \quad v'_{sistema(mínima)} = \sqrt{Rg} = \sqrt{0,5\,m\times 9,8\,\tfrac{m}{s^2}} = 2,2136\,\tfrac{m}{s}$$

$$\Delta E_{c(sistema)} = -\Delta E_{p(g)(sistema)} \quad \begin{cases} \Delta E_{c(sistema)} = \tfrac{1}{2}\left(m_b + m_p\right)v'^2_{sistema(mínima)} - \tfrac{1}{2}\left(m_b + m_p\right)v_{sistema}^2 \\ \Delta E_{p(g)(sistema)} = \left(m_b + m_p\right)g\Delta y = \left(m_b + m_p\right)g2R \end{cases}$$

$$\tfrac{1}{2}v'^2_{sistema(mínima)} - \tfrac{1}{2}v_{sistema}^2 = -g2R \quad \Rightarrow \quad v_{sist}^2 = v'^2_{sist(mínima)} + 2g2R = 24,5\,\tfrac{m^2}{s^2} \quad \Rightarrow \quad v_{sist} = 4,95\,\tfrac{m}{s}$$

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f \quad \Rightarrow m_b v_b = \left(m_b + m_p\right)v_{sist} \Rightarrow \quad v_{bala} = \frac{\left(m_b + m_p\right)v_{sist}}{m_{bala}} = \frac{4,01\,kg\times 4,95\,\tfrac{m}{s}}{0,01\,kg} = 1.984\,\tfrac{m}{s}$$

20) Un bloque, de masa 20 kg, se encuentra sobre una superficie horizontal en equilibrio, unido a uno de los extremos de un resorte (k = 100 N/m) que tiene el otro extremo fijo. Al bloque se le aplica una fuerza, de 150 N y formando un ángulo de 30º con la horizontal, hasta estirar el resorte una longitud de 0,5 m. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y la superficie es μ = 0,4. Calcule, al término de recorrer el bloque los 0,5 m: a) el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento; b) el aumento de la energía cinética del bloque y su velocidad; c) la aceleración del bloque. [a) -24,2 J; b) 28,25 J; v = 1,68 m/s; c) a = 1,575 m/s^2].

Respuesta:

$$W_{roz} = -f_{roz}\Delta x = -\mu F_n \Delta x \quad \left\{F_n + F\cdot \text{sen}\,30^o - P = 0\right\}$$

$$W_{roz} = -\mu\left(P - F\,\text{sen}\,30^o\right)\Delta x = -0,4\times\left(20\,\text{kg}\times 9,8\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} - 150\,\text{N}\times\text{sen}\,30^o\right)\times 0,5\,\text{m} = -24,2\,\text{J}$$

$$W_{neto} = \Delta E_c = W_{F(aplicada)} - \Delta E_{p(muelle)} + W_{roz}$$

$$\begin{cases}\Delta E_c = \frac{1}{2}mv^2 - 0 \\ W_{F(aplicada)} = F\Delta x\cdot\cos 30^o = 150\,\text{N}\times 0,50\,\text{m}\times\cos 30^o = 64,952\,\text{J} \\ \Delta E_{p(muelle)} = \frac{1}{2}k\left(\Delta x\right)^2 - 0 = \frac{1}{2}\times 100\,\frac{\text{N}}{\text{m}}\times\left(0,5\,\text{m}\right)^2 = 12,5\,\text{J} \\ W_{roz} = -24,2\,\text{J}\end{cases}$$

$$\Delta E_c = \tfrac{1}{2}mv^2 = 64,952\,\text{J} - 12,5\,\text{J} - 24,2\,\text{J} = 28,252\,\text{J}$$

$$v^2 = \frac{2\Delta E_c}{m} = \frac{2\times 28,252\,\text{J}}{20\,\text{kg}} = 2,8252\,\tfrac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \quad\Rightarrow\quad v = 1,68\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{F}_{neta} = m\vec{a} \quad\Rightarrow\quad F\cdot\cos 30^o - f_{roz} - F_{muelle} = ma \quad\Rightarrow\quad F\cdot\cos 30^o - \mu\left(P - F\,\text{sen}\,30^o\right) - k\Delta x = ma$$

$$a = \frac{F\cdot\cos 30^o - \mu\left(P - F\,\text{sen}\,30^o\right) - k\Delta x}{m} = \frac{129,90\,\text{N} - 48,4\,\text{N} - 50\,\text{N}}{20\,\text{kg}} = \frac{31,5\,\text{N}}{20\,\text{kg}} = 1,575\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

21) Un proyectil de 100 g lleva una velocidad de 210 m/s cuando choca y se incrusta en un bloque de madera de 2 kg que descansa en un plano horizontal. El bloque con el proyectil incrustado recorre 4 m sobre el plano, siendo el coeficiente de rozamiento μ = 0,2. Posteriormente, choca con un resorte, de constante elástica k = 1.000 N/m, al que comprime. Calcule: a) velocidad del sistema (bloque y proyectil) inmediatamente después del choque, así como su energía cinética; b) la energía cinética del sistema antes de chocar con el muelle, así como su velocidad; c) la longitud que se comprime el muelle y el aumento en su energía potencial. [a) 10 m/s, 105 J; b) 88,536 J; 9,18 m/s; c) 0,417 m; 86,82 J]

Respuesta:

$$\left\{\begin{matrix}\vec{p}_i = \vec{p}_f \\ m_{bala}v_{bala} = M_{sistema}v_{sistema}\end{matrix}\right\}\begin{cases}v_{sistema} = \dfrac{m_{bala}v_{bala}}{M_{sistema}} = \dfrac{0,100\,\text{kg}\times 210\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2,100\,\text{kg}} = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \\ E_{c(sistema)} = \frac{1}{2}M_{sistema}v^2_{sistema} = \frac{1}{2}\times 2,1\,\text{kg}\times\left(10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 105\,\text{J}\end{cases}$$

$$W_{neto} = \Delta E_{c(sistema)} = W_{roz} \quad \begin{cases}W_{roz} = -f_{roz}d = -\mu M_{sistema}gd = -0,2\times 2,1\,\text{kg}\times 9,8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\times 4\,\text{m} = -16,464\,\text{J} \\ \Delta E_c = E_{c(f)} - E_{c(i)} = W_{roz} = -16,464\,\text{J}\end{cases}$$

$$E_{c(f)} = E_{c(i)} - 16,464\,\text{J} = 105\,\text{J} - 16,464\,\text{J} = 88,536\,\text{J} = \tfrac{1}{2}M_{sistema}v'^2_{sistema}$$

$$v'_{sistema} = 9,18\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(muelle)} + W_{roz} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta E_c = 0 - \frac{1}{2} M_{sistema} v'^2_{sistema} = -88,536\,J \\ \Delta E_{p(muelle)} = \frac{1}{2} kl^2 = 500l^2 \\ W_{roz} = -f_{roz} l = -\mu M_{sistema} g l = -0,2 \times 2,1 \times 9,8 \times l = -4,116 \cdot l \end{array} \right\}$$

$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(muelle)} + W_{roz}$$

$$-88,536 = -500l^2 - 4,116 \cdot l$$

$$500l^2 + 4,116 \cdot l - 88,536 = 0 \quad \Rightarrow \quad l = \frac{-4,116 + \sqrt{4,116^2 + 4 \times 500 \times 88,536}}{2 \times 500} = 0,417\,m$$

$$\Delta E_{p(muelle)} = \frac{1}{2} kl^2 = 500l^2 = 86,82\,J$$

22) Un cuerpo se desliza sin rozamiento por una vía en forma de rizo. La altura de la que parte es de 4 m y el rizo tiene de radio R = 1 m. Calcula: a) la velocidad en el rizo a 1 m de altura y en la parte superior que está a 2 m de altura; b) la altura desde la que debe caer el cuerpo para que al pasar por el punto más alto del rizo la fuerza normal sea igual que el peso del cuerpo. [a) $v_{(1m)}$ = 7,67 y v_{top} = 6,3 m/s; b) 3 m]

Respuesta:

$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(g)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta E_c = \frac{1}{2} m v_f^2 - 0 \\ \Delta E_{p(g)} = mg\Delta h \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} m v_f^2 - 0 = -mg\Delta h \\ v_f^2 = -2g\Delta h \end{array} \right.$$

$$v_f = \sqrt{-2g\Delta h} \quad \left\{ \begin{array}{l} v_f = \sqrt{-2 \times 9,8 \frac{m}{s^2} \times (1m - 4m)} = 7,67 \frac{m}{s} \\ v_{top} = \sqrt{-2 \times 9,8 \frac{m}{s^2} \times (2m - 4m)} = 6,26 \frac{m}{s} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_c = F_n + P = m a_c = m \dfrac{v'^2_{top}}{R} \\ P + P = mg + mg = 2mg = m \dfrac{v'^2_{top}}{R} \\ v'^2_{top} = R2g \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta E_c = \frac{1}{2} m v'^2_{top} = -\Delta E_{p(g)} = -mg\Delta h \\ v'^2_{top} = -2g\Delta h \end{array} \right\}$$

$$v'^2_{top} = R2g = -2g\Delta h \quad \Rightarrow \quad \Delta h = -R = -1\,m = h_f - h_i$$

$$h_i = h_f + 1\,m = h_f = 2\,m + 1\,m = 3\,m$$

23) Un bloque de masa 2 kg se lanza con una velocidad de 6 $m \cdot s^{-1}$ por una superficie horizontal rugosa de μ = 0,2. Después de recorrer una distancia de 4 m, choca con el extremo libre de un resorte, de masa despreciable y constante elástica 200 $N \cdot m^{-1}$, colocado horizontalmente y fijo por el otro extremo. Calcule: a) la compresión máxima del resorte y el trabajo total realizado en dicha compresión; b) la altura desde la que debería dejarse caer el bloque sobre el extremo del resorte, colocado verticalmente, para que la compresión máxima fuera la misma que en el apartado a). [a) 0,43 m y 18,5 J; b) 0,5 m]

Respuesta:

$$W_{neto} = \Delta E_c = W_{(muelle)} + W_{roz} = -\Delta E_{p(muelle)} + W_{roz}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta E_c = 0 - \tfrac{1}{2}mv^2 = -36\,J \\ \Delta E_{p(muelle)} = \tfrac{1}{2}k\left(\Delta x\right)^2 = 100\Delta x^2 \\ W_{roz} = -f_{roz}\left(4+\Delta x\right) = -\mu mg\left(4+\Delta x\right) = -15,7 - 3,9\Delta x \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta E_c = -\Delta E_{p(muelle)} + W_{roz} \\ -36 = -100\Delta x^2 - 15,7 - 3,9\Delta x \\ 100\Delta x^2 + 3,9\Delta x - 20,3 = 0 \end{array}\right\} \Delta x = \frac{-3,9 + \sqrt{3,9^2 + 4\times 100\times 20,3}}{2\times 100} = 0,43\,m$$

$$W_{sobre} = \Delta E_{p(muelle)} = \tfrac{1}{2}k\left(\Delta x\right)^2 = 100\Delta x^2 = 18,5\,J$$

$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(gravitatoria)} - \Delta E_{p(muelle)}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta E_c = 0 \\ \Delta E_{p(muelle)} = \tfrac{1}{2}k\left(\Delta x\right)^2 = 18,6\,J \\ \Delta E_{p(gravitatoria)} = 0 - mg\left(h+\Delta x\right) \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \Delta E_{p(muelle)} = -\Delta E_{p(gravitatoria)} \\ 18,6\,J = mg\left(h+\Delta x\right) \end{array}\right\} h = \frac{18,5\,J}{mg} - \Delta x = 0,5\,m$$

24) Un muelle se comprime 2 cm si se le aplica una fuerza de 270 N. Un bloque cuya masa es de 12 kg se deja caer desde lo alto de un plano inclinado, sin rozamiento, cuyo ángulo de inclinación es de 30º. El bloque en su caída por el plano inclinado choca con el muelle y lo comprime hasta 5,5 cm. Calcula: a) ¿desde qué distancia ha caído?; b) ¿cuál es la velocidad del bloque justamente antes de chocar con el muelle?. Dato: $g = 9,8\ m\cdot s^{-2}$. [a) 35 cm; b) 1,7 m/s]

Respuesta:

$$W_{neto} = \Delta E_c = 0 = -\Delta E_{p(gravitatoria)} - \Delta E_{p(muelle)} \left\{\begin{array}{l} \Delta E_{p(muelle)} = \tfrac{1}{2}k\left(\Delta x\right)^2 = \tfrac{1}{2}\times\dfrac{270\,N}{0,02\,m}\left(0,055\,m\right)^2 = 20,4\,J \\ \Delta E_{p(gravitatoria)} = 0 - mgh = -mg\Delta x \sin 30^{o} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta E_{p(muelle)} = -\Delta E_{p(gravitatoria)} \\ 20,4\,J = mg\Delta x \sin 30^{o} \end{array}\right\} \Delta x = \frac{20,4\,J}{mg\sin 30^{o}} = 0,35\,m = 35\,cm$$

$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(gravitatoria)}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta E_c = \tfrac{1}{2}mv^2 \\ \Delta E_{p(gravitatoria)} = 0 - mgh = -mg\Delta x' \sin 30^{o} = -mg\left(0,35 - 0,055\right)\sin 30^{o} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\tfrac{1}{2}mv^2 = mg\left(0,35-0,055\right)\sin 30^{o}\right\} v = \sqrt{2g\left(0,35-0,055\right)\sin 30^{o}} = 1,7\,\tfrac{m}{s}$$

25) Un bloque de 2,0 kg se deja caer desde una altura de 40 cm sobre un muelle colocado verticalmente. La constante elástica del muelle es de $1960\ N\cdot m^{-1}$. Calcula la distancia máxima que se comprime el muelle. [0,08 m]

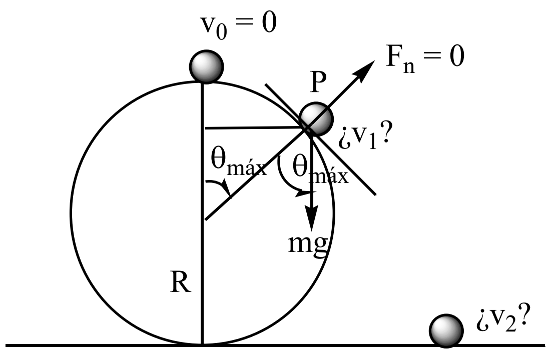
Respuesta:

$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(gravitatoria)} - \Delta E_{p(muelle)}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta E_c = 0 \\ \Delta E_{p(muelle)} = \frac{1}{2} k (\Delta x)^2 \\ \Delta E_{p(gravitatoria)} = 0 - mg(h + \Delta x) \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \Delta E_{p(muelle)} = -\Delta E_{p(gravitatoria)} \\ 980\Delta x^2 = 7,84 + 19,6\Delta x \end{array}\right\}$$

$$\Delta x = \frac{-19,6 + \sqrt{19,6^2 + 4\times 980 \times 7,84}}{2\times 980} = 0,08\,\text{m}$$

26) Un objeto, de masa 1 kg, se encuentra en reposo sobre una esfera de radio R = 3 m. El objeto se desliza, con velocidad inicial cero, sin rozamiento hasta que se separa de la esfera en el punto P, cuando $F_n = 0$, siendo el ángulo que forma con la vertical $\theta_{máx}$. Calcule: a) el valor del ángulo $\theta_{máx}$; b) la energía cinética de la masa en el punto P y la velocidad v_1 en ese punto; c) la energía cinética cuando choca con el suelo y la velocidad v_2. Dato: g = 9,8 m/s^2. [a) $\theta_{máx}$ = 48,19º; b) E_c = 9,8 J; v_1 = 4,43 m/s ; c) 58,8 J; v_2 = 10,84 m/s]



Respuesta:

$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(g)}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta E_c = E_{c(1)} - E_{c(0)} = \frac{1}{2} mv_1^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \frac{1}{2} mv_1^2 \\ \Delta E_{p(g)} = mg\Delta y = mg\left[(R + R\cos\theta) - 2R\right] = mgR(\cos\theta - 1) \end{array}\right.$$

$$W_{neto} = E_{c(1)} = \frac{1}{2} mv_1^2 = -mgR(\cos\theta - 1) = mgR(1 - \cos\theta)$$

$$v_1^2 = 2gR(1-\cos\theta) \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_c = \frac{v_1^2}{R} = 2g(1-\cos\theta)}$$

$$F_c = ma_c \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} F_c = F_n - P_n = -ma_c \\ F_n = P_n - ma_c \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_n = 0 = P_n - ma_c \\ mg\cdot\cos\theta_{máx} = ma_c \end{array}\right\} \boxed{a_c = g\cdot\cos\theta_{máx}}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_c = 2g(1-\cos\theta_{máx}) \\ a_c = g\cdot\cos\theta_{máx} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \cos\theta_{máx} = 2 - 2\cos\theta_{máx} \\ 3\cos\theta_{máx} = 2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \cos\theta_{máx} = \dfrac{2}{3} \\ \theta_{máx} = 48,19^{\text{o}} \end{array}\right.$$

$$E_{c(1)} = \frac{1}{2} mv_1^2 = mgR(1-\cos\theta_{máx}) = 1\,\text{kg}\times 9,8\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\times 3\,\text{m}\left(1 - \frac{2}{3}\right) = 9,8\,\text{J}$$

$$v_1^2 = \frac{E_{c(1)}}{\frac{1}{2}m} = \frac{9,8\,\text{J}}{\frac{1}{2}\times 1\,\text{kg}} = 19,6\,\tfrac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \quad \Rightarrow \quad v_1 = 4,43\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

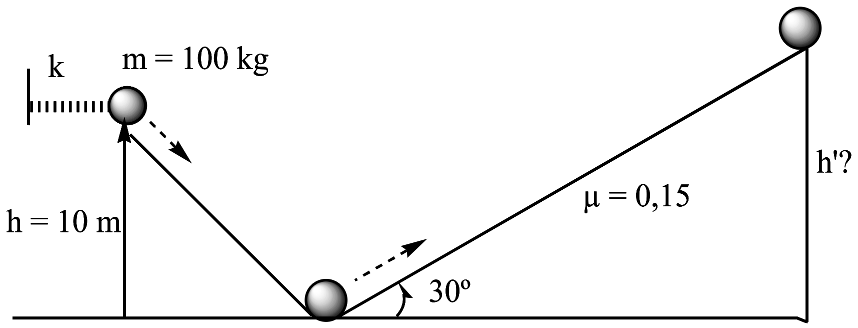
$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(g)}$$

$$\begin{cases} \Delta E_c = E_{c(2)} - E_{c(0)} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_2^2 \\ \Delta E_{p(g)} = mg\Delta y = mg\left(0 - 2R\right) = -mg2R \end{cases}$$

$$W_{neto} = E_{c(2)} - 0 = \tfrac{1}{2} m v_2^2 = +mg2R = 2\times 1\,kg \times 9,8\,\tfrac{m}{s^2} \times 3\,m = 58,8\,J$$

$$v_2^2 = \frac{E_{c(2)}}{\frac{1}{2} m} = \frac{58,8\,J}{\frac{1}{2}\times 1\,kg} = 117,6\,\tfrac{m^2}{s^2} \quad \Rightarrow \quad v_2 = 10,84\,\tfrac{m}{s}$$

27) Un muelle (k = 80.000 N/m), colocado horizontalmente, se encuentra comprimido 50 cm con un objeto de 100 kg, y estando todo el sistema a 10 m de altura. Cuando se suelta el muelle el objeto cae, los 10 m de altura, por una rampa por la que no tiene rozamiento. Al llegar el objeto a la parte más baja de la rampa se encuentra que ha de subir por un plano inclinado, de 30º con la horizontal, pero cuya superficie ejerce un rozamiento de coeficiente dinámico 0,15. Determina hasta qué altura del plano inclinado subirá. Dato: g = 9,8 m/s^2. [16 m]



Respuesta:

Antes de soltar el muelle el objeto tiene energía potencial gravitatoria, a 10 de altura, y energía potencial del muelle. Al soltar el muelle, este le imprime una energía cinética al objeto, con lo que objeto tiene energía mecánica, energía cinética y energía potencial gravitatoria. En la caída por la rampa sin rozamiento, la energía mecánica del objeto se conserva, pero disminuye su energía potencial gravitatoria y aumenta su energía cinética. Al subir por el plano inclinado con rozamiento, la energía mecánica se utiliza para compensar el trabajo de rozamiento, hasta que se hace cero la energía potencial y aumenta la energía potencial gravitatoria.

$$W_{neto} = \Delta E_{c(objeto)} = W_{por(muelle)} + W_{gravedad} + W_{rozamiento} = -\Delta E_{p(muelle)} - \Delta E_{p(gravedad)} + W_{rozamiento}$$

$$\Delta E_{c(objeto)} + \Delta E_{p(muelle)} + \Delta E_{p(gravedad)} = W_{rozamiento}$$

$$\Delta E_{c(objeto)} = 0 \quad \left\{ \Delta E_{p(muelle)} = 0 - \frac{1}{2} k \left(\Delta x\right)^2 = -\tfrac{1}{2}\times 80.000\,\tfrac{N}{m} \times \left(0,50\,m\right)^2 = -10.000\,J \right.$$

$$\Delta E_{p(gravedad)} = mgh' - mgh = mgh' - 100\,kg \times 9,8\,\tfrac{m}{s^2} \times 10\,m = mgh' - 9.800\,J$$

$$W_{rozamiento} = -f_{roz}\cdot d = -\mu_k mg\cos 30^o \frac{h'}{sen 30^o} = -0,15\times 100\,kg \times 9,8\,\tfrac{m}{s^2} \times 1,732 \times h' = -254,6\cdot h'$$

$$-\frac{1}{2} k \left(\Delta x\right)^2 + mgh' - mgh = -\mu_k mg\cos 30^o \frac{h'}{sen 30^o}$$

$$h' = \frac{\frac{1}{2}k\left(\Delta x\right)^2 + mgh}{mg + \mu_k mg\cos 30^\circ \dfrac{1}{\text{sen}30^\circ}} = \frac{10.000\,\text{J} + 9.800\,\text{J}}{100\,\text{kg}\times 9,8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} + \left(0,15\times 100\,\text{kg}\times 9,8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\times 1,732\right)} = 16,0\,\text{m}$$

28) Un muelle (k = 80 N/m), colocado horizontalmente sobre una mesa, está unido a un objeto de 5 kg, que está en reposo. Se tira del objeto mediante una fuerza horizontal de 100 N durante un espacio de 50 cm. Si el objeto tiene rozamiento con la mesa de coeficiente 0,30 determina la energía cinética final después de recorrer los 50 cm y su velocidad. Dato: $g = 9,8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. [32,65 J y 3,6 m/s]

Respuesta:

$$W_{neto} = \Delta E_{c(objeto)} = W_F + W_g + W_{F_n} + W_{(muelle)} + W_{(roz)} = W_F + 0 + 0 - \Delta E_{p(muelle)} + W_{(roz)}$$

$$W_F = F\Delta x\cos 0^\circ = 50\,\text{J}$$

$$W_{(muelle)} = -\Delta E_{p(muelle)} = \frac{1}{2}k\left(\Delta x\right)^2 = \frac{1}{2}\times 80\,\frac{\text{N}}{\text{m}}\times\left(0,50\,\text{m}\right)^2 = 10\,\text{J}$$

$$W_{roz} = -\mu_k mg\Delta x = -7,35\,\text{J}$$

$$\Delta E_{c(objeto)} = W_F - \Delta E_{p(muelle)} + W_{(roz)} = 50\,\text{J} - 10\,\text{J} - 7,35\,\text{J} = 32,65\,\text{J}\quad \left\{ v = \sqrt{\frac{2\times 32,65\,\text{J}}{5\,\text{kg}}} = 3,6\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \right.$$

29) Un ascensor de 1.000 kg, partiendo del reposo, acelera hacia arriba a 1 m/s^2 en 10 m. Calcula: a) el trabajo realizado por la gravedad; b) el trabajo realizado por la tensión del cable del ascensor; c) la energía cinética del ascensor a los 10 m y su velocidad. Dato: $g = 9,8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. [a) -98.000 J; b) 108.000 J; c) 10.000 J; 4,47 m/s]

Respuesta:

$$W_{neto} = \Delta E_{c(ascensor)} = W_T + W_g = W_T - \Delta E_{p(gravedad)}$$

$$W_g = -\Delta E_{p(gravedad)} = -mg\Delta y = -98.000\,\text{J}$$

$$W_T = T\Delta y\cos 0^\circ = 108.000\,\text{J}\quad \left\{ T = mg + ma = 1000\,\text{kg}\times\left(9,8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 1\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 10.800\,\text{N} \right.$$

$$\Delta E_{c(ascensor)} = W_T - \Delta E_{p(gravedad)} = 108.000\,\text{J} - 98.000\,\text{J} = 10.000\,\text{J}\quad \left\{ v = \sqrt{\frac{2\times 10.000\,\text{J}}{1.000\,\text{kg}}} = 4,47\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \right.$$

30) Un muelle (k =2.000 N/m), colocado horizontalmente, se encuentra comprimido 10 cm. Con dos bloques (de 1 kg y 2 kg) en sus extremos. Cuando el muelle se suelta empuja a los dos bloques a moverse horizontalmente sin rozamiento. Determina la velocidad de cada bloque cuando son expulsados. [3,65 m/s y -1,825 m/s]

Respuesta:

La energía inicial del sistema con el muelle comprimido es enteramente energía potencial del muelle y la energía final es enteramente cinética, por lo que aplicamos el principio de conservación de la energía. Como los dos bloques contribuyen a la energía cinética, tenemos dos velocidades como incógnitas y una sola ecuación.

También consideramos también la conservación del momento lineal.

$$\left\{\begin{array}{l} W_{neto} = \Delta E_c = W_{muelle} = -\Delta E_{p(m)} \\ \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - 0 = -\left(0 - \frac{1}{2}kx^2\right) \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} p_i = p_f \\ 0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \end{array}\right\} \quad v_2 = \frac{-m_1 v_1}{m_2}$$

$$\tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2\left(\frac{-m_1 v_1}{m_2}\right)^2 = \tfrac{1}{2}m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2}\frac{m_1^2 v_1^2}{m_2} = \tfrac{1}{2}v_1^2\left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2}\right)$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{kx^2}{m_1 + \frac{m_1^2}{m_2}}} = 3{,}65\,\tfrac{m}{s} \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{-m_1 v_1}{m_2} = -1{,}825\,\tfrac{m}{s}$$

31) Lanzamos un cuerpo de 1 kg por el aparato de "rizar el rizo", cuya pista circular tiene 20 cm de radio; suponemos que el cuerpo no se encuentra enganchado a la pista y que desliza sin rozamiento, calcula: a) la energía cinética y velocidad en el punto más alto (A) para que siga dando vueltas; b) la velocidad en el punto medio (B) para que dé vueltas; c) la velocidad en el punto más bajo (C) para que dé vueltas; d) la fuerza que la pista ejerce sobre el cuerpo en los tres casos anteriores. [a) v_A = 1,4 m/s y $E_{c(A)}$ = 0,98 J; b) v_B = 2,425 m/s; c) v_C = 3,13 m/s; d) 0 N en A; 29,4 N en B; 58,8 N en C]

Respuesta:

En el punto más alto (A): Para que de vueltas en el caso crítico, en que riza justamente el rizo, la fuerza normal que ejerce la pista sobre el cuerpo será nula:

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{F}_{centrípeta} = \vec{P} + \vec{F}_n = m\vec{a}_c \\ -F_c = -P - F_n = -ma_c \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} F_{n(A)} = 0 \\ mg = m\dfrac{v_A^2}{R} \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} v_A^2 = gR \\ v_A = \sqrt{gR} = \sqrt{9{,}8\,\frac{m}{s^2} \times 0{,}20\,m} = 1{,}4\,\frac{m}{s} \\ E_{c(A)} = \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mgR = 0{,}98\,J \end{array}\right.$$

En el punto intermedio (B) la energía ha de ser la misma que en el punto más alto:

$$\Delta E_c = -\Delta E_{p(g)}$$
$$\tfrac{1}{2}mv_A^2 - \tfrac{1}{2}mv_B^2 = -mg\left(h_A - h_B\right)$$
$$\tfrac{1}{2}mv_B^2 = \tfrac{1}{2}mv_A^2 + mg\left(h_A - h_B\right)$$
$$v_B^2 = v_A^2 + 2g\left(h_A - h_B\right) \quad \left\{\begin{array}{l} v_B^2 = gR + 2gR = 3gR \\ v_B = \sqrt{3gR} = \sqrt{3 \times 9{,}8\,\frac{m}{s^2} \times 0{,}20\,m} = 2{,}4249\,\frac{m}{s} \end{array}\right.$$

En el punto más bajo (C) la energía ha de ser la misma:

$$\Delta E_c = -\Delta E_{p(g)}$$
$$\tfrac{1}{2}mv_A^2 - \tfrac{1}{2}mv_C^2 = -mg\left(h_A - h_C\right)$$
$$\tfrac{1}{2}mv_C^2 = \tfrac{1}{2}mv_A^2 + mg\left(h_A - h_C\right)$$
$$v_C^2 = v_A^2 + 2g\left(h_A - h_C\right) \quad \left\{\begin{array}{l} v_C^2 = gR + 2g2R = 5gR \\ v_C = \sqrt{5gR} = \sqrt{5 \times 9{,}8\,\frac{m}{s^2} \times 0{,}20\,m} = 3{,}13\,\frac{m}{s} \end{array}\right.$$

En el punto más alto (A) la fuerza que ejerce la pista sobre el cuerpo es cero.

En el punto intermedio (B):

$$\left\{\begin{array}{l} F_{centrípeta} = F_{n(B)} = ma_n \\ F_{tangencial} = P = ma_t = mg \end{array}\right\} \left\{ F_{n(B)} = m\frac{v_B^2}{R} = m\frac{3gR}{R} = m3g = 29,4\,N \right.$$

En el punto más bajo (C):

$$F_{centrípeta} = F_{n(C)} - P = ma_c \quad \left\{\begin{array}{l} F_{n(C)} = P + ma_c = mg + m\frac{v_C^2}{R} = mg + m\frac{v_C^2}{R} = mg + m\frac{5gR}{R} = m6g \\ F_{n(C)} = m6g = 58,8\,N \end{array}\right.$$

32) Un cuerpo de 1 kg se halla colgado de un hilo de 1 m de longitud. Lanzamos horizontalmente un proyectil de 20 g que realiza un choque frontal con el cuerpo de 1 kg, quedando empotrado en él, Calcula la mínima velocidad del proyectil para que, realizado el choque, ambas masas describan una circunferencia completa en el plano vertical. [357 m/s]

Respuesta:

Exista una relación entre la velocidad mínima v_1 del proyectil, la velocidad del sistema $v_{sistema}$ después del choque y la velocidad $v'_{sistema}$ del sistema en el punto más alto para poder describir una circunferencia completa en el plano vertical.

La relación la obtenemos aplicando las leyes de conservación del momento lineal y de la energía.

Conservación del momento lineal. En el choque del proyectil con el cuerpo:

$$m_1v_1 + 0 = (m_1 + m_2)v_{sistema} = Mv_{sistema} \quad \left\{ v_{sistema} = \frac{m_1v_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1v_1}{M} \right\} \quad E_c = \frac{1}{2}Mv_{sist}^2$$

Conservación de la energía. La energía mecánica en el punto más bajo es igual a la energía mecánica en el punto más alto:

$$\Delta E_{c(sistema)} = -\Delta E_{p(g)}$$
$$\tfrac{1}{2}Mv'^2_{siste} - \tfrac{1}{2}Mv_{sist}^2 = -Mg\Delta y = -Mg2R$$

La velocidad mínima $v'_{sistema}$ en el punto más alto de la circunferencia con la 2ª ley de la dinámica:

$$-P - F_n = -Ma_c \quad \left\{\begin{array}{l} -Mg - F_n = -Ma_c \\ F_n = 0 \end{array}\right\} \quad \left\{ Mg = Ma_c = M\frac{v'^2_{sist}}{R} \right\} \quad v'^2_{sist} = Rg$$

Resolviendo las tres ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} m_1 v_1 + 0 = \left(m_1 + m_2\right) v_{sistema} = M v_{sistema} \\ \Delta E_{c(sistema)} = -\Delta E_{p(g)} \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{2} M v'^2_{siste} - \tfrac{1}{2} M v^2_{sist} = -Mg\Delta y = -Mg2R \\ -P - F_n = -Ma_c \quad \Rightarrow \quad v'^2_{sist} = gR \end{array}\right\}$$

$$\tfrac{1}{2} M v^2_{sist} = \tfrac{1}{2} M v'^2_{siste} + Mg2R = \tfrac{1}{2} MgR + Mg2R$$

$$v^2_{sist} = gR + 2g2R = g5R$$

$$v_1 = \frac{M v_{sist}}{m_1} = \frac{M}{m_1}\sqrt{g5R} = \frac{1{,}020\,kg}{0.020\,kg} \times \sqrt{9{,}8\,\tfrac{m}{s^2} \times 5 \times 1\,m} = 357\,\tfrac{m}{s}$$

33) Un proyectil de masa m se introduce en un bloque de madera de masa M que está unido a un resorte espiral de constante elástica k. Por el impacto se comprime el resorte una longitud x. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento entre el bloque y el suelo es μ, calcula en función de estos datos la velocidad de la bala antes del choque.

Respuesta:

Exista una relación entre la velocidad mínima v de la bala, la velocidad V y la distancia x que se comprime el resorte.

Conservación del momento lineal. En el choque del proyectil con el cuerpo:

$$mv + 0 = \left(m + M\right)V$$

Conservación de la energía. La energía mecánica inicial es igual a la energía potencial por la compresión del muelle más la energía perdida en el rozamiento:

$$\Delta E_c = -\Delta E_{p(muelle)} + W_{roz}$$

$$0 - \frac{1}{2}\left(m + M\right)V^2 = -\left(\frac{1}{2}kx^2 - 0\right) - \mu\left(m + M\right)gx$$

$$\frac{1}{2}\left(m + M\right)V^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \mu\left(m + M\right)gx$$

$$\frac{1}{2}\left(m + M\right)\frac{m^2 v^2}{\left(m + M\right)^2} = \frac{1}{2}kx^2 + \mu\left(m + M\right)gx$$

$$v^2 = \frac{\left(m + M\right)kx^2 + 2\mu\left(m + M\right)^2 gx}{m^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{\left(m + M\right)kx^2 + 2\mu\left(m + M\right)^2 gx}{m^2}}$$

34) Un objeto (m = 0,1 kg) se encuentra acoplado con un muelle ($k_{elástica}$ = 1.000 N/m) y comprimido 10 cm. Se suelta y el objeto sube con rozamiento (μ = 0,20) por un plano inclinado, de 45º con la horizontal y altura 2 m, para proseguir por el plano horizontal (a 2 m de altura) y sometido al mismo rozamiento hasta que se para. Calcule: a) la energía del objeto antes de salir del muelle; b) la energía cinética del objeto al subir a lo alto del plano inclinado, así como la velocidad en ese instante; c) la distancia que recorre por el plano horizontal (a 2 m de altura) hasta que se para. [a) 5 J; b) 2,648 J; 7,277 m/s; c) 13,5 m]

Respuesta:

$$E_{p(muelle)} = \tfrac{1}{2}kl^2 = \tfrac{1}{2}\times 1.000\,\tfrac{N}{m}\times(0{,}10\,m)^2 = 5\,J$$

$$W_{neto} = \Delta E_{c(objeto)} = -\Delta E_{p(muelle)} - \Delta E_{p(gravitatoria)} + W_{roz(subida)} = 5\,J - 1{,}96\,J - 0{,}392\,J = 2{,}648\,J$$

$$\begin{cases} \Delta E_{p(muelle)} = -5\,J \\ \Delta E_{p(gravitatoria)} = mg\Delta h = 0{,}1\,kg\times 9{,}8\,\tfrac{m}{s^2}\times 2\,m = 1{,}96\,J \\ W_{roz(subida)} = -f_{roz}d = -\mu_k F_n d = -\mu_k mg\cos 45^o\,\tfrac{\Delta h}{sen\,45^o} = -0{,}2\times 0{,}1\,kg\times 9{,}8\,\tfrac{m}{s^2}\times\cos 45^o\times\tfrac{2\,m}{sen\,45^o} = -0{,}392\,J \\ \Delta E_{c(objeto)} = \tfrac{1}{2}mv^2 - 0 = 5\,J - 1{,}96\,J - 0{,}392\,J = 2{,}648\,J \quad\Rightarrow\quad v = \sqrt{\tfrac{2\times 2{,}648\,J}{0{,}1\,kg}} = 7{,}277\,\tfrac{m}{s} \end{cases}$$

$$W'_{neto} = \Delta E_{c(horizontal)} = W'_{roz(horizontal)}$$

$$\Delta E_{c(horizontal)} = 0 - \tfrac{1}{2}mv^2 = -f'_{roz}d' = -\mu_k F'_n d' = -\mu_k mgd' = -0{,}2\times 0{,}1\,kg\times 9{,}8\,\tfrac{m}{s^2}\times d' = -0{,}196\,N\times d'$$

$$\Delta E_{c(horizontal)} = 0 - \tfrac{1}{2}mv^2 = -2{,}648\,J = -\mu_k mgd' = -0{,}196\,N\times d' \quad\Rightarrow\quad d' = \frac{-2{,}648\,J}{-0{,}196\,N} = 13{,}5\,m$$

35) Un objeto de masa 3 kg se encuentra sobre una mesa horizontal unido mediante una cuerda y una polea a otro objeto, de masa 2 kg, que está colgando a 1,5 m del suelo. Si el sistema está en reposo y se suelta calcula la velocidad con la que llega al suelo en los dos casos siguientes: a) si el objeto de 3 kg no tiene rozamiento; b) si tiene rozamiento de μ = 0,15. [a) 3,4 m/s; b) 3,4 m/s]

Respuesta:

$$W_{neto} = \Delta E_{c(objetos)} = -\Delta E_{p(gravitatoria)}$$

$$\frac{1}{2}(m_3 + m_2)v^2 = -(m_3 g\Delta y_3 + m_2 g\Delta y_2) = -m_2 g\Delta y_2 \quad \{\Delta y_3 = 0$$

$$\frac{1}{2}\times 5\,kg\times v^2 = -2\,kg\times 9{,}8\,\tfrac{m}{s^2}\times(-1{,}5\,m) \quad \{v = 3{,}4\,\tfrac{m}{s}$$

$$W_{neto} = \Delta E_{c(objetos)} = -\Delta E_{p(gravitatoria)} + W_{roz}$$

$$\frac{1}{2}(m_3 + m_2)v'^2 = -m_3 g\Delta y_1 - m_2 g\Delta y_2 - \mu m_3 g\Delta x_1 = 0 - m_2 g\Delta y_2 - \mu m_3 g\Delta x_1 \quad \begin{cases}\Delta y_1 = 0 \\ |\Delta y_2| = |\Delta x_1|\end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\times 5\,kg\times v'^2 = -2\,kg\times 9{,}8\,\tfrac{m}{s^2}\times(-1{,}5\,m) - 0{,}15\times 3\,kg\times 9{,}8\,\tfrac{m}{s^2}\times 1{,}5\,m \quad \{v' = 3{,}0\,\tfrac{m}{s}$$

36) Un objeto de 10 kg se deja caer sin rozamiento por un plano inclinado, de 30º con la horizontal. Al caer una 4,0 m por el plano choca con un muelle (k = 25 N/m). Determina: a) la máxima compresión del muelle; b) la compresión del muelle cuando el objeto tiene su velocidad máxima. Dato: g = 9,8 m s^{-2}. [a) 1,46 m; b) 0,196 m]

Respuesta:

$$W_{neto} = \Delta E_c = 0 = -\Delta E_{p(gravitatoria)} - \Delta E_{p(muelle)} \quad \{\Delta E_{p(muelle)} = -\Delta E_{p(gravitatoria)}$$

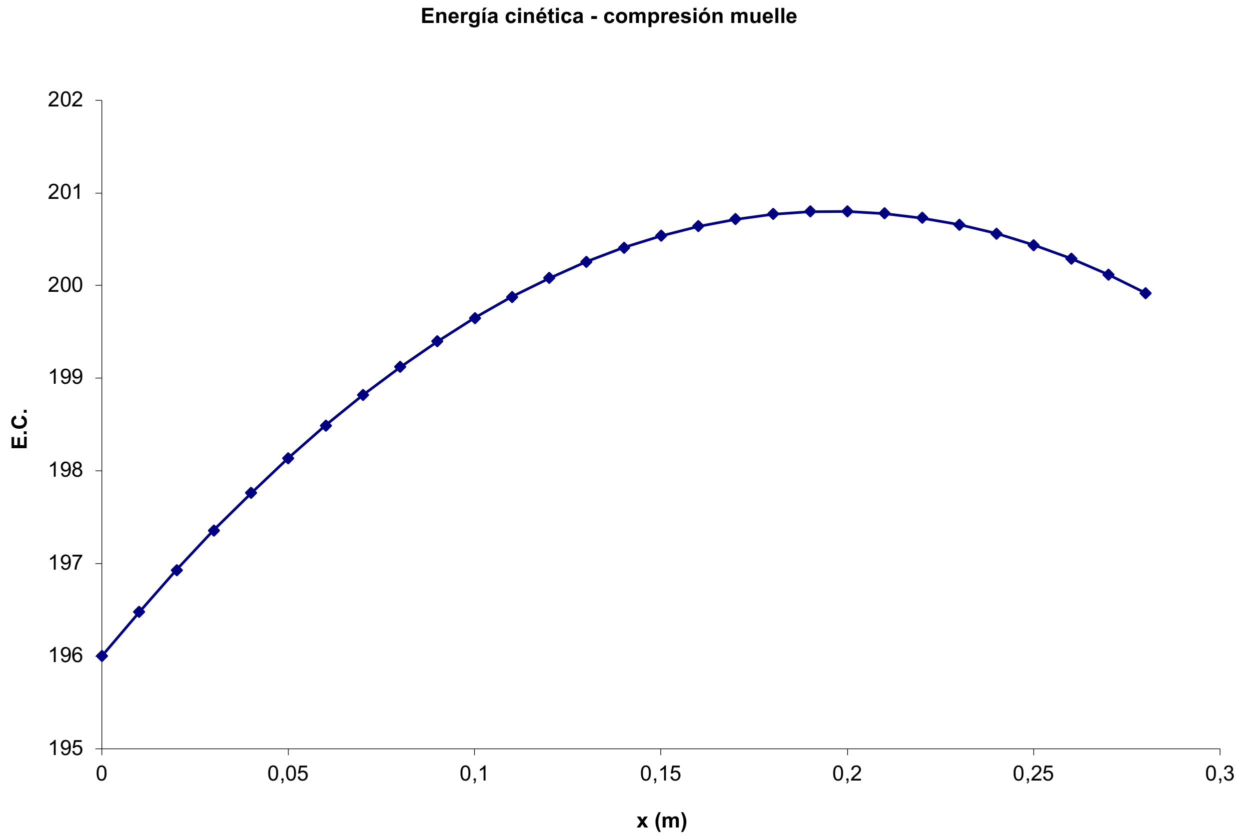
$$\left.\begin{cases} \Delta E_{p(muelle)} = \tfrac{1}{2}k\Delta x'^2 = 125\Delta x'^2 \\ -\Delta E_{p(gravitatoria)} = -(0 - mgh) = mg(4 + \Delta x')\sin 30^o = 196 + 49\Delta x' \end{cases}\right\} \begin{cases} \Delta E_{p(muelle)} = -\Delta E_{p(gravitatoria)} \\ 125\Delta x'^2 - 49\Delta x' - 196 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta x' = \frac{49 \pm \sqrt{49^2 + 4\times 125\times 196}}{250} = \frac{49 \pm \sqrt{49^2 + 4\times 125\times 196}}{250} = 1{,}46\,m$$

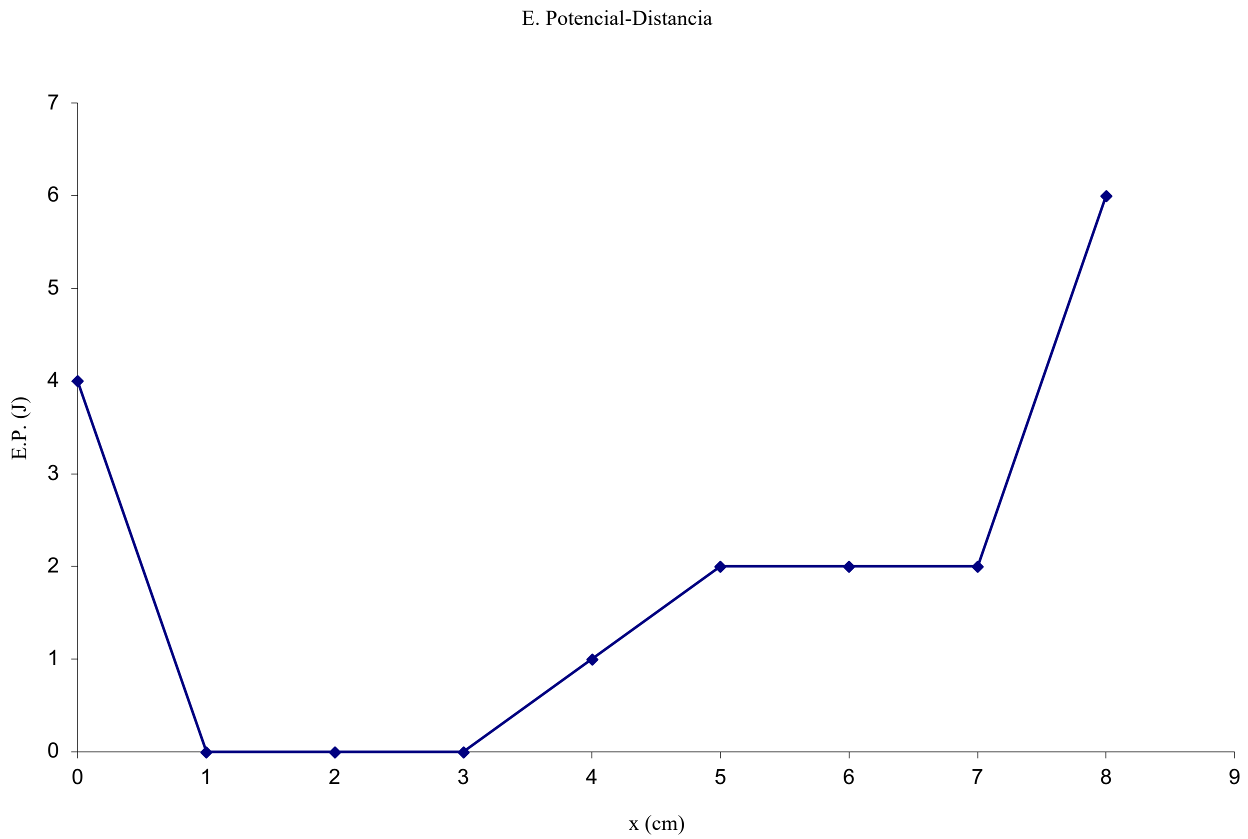
$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(muelle)} - \Delta E_{p(gravitatoria)}$$

$$\begin{cases} -\Delta E_{p(muelle)} = -\left(\frac{1}{2}kx^2 - 0\right) = -125x^2 \\ -\Delta E_{p(gravitatoria)} = -\left(0 - mgh\right) = mg\left(4 + x\right)\sin 30^o = 196 + 49x \end{cases}$$

$$\Delta E_c \equiv f\left(x\right) = -125x^2 + 49x + 196 \quad \left\{\frac{df}{dx} = -250x + 49 = 0\right\} \quad \left\{x = \frac{49}{250} = 0{,}196\,\text{m}\right.$$



37) En la gráfica se representa la Energía Potencial de una partícula, de masa 10 g, frente a la posición. Determina: a) el valor y dirección de la fuerza en cada posición; b) el trabajo que realiza la fuerza cuando la partícula cambia la posición desde x = 2 cm hasta x = 6 cm; c) la velocidad de la partícula en la posición x = 2 cm si sabemos que en la posición x = 6 cm la velocidad que posee es de 10 m/s. [a) $F_{0\to 1} = 400$ N; $F_{1\to 3} = 0$ N; $F_{3\to 5} = -100$ N; $F_{5\to 7} = 0$ N; $F_{7\to 8} = -400$ N; b) -2 J; c) 22,36 m/s]



Respuesta:

La partícula tiene Energía Potencial luego está sometida a una fuerza conservativa (fuerza que depende solamente de la posición y la circulación a través de una trayectoria cerrada es cero).

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{F}\cdot d\vec{r} = -dE_p = -\vec{\nabla}E_p \cdot d\vec{r} \\ \vec{F} = -\vec{\nabla}E_p\end{array}\right\} \Rightarrow F = -\frac{dE_p}{dx} \Rightarrow \boxed{F = -\frac{\Delta E_p}{\Delta x}}$$

$$\left\{F_{0\to 1} = -\frac{\Delta E_p}{\Delta x} = -\frac{(0-4)\,J}{(0{,}01-0)\,m} = 400\ N\right\}$$

$$\left\{F_{1\to 3} = -\frac{\Delta E_p}{\Delta x} = 0\ N\right\} \quad \left\{F_{3\to 5} = -\frac{\Delta E_p}{\Delta x} = -\frac{(2-0)\,J}{(0{,}05-0{,}03)\,m} = -100\ N\right\}$$

$$\left\{F_{5\to 7} = -\frac{\Delta E_p}{\Delta x} = 0\ N\right\} \quad \left\{F_{7\to 8} = -\frac{\Delta E_p}{\Delta x} = -\frac{(6-2)\,J}{(0{,}08-0{,}07)\,m} = -400\ N\right\}$$

$$W_{x=2}^{x=6} = \Delta E_c = -\Delta E_p = -\left(E_{p(x=6)} - E_{p(x=2)}\right) = -(2\,J - 0\,J) = -2\,J$$

$$W_{x=2}^{x=6} = -2\,J = \Delta E_c = \tfrac{1}{2} m v_{f(x=6)}^2 - \tfrac{1}{2} m v_{i(x=2)}^2$$

$$v_{i(x=2)}^2 = \frac{\tfrac{1}{2} m v_f^2 - \Delta E_c}{\tfrac{1}{2} m} = \frac{\tfrac{1}{2}\times 0{,}010\,kg \times \left(10\,\tfrac{m}{s}\right)^2 + 2\,J}{\tfrac{1}{2}\times 0{,}010\,kg} = 500\,\tfrac{m^2}{s^2} \Rightarrow v_{i(x=2)} = 22{,}36\,\tfrac{m}{s}$$

38) Un objeto de masa 10 kg, está en la rampa de un plano inclinado de 20º con la horizontal, siendo el coeficiente de rozamiento de μ = 0,20. Determina: a) la fuerza mínima que hay que aplicarle para que suba por la rampa; b) el trabajo realizado para que suba 10 m por la rampa; c) la fuerza y el trabajo realizado por ella si subimos el objeto hasta la misma altura pero siguiendo una trayectoria vertical. [a) 51,9 N; b) 519 J; c) 98 N; 335,2 J]

Respuesta:

Para subir el objeto por la rampa hay que aplicarle una fuerza que como mínimo sea igual a la suma de las fuerzas que se oponen a que suba, la fuerza de rozamiento y la componente tangencial del peso.

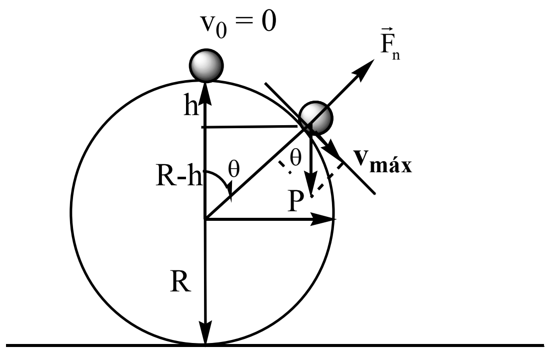
$$F_{aplicada} = P\sin\alpha + f_{roz} = P\sin\alpha + \mu P\cos\alpha$$

$$F_{aplicada} = P(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = 10\,kg \times 9{,}8\,\tfrac{m}{s^2}(\sin 20º + 0{,}20 \times \cos 20º) = 51{,}9\ N$$

$$W_{\Delta x} = F_{aplicada}\Delta x\cos 0º = 51{,}9\ N \times 10\ m \times \cos 0º = 519\ J$$

$$W_{\Delta y} = F'_{aplicada}\Delta y\cos 0º \quad \left\{F'_{aplicada} = mg = 98\,N\right\} \quad \begin{cases} W_{\Delta y} = F'_{aplicada}\Delta x\sin\alpha \\ W_{\Delta y} = 98\,N \times 10\ m \times \sin 20º = 335{,}2\ J \end{cases}$$

39) Un objeto se encuentra en la parte superior de la esfera. Se deja caer, sin rozamiento, por la esfera describiendo un arco de circunferencia, hasta que deja de estar en contacto con la esfera y cae libremente con una velocidad $v_{máx}$. Aplicando el principio de conservación de la energía determine una expresión de la velocidad del objeto cuando está cayendo, en función del ángulo barrido desde la parte superior. Aplicando la segunda ley de la dinámica determine el ángulo total barrido $\theta_{máx}$ en la caída hasta que deje de estar en contacto con la esfera, así como la velocidad $v_{máx}$ que posee en ese instante. [a) $v^2 = 2gR(1-\cos\theta)$; b) $\theta_{máx} = 48{,}2º$; $v_{máx} = 2{,}556$ m/s]



Respuesta:

Aplicando el principio de conservación de la energía, y tomando el eje X como eje de referencia:

$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(g)} \quad \left\{\Delta E_c + \Delta E_{p(g)} = 0\right\} \quad \left(E_c + E_{p(g)}\right)_f - \left(E_c + E_{p(g)}\right)_i = 0$$

$$\left(E_c + E_{p(g)}\right)_f = \left(E_c + E_{p(g)}\right)_i \quad \left.\begin{cases} \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_f = 0 + mgh_i \\ \frac{1}{2}mv_f^2 = mgh_i - mgh_f = mgh \end{cases}\right\} \begin{cases} \frac{1}{2}mv_f^2 = mgh = mg(R - R\cos\theta) \\ v_f^2 = 2gh = 2gR(1-\cos\theta) \end{cases}$$

La expresión $v^2 = 2gh = 2gR(1-\cos\theta)$, nos expresa la velocidad en cualquier punto de la esfera durante la caída.

Para determinar la velocidad en el mismo punto de salida de la esfera hacemos un análisis dinámico. Mientras el objeto cae por la esfera está sometido a dos fuerzas, el peso y la fuerza normal, al abandonar el objeto la esfera dejan de estar en contacto y se anula la fuerza normal. Por lo que tenemos:

$$\vec{F}_{neta} = \vec{P} + \vec{F}_n = m\vec{a} = m\left(\vec{a}_t + \vec{a}_n\right) \quad \left\{\begin{array}{l} P_t = P\,\mathrm{sen}\,\theta = ma_t = m\dfrac{dv}{dt} \\ F_n - P_n = F_n - P\cos\theta = -ma_n = -m\dfrac{v^2}{R} \end{array}\right\} \left\{F_n - mg\cos\theta = -m\dfrac{v^2}{R}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} v^2 = 2gh = 2gR\left(1-\cos\theta\right) \\ F_n - mg\cos\theta = -m\dfrac{v^2}{R} \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} F_n = mg\cos\theta - m\dfrac{v^2}{R} = mg\cos\theta - m2g\left(1-\cos\theta\right) \\ F_n = mg\left[\cos\theta - 2\left(1-\cos\theta\right)\right] = mg\left[3\cos\theta - 2\right] \end{array}\right.$$

Al dejar de estar en contacto con la esfera $F_n = 0$:

$$F_n = 0 = mg\left[3\cos\theta_{máx} - 2\right] \Rightarrow 0 = 3\cos\theta_{máx} - 2 \quad \left\{\cos\theta_{máx} = \frac{2}{3}\right\} \quad \theta_{máx} = \mathrm{ar}\cos\frac{2}{3} = 48{,}2^{o}$$

$$v = \sqrt{2gR\left(1-\cos\theta\right)} \quad \left\{v_{máx} = \sqrt{2\times 9{,}8\,\tfrac{m}{s^2}\times 1\,m\times\left(1-\tfrac{2}{3}\right)} = 2{,}556\,m/s\right.$$

40) Un cuerpo de 2 kg cae sobre un resorte elástico de constante k = 4.000 N/m, vertical y sujeto al suelo. La altura a la que se suelta el cuerpo, medida sobre el extremo superior del resorte, es de 2 m. a) Explique los cambios energéticos durante la caída y la compresión del resorte. b) Determine la deformación máxima del resorte. Dato: g = 9,8 m/s^2.

41) Un bloque de 0,5 kg está colocado sobre el extremo superior de un resorte vertical que está comprimido 10 cm y, al liberar el resorte, el bloque sale despedido hacia arriba verticalmente. La constante elástica del resorte es 200 N/m. a) Explique los cambios energéticos que tienen lugar desde que se libera el resorte hasta que el cuerpo cae y calcule la máxima altura que alcanza el bloque. b) ¿Con qué velocidad llegará el bloque al extremo del resorte en su caída?. Dato: g = 9,8 m/s^2.

42) Sobre un plano inclinado que forma un ángulo de 30º con la horizontal se encuentra un bloque de 0,5 kg adosado al extremo superior de un resorte, de constante elástica 200 N/m, paralelo al plano y comprimido 10 cm. Al liberar el resorte, el bloque asciende por el plano hasta detenerse y, posteriormente, desciende. El coeficiente de rozamiento es 0,1. a) Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre el bloque cuando asciende por el plano y calcule la aceleración del bloque. b) Determine la velocidad con la que el bloque es lanzado hacia arriba al liberarse el resorte y la distancia que recorre el bloque por el plano hasta detenerse. Dato: g = 9,8 m/s^2.

43) Un bloque de 0,2 kg está apoyado sobre el extremo superior de un resorte vertical, de constante 500 N/m, comprimido 20 cm. Al liberar el resorte, el bloque sale lanzado hacia arriba. a) Explique las transformaciones energéticas a lo largo de la trayectoria del bloque y calcule la altura máxima que alcanza. b) ¿Qué altura alcanzaría el bloque si la experiencia se realizara en la superficie de la Luna?. g_T = 9,8 m/s^2; $M_T = 102\cdot M_L$; $R_T = 4\cdot R_L$

44) Un bloque de 1 kg desliza con velocidad constante por una superficie horizontal y choca contra el extremo de un muelle horizontal, de constante elástica 200 N/m, comprimiéndolo. a) ¿Cuál ha de ser la velocidad del bloque para comprimir el muelle 40 cm? b) Explique cualitativamente cómo variarían las energías cinética y potencial elástica del sistema bloque - muelle, en presencia de rozamiento. Dato: g = 9,8 m/s^2.

45). Un bloque de 3 kg, situado sobre un plano horizontal, está comprimiendo 30 cm un resorte de constante k = 1.000 N/m. Al liberar el resorte el bloque sale disparado y, tras recorrer cierta distancia sobre el plano horizontal, asciende por un plano inclinado de 30º. Suponiendo despreciable el rozamiento del bloque con los planos: a) Determine la altura a la que llegará el cuerpo. b) Razone cuándo será máxima la energía cinética y calcule su valor. Dato: g = 9,8 m/s^2.

46) Un bloque de 2 kg se encuentra sobre un plano horizontal, sujeto al extremo de un resorte de constante elástica k = 150 N/m, comprimido 20 cm. Se libera el resorte de forma que el cuerpo desliza sobre el plano, adosado al extremo del resorte hasta que éste alcanza la longitud de equilibrio, y luego continúa moviéndose por el plano. El coeficiente de rozamiento es de 0,2. a) Explique las transformaciones energéticas que tienen lugar a lo largo del movimiento del bloque y calcule su velocidad cuando pasa por la posición de equilibrio del resorte. b) Determine la distancia recorrida por el bloque hasta detenerse. Dato: g = 9,8 m/s^2.

46) Un cuerpo de 0,5 kg se lanza hacia arriba por un plano inclinado, que forma 30º con la horizontal, con una velocidad inicial de 5 m/s. El coeficiente de rozamiento es 0,2. a) Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, cuando sube y cuando baja por el plano, y calcule la altura máxima alcanzada por el cuerpo. b) Determine la velocidad con la que el cuerpo vuelve al punto de partida. Dato: g = 9,8 m/s^2.

47). Un bloque de 2 kg desliza con velocidad constante por una superficie horizontal sin rozamiento y choca contra el extremo de un muelle horizontal, de constante elástica 120 N/m, comprimiéndolo. a) ¿Cuál ha de ser la velocidad del bloque para comprimir el muelle 30 cm? b) Explique las transformaciones energéticas que tienen lugar considerando la existencia de rozamiento.

48) Un bloque de 0,5 kg se encuentra sobre una superficie horizontal sin rozamiento, sujeto al extremo de un resorte de constante elástica k = 200 N/m. Se tira del bloque hasta alargar el resorte 10 cm y se suelta. a) Escriba la ecuación de movimiento del bloque y calcule su energía mecánica. b) Explique cualitativamente las transformaciones energéticas durante el movimiento del bloque si existiera rozamiento con la superficie.

49) Por un plano inclinado que forma un ángulo de 30º con la horizontal se lanza hacia arriba un bloque de 10 kg con una velocidad inicial de 5 m/s. Tras su ascenso por el plano inclinado, el bloque desciende y regresa al punto de partida con una cierta velocidad. El coeficiente de rozamiento entre plano y bloque es 0,1. a) Dibuje en dos esquemas distintos las fuerzas que actúan sobre el bloque durante el ascenso y durante el descenso e indique sus respectivos valores. Razone si se verifica el principio de conservación de la energía en este proceso. b) Calcule el trabajo de la fuerza de rozamiento en el ascenso y en el descenso del bloque. Comente el signo del resultado obtenido. Dato: g = 9,8 m/s^2.

50) Un bloque de 8 kg desliza por una superficie horizontal sin rozamiento con una velocidad de 10 m/s e incide sobre el extremo libre de un resorte, de masa despreciable y constante elástica k = 400 N/m, colocado horizontalmente. a) Analice las transformaciones de energía que tienen lugar desde un instante anterior al contacto del bloque con el resorte hasta que éste, tras comprimirse, recupera la longitud inicial. b) Calcule la compresión máxima del resorte. ¿Qué efecto tendría la existencia de rozamiento entre el bloque y la superficie?

51) Un bloque de 2 kg se lanza hacia arriba por una rampa rugosa (μ = 0,2), que forma un ángulo de 30º con la horizontal, con una velocidad de 6 m/s. Tras su ascenso por la rampa, el bloque desciende y llega al punto de partida con una velocidad de 4,2 m/s. a) Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre el bloque cuando asciende por la rampa y, en otro esquema, las que actúan cuando desciende e indique el valor de cada fuerza. b) Calcule el trabajo de la fuerza de rozamiento en el ascenso del bloque y comente el signo del resultado obtenido. Dato: g = 9,8 m/s^2.

52) Un bloque de 5 kg se encuentra inicialmente en reposo en la parte superior de un plano inclinado de 10 m de longitud, que presenta un coeficiente de rozamiento μ = 0,2 (ignore la diferencia entre el coeficiente de rozamiento estático y el dinámico). a) Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre el bloque durante el descenso por el plano y calcule el ángulo mínimo de inclinación del plano para que el bloque pueda deslizarse. b) Analice las transformaciones energéticas durante el descenso del bloque y calcule su velocidad al llegar al suelo suponiendo que el ángulo de inclinación del plano es de 30º. Dato: $g = 9,8\ m/s^2$.

Preguntas de teoría de Trabajo y Energía

1) a) Energía potencial asociada a una fuerza conservativa. b) Una partícula se desplaza bajo la acción de una fuerza conservativa. ¿Aumenta o disminuye su energía potencial? ¿Y su energía cinética? Razone las respuestas.

2) a) ¿Qué trabajo se realiza al sostener un cuerpo durante un tiempo t? b) ¿Qué trabajo realiza la fuerza peso de un cuerpo si éste se desplaza una distancia d por una superficie horizontal? Razone las respuestas.

3) Comente las siguientes afirmaciones: a) Un móvil mantiene constante su energía cinética mientras actúa sobre él: i) una fuerza; ii) varias fuerzas. b) Un móvil aumenta su energía potencial mientras actúa sobre él una fuerza.

4) Un automóvil arranca sobre una carretera recta y horizontal, alcanza una cierta velocidad que mantiene constante durante un cierto tiempo y, finalmente, disminuye su velocidad hasta detenerse. a) Explique los cambios de energía que tienen lugar a lo largo del recorrido. b) El automóvil circula después por un tramo pendiente hacia abajo con el freno accionado y mantiene constante su velocidad. Razone los cambios energéticos que se producen.

5) Explique y razone la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones: a) El trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan sobre una partícula cuando se traslada desde un punto hasta otro es igual a la variación de su energía cinética. b) El trabajo realizado por todas las fuerzas conservativas que actúan sobre una partícula cuando se traslada desde un punto hasta otro es menor que la variación de su energía potencial.

6) Conteste razonadamente a las siguientes preguntas: a) Si la energía mecánica de una partícula permanece constante, ¿puede asegurarse que todas las fuerzas que actúan sobre la partícula son conservativas? b) Si la energía potencial de una partícula disminuye, ¿tiene que aumentar su energía cinética?

7) Sobre una partícula sólo actúan fuerzas conservativas. a) ¿Se mantiene constante su energía mecánica? Razone la respuesta. b) Si sobre la partícula actúan además fuerzas de rozamiento, ¿cómo afectarían a la energía mecánica?

8) a) ¿Qué se entiende por fuerza conservativa? Explique la relación entre fuerza y energía potencial. b) Sobre un cuerpo actúa una fuerza conservativa. ¿Cómo varía su energía potencial al desplazarse en la dirección y sentido de la fuerza? ¿Qué mide la variación de energía potencial del cuerpo al desplazarse desde un punto A hasta otro B? Razone las respuestas.

9) a) ¿Por qué la fuerza ejercida por un muelle que cumple la ley de Hooke se dice que es conservativa? b) ¿Por qué la fuerza de rozamiento no es conservativa?

10) Una partícula parte de un punto sobre un plano inclinado con una cierta velocidad y asciende, deslizándose por dicho plano inclinado sin rozamiento, hasta que se detiene y vuelve a descender hasta la posición de partida. a) Explique las variaciones de energía cinética, de energía potencial y de energía mecánica de la partícula a lo largo del desplazamiento. b) Repita el apartado anterior suponiendo que hay rozamiento.

11) a) Defina energía potencial a partir del concepto de fuerza conservativa. b) Explique por qué, en lugar de energía potencial en un punto, deberíamos hablar de variación de energía potencial entre dos puntos. Ilustre su respuesta con algunos ejemplos.

12) a) Explique qué son fuerzas conservativas. Ponga un ejemplo de fuerza conservativa y otro de fuerza que no lo sea. b) ¿Se puede afirmar que el trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es siempre igual a la variación de su energía cinética? Razone la respuesta y apóyese con algún ejemplo.

12) a) ¿Puede ser negativa la energía cinética de una partícula? ¿Y la energía potencial? En caso afirmativo explique el significado físico del signo. b) ¿Se cumple siempre que el aumento de la energía cinética es igual a la disminución de la energía potencial? Justifique la respuesta.

13) Conteste razonadamente a las siguientes preguntas: a) ¿Puede asociarse una energía potencial a una fuerza de rozamiento? b) ¿Qué tiene más sentido físico, la energía potencial en un punto o la variación de energía potencial entre dos puntos?

14) a) Principio de conservación de la energía mecánica. b) Desde el borde de un acantilado de altura h se deja caer libremente un cuerpo. ¿Cómo cambian sus energías cinética y potencial? Justifique la respuesta.

15) a) Explique la relación entre fuerza conservativa y variación de energía potencial. b) Un cuerpo cae libremente sobre la superficie terrestre. ¿Depende la aceleración de caída de las propiedades de dicho cuerpo? Razone la respuesta.

16) a) Conservación de la energía mecánica. b) Un cuerpo desliza hacia arriba por un plano inclinado que forma un ángulo α con la horizontal. Razone qué trabajo realiza la fuerza peso del cuerpo al desplazarse éste una distancia d sobre el plano.

17) a) Explique el principio de conservación de la energía mecánica y en qué condiciones se cumple. b) Un automóvil desciende por un tramo pendiente con el freno accionado y mantiene constante su velocidad. Razone los cambios energéticos que se producen.

18) a) Explique qué son fuerzas conservativas. Ponga un ejemplo de fuerza conservativa y otro de fuerza que no lo sea. b) ¿Se puede afirmar que el trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es siempre igual a la variación de su energía cinética? ¿Es igual a la variación de su energía potencial? Razone las respuestas.

19) a) Conservación de la energía mecánica. b) Se lanza hacia arriba por un plano inclinado un bloque con una velocidad v_0. Razone cómo varían su energía cinética, su energía potencial y su energía mecánica cuando el cuerpo sube y, después, baja hasta la posición de partida. Considere los casos: i) que no haya rozamiento; ii) que lo haya.

20) a) Explique el significado de "fuerza conservativa" y "energía potencial" y la relación entre ambos. b) Si sobre una partícula actúan tres fuerzas conservativas de distinta naturaleza y una no conservativa, ¿cuántos términos de energía potencial hay en la ecuación de la energía mecánica de esa partícula? ¿Cómo aparece en dicha ecuación la contribución de la fuerza no conservativa?

21) a) Explique qué es la energía mecánica de una partícula y en qué casos se conserva. b) Un objeto se lanza hacia arriba por un plano inclinado con rozamiento. Explique cómo cambian las energías cinética, potencial y mecánica del objeto durante el ascenso.

22) a) Energía potencial asociada a una fuerza conservativa. b) Si la energía mecánica de una partícula es constante, ¿debe ser necesariamente nula la fuerza resultante que actúa sobre la misma? Razone la respuesta.

Problemas resueltos de «Vibraciones»

1) Una partícula sobre un muelle oscila con un período de 0,80 s y una amplitud de 0,10 m. Al tiempo t = 0, está a 5 cm de la posición de equilibrio y moviéndose hacia –A. Determina: a) la ecuación del movimiento oscilatorio; b) la posición y la dirección del movimiento en el instante de tiempo t = 2,0 s; c) la gráfica x-t y v-t. [a) $x = 0{,}10\cdot\cos(2{,}5\pi t + \tfrac{2}{3}\pi)$; b) x = +0,05 m; v = +0,68 m/s]

Solución:

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0) \quad \Rightarrow \quad v = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi \text{ rad}}{0{,}80\,\text{s}} = 2{,}5\pi \tfrac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$x_{0(t=0)} = A\cos\phi_0 \quad \Rightarrow \phi_0 = \arccos\frac{x_0}{A} = \arccos\frac{-0{,}05\,\text{m}}{0{,}10\,\text{m}} = 120^\circ = 120^\circ \times \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{2}{3}\pi$$

$$v_{0(t=0)} = -A\omega \operatorname{sen}\phi_0 = -0{,}10\,\text{m} \times 2{,}5\pi \tfrac{\text{rad}}{\text{s}} \operatorname{sen}\left(\tfrac{2}{3}\pi\right) = -0{,}68\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0) = 0{,}10\cdot\cos\left(2{,}5\pi t + \tfrac{2}{3}\pi\right)$$

$$x_{t=2} = 0{,}10\cdot\cos\left(2{,}5\pi \tfrac{\text{rad}}{\text{s}} \times 2{,}0\,\text{s} + \tfrac{2}{3}\pi\right) = 0{,}05\,\text{m}$$

$$v_{t=2} = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0) = -0{,}10\,\text{m} \times 2{,}5\pi \tfrac{\text{rad}}{\text{s}} \operatorname{sen}\left(2{,}5\pi \tfrac{\text{rad}}{\text{s}} \times 2{,}0\,\text{s} + \tfrac{2}{3}\pi\right) = +0{,}68\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

Representar la gráfica x/t siendo x = 0,10·cos (2,5π·t + 2π/3)

$x_{(t=0)}$ = -0,05 m

x = - A = -0,10 = 0,10·cos ϕ ⇒ cos ϕ = -1 ⇒ ϕ = (2n+1)π = 2,5π·t + 2π/3 ⇒ t = [(2n+1) – 2/3]/2,5

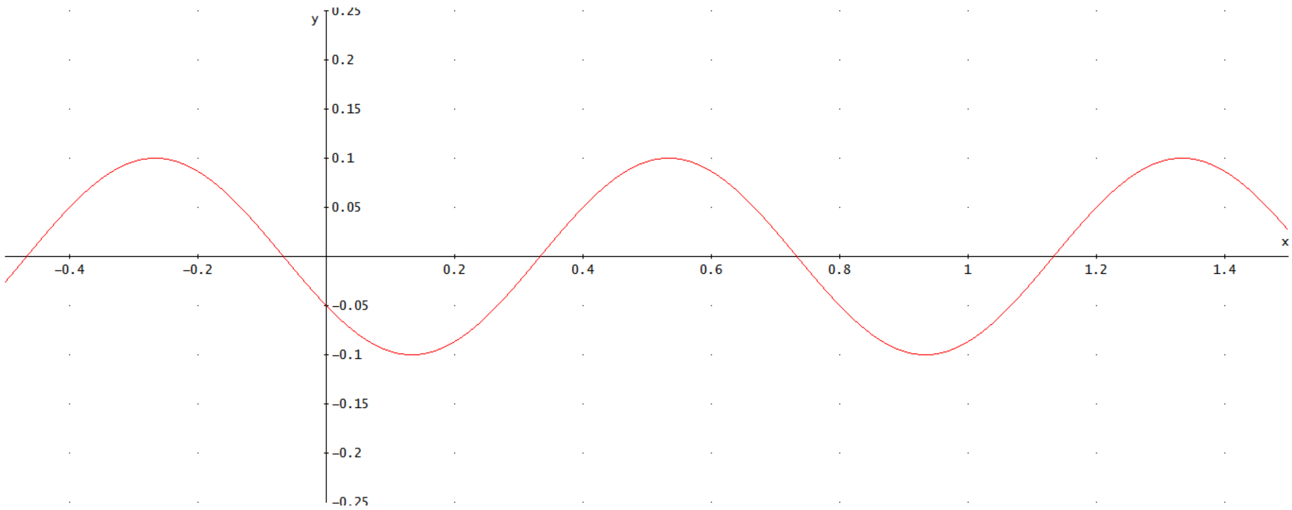
t_0 = 0,1333 s; t_1 = 0,9333 s; t_2 = …

x = 0 = 0,10·cos ϕ ⇒ cos ϕ = 0 ⇒ ϕ = (2n+1)π/2 = 2,5π·t + 2π/3 ⇒ t = [(2n+1)/2 – 2/3]/2,5

t_0 = -0,0666 s; t_1 = 0,333 s; t_2 = 0,7333 s …

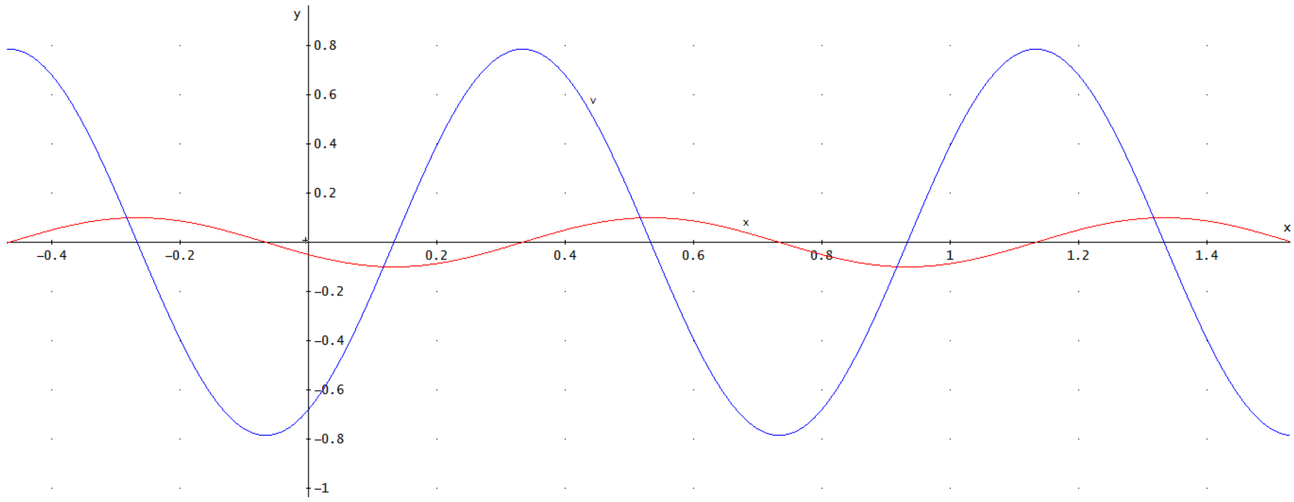
x = + A = 0,10 = 0,10·cos ϕ ⇒ cos ϕ = +1 ⇒ ϕ = 2nπ = 2,5π·t + 2π/3 ⇒ t = [2n – 2/3]/2,5

t_0 = -0,26666 s; t_1 = 0,5333 s; t_2 = 1,333 s …



Representar la gráfica v/t siendo v = -0,10·2,5π· sen (2,5π·t + 2π/3) = -0,7085· sen (2,5π·t + 2π/3)

$v_{(t=0)}$ = -0,25π·sen (2π/3) = -0,68 m/s



2) Una partícula, de masa 0,500 kg, oscila sobre un muelle y se observa que se encuentra en el punto x = 0,15 m en el tiempo inicial t = 0. Alcanza el desplazamiento máximo de 0,25 m en el tiempo t = 0,300 s. Determina: a) la ecuación del movimiento y dibuja la gráfica posición-tiempo; b) el instante, durante el primer ciclo, en que la masa pasa por el punto x = 0,20 m. [a) x = 0,25·cos (πt – 0,3π); b) 0,1·s; 0,5·s]

Solución:

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0) \quad \Rightarrow \quad v = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0)$$

$$x_{0(t=0)} = +0{,}15\,\text{m} = A\cos\phi_0 \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = \arccos\frac{x_0}{A} = \arccos\frac{0{,}15\,\text{m}}{0{,}25\,\text{m}} = \pm 53{,}13^{\circ} \times \frac{\pi\ \text{rad}}{180^{\circ}} = \pm 0{,}3\pi\ \text{rad}$$

$$\left.\begin{cases} v_{0(t=0)} = -A\omega\operatorname{sen}\phi_0 = -A\omega\operatorname{sen}(-0{,}3\pi) > 0 \\ v_{0(t=0)} = -A\omega\operatorname{sen}\phi_0 = -A\omega\operatorname{sen}(0{,}3\pi) < 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \phi_0 = -0{,}3\pi\ \text{rad} = 1{,}7\pi\ \text{rad}$$

$$\left.\begin{cases} x_{(t=0,3)} = +A = 0{,}25\,\text{m} \\ \cos(\omega t + \phi_0) = +1 \end{cases}\right\} \quad \omega t + \phi_0 = 2n\pi \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi - \phi_0}{t} = \frac{2\pi - 1{,}7\pi}{0{,}3\,\text{s}} = \pi\ \tfrac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\ \text{rad}}{\pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 2\ \text{s}$$

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0) = 0{,}25\cos(\pi t - 0{,}3\pi) = 0{,}25\cos(\pi t + 1{,}7\pi)$$

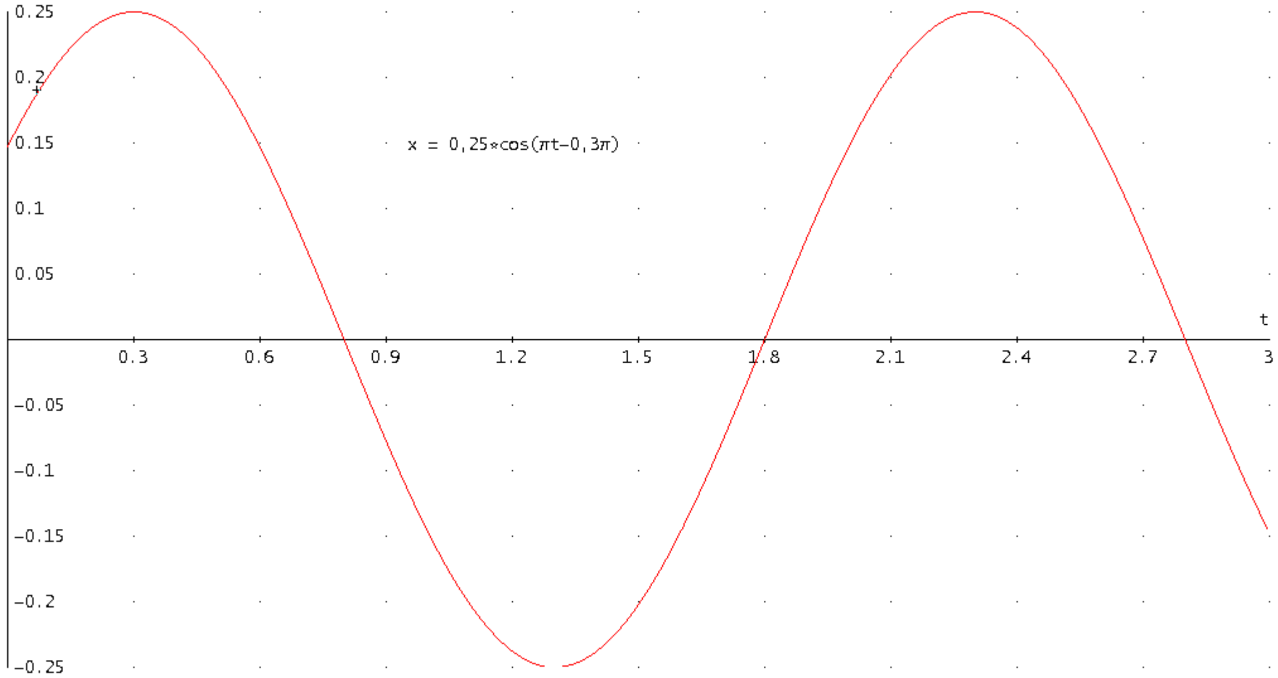
Los valores máximos y mínimos del movimiento oscilatorio se alcanzan al cabo de los siguientes tiempos:

$$x = 0{,}25\cos(\pi t - 0{,}3\pi) = 0{,}25\cos(\pi t + 1{,}7\pi)$$

$$x_{\text{máximo}} = +0{,}25 \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{cases} \cos(\pi t - 0{,}3\pi) = +1 \\ (\pi t - 0{,}3\pi) = 2n\pi \end{cases}\right\} \{t = 2n + 0{,}3\} \begin{cases} t_0 = 0{,}3\,\text{s} \\ t_1 = 2{,}3\,\text{s} \end{cases}$$

$$x_{\text{mínimo}} = -0{,}25 \quad \Rightarrow \left.\begin{cases} \cos(\pi t - 0{,}3\pi) = -1 \\ (\pi t - 0{,}3\pi) = (2n+1)\pi \end{cases}\right\} \{t = (2n+1) + 0{,}3\} \begin{cases} t_0 = 1{,}3\,\text{s} \\ t_1 = 3{,}3\,\text{s} \end{cases}$$

$$x_0 = 0 \quad \Rightarrow \left.\begin{cases} \cos(\pi t - 0{,}3\pi) = 0 \\ (\pi t - 0{,}3\pi) = (2n+1)\dfrac{\pi}{2} \end{cases}\right\} \left\{ t = \frac{(2n+1)}{2} + 0{,}3 \right\} \begin{cases} t_0 = 0{,}8\,\text{s} \\ t_1 = 1{,}8\,\text{s} \end{cases}$$



Por el punto x = 0,20 m pasa dos veces, antes de alcanzar el valor de la amplitud, antes de los 0,30 s, y un poco más tarde, en el punto simétrico respecto de la amplitud (x = 0,25 m; t = 0,30 s)

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0) = 0,25\cos(\pi t - 0,3\pi) = 0,25\cos(\pi t + 1,7\pi)$$

$$0,20 = 0,25\cos\phi \quad \{\phi = \omega t + \phi_0\}$$

$$\phi = \arccos\frac{0,20}{0,25} = \arccos 0,80 = \pm 36,86^{\circ} = \pm 0,2\pi \text{ rad} \quad \begin{cases} \phi = -0,2\pi \text{ rad} \\ \phi = +1,8\pi \text{ rad} \end{cases}$$

$$\phi_{1(x\to +A)} = +1,8\pi \text{ rad} = \pi t + 1,7\pi \quad \left\{ t = \frac{1,8\pi - 1,7\pi}{\pi} = 0,1\text{s} \right.$$

$$\phi_{2(x\to -A)} = +0,2\pi \text{ rad} = \pi t - 0,3\pi \quad \left\{ t = \frac{0,2\pi + 0,3\pi}{\pi} = 0,5\text{s} \right.$$

3) Una partícula de 0,5 kg que describe un movimiento armónico simple de frecuencia $\nu = 5/\pi$ Hz, tiene inicialmente una energía cinética de 0,2 J y una energía potencial de 0,8 J. Calcule: a) la posición y velocidad inicial, así como la amplitud de la oscilación y la velocidad máxima. b) Haga un análisis de las transformaciones de energía que tienen lugar en un ciclo completo. c) ¿Cuál sería el desplazamiento en el instante en que las energías cinética y potencial son iguales?. [a) $x_0 = \pm 0,17888$ m; $v_0 = \pm 0,8944$ m/s; A = 0,20 m; $v_{máxima} = 2,0$ m/s; c) x = 0,1414 m]

Solución:

$$E_{p(0)} = 0{,}8\,J = \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2$$

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot \tfrac{5}{\pi}\tfrac{rad}{s} = 10\,\tfrac{rad}{s}$$

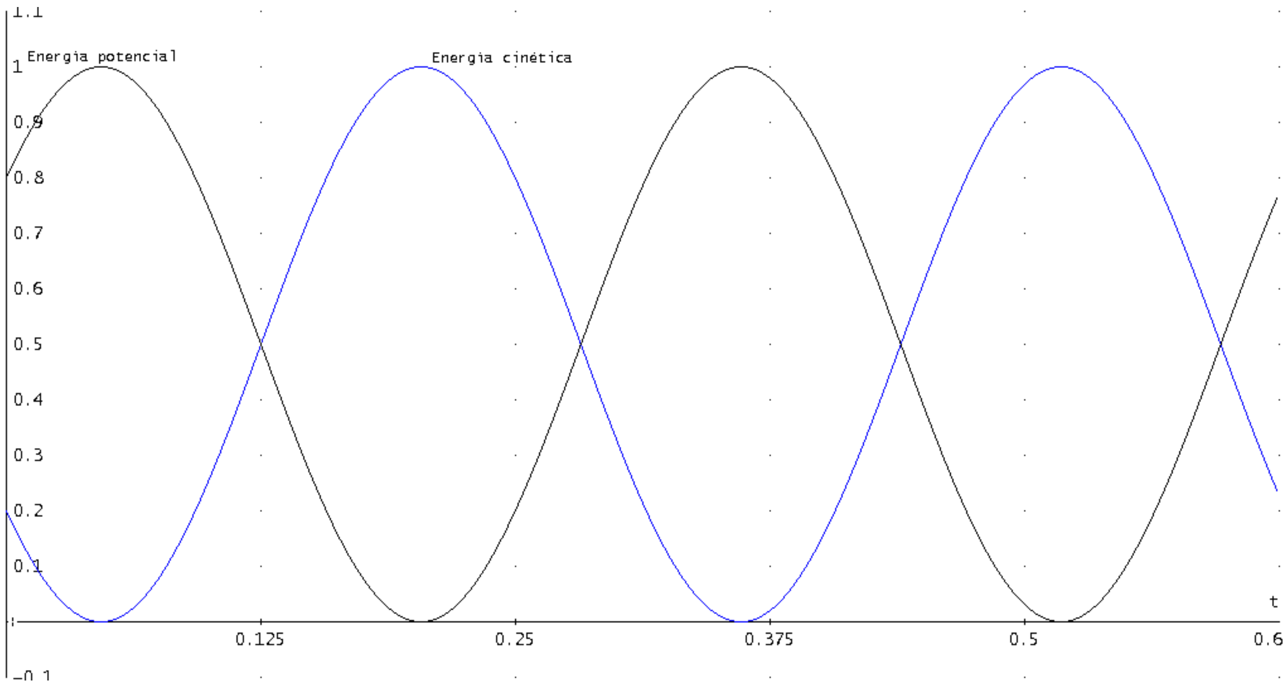
$$x_0 = \sqrt{\frac{2E_{p(0)}}{m\omega^2}} = \sqrt{\frac{2\times 0{,}8\,J}{0{,}5\,kg\times\left(10\,\tfrac{rad}{s}\right)^2}} = \pm 0{,}17888\,m$$

$$E_{c(0)} = 0{,}2\,J = \tfrac{1}{2}mv_0^2 \quad\Rightarrow\quad v_0 = \sqrt{\frac{2E_{c(0)}}{m}} = \pm 0{,}8944\,\tfrac{m}{s}$$

$$E_{total} = E_c + E_p = 0{,}2\,J + 0{,}8\,J = 1{,}0\,J = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 \quad\Rightarrow\quad A = \sqrt{\frac{2E_t}{m\omega^2}} = \pm 0{,}20\,m$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = A\cos(\omega t + \phi_0) \\ v = -\omega A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi_0) \end{array}\right\} \quad v_{máx} = -\omega A = -10\,\tfrac{rad}{s}\times 0{,}20\,m = -2{,}0\,\tfrac{m}{s}$$

$$E_c = E_{p(m)} = 0{,}5\,J = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \quad\Rightarrow\quad x = \sqrt{\frac{2E_p}{m\omega^2}} = \pm 0{,}1414\,m$$



4) Un cuerpo realiza un movimiento vibratorio armónico simple. a) Escriba la ecuación del movimiento si la aceleración máxima es $5\cdot\pi^2$ cm/s^2, el período de las oscilaciones 2 s y la elongación del cuerpo al iniciarse el movimiento 2,5 cm y siendo la velocidad negativa. b) Represente gráficamente la elongación y la velocidad en función del tiempo y comente la gráfica. [a) $x = 5\cdot\cos(\pi\cdot t + \pi/3)$ cm; b) $v = -5\cdot\pi\cdot\mathrm{sen}(\pi\cdot t + \pi/3)$ cm/s]

Solución:

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0) \Rightarrow v = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0) \Rightarrow a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi_0) = -\omega^2 x$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\,s} = \pi \tfrac{rad}{s}$$

$$a_{máx} = 5\pi^2 \tfrac{cm}{s^2} = -\omega^2 A \Rightarrow A = \frac{a_{máx}}{\omega^2} = \frac{5\pi^2 \tfrac{cm}{s^2}}{\left(\pi \tfrac{rad}{s}\right)^2} = 5\,cm$$

$$x_{0(t=0)} = 2{,}5\,cm = A\cos\phi_0 \Rightarrow \phi_0 = \arccos\frac{x_{0(t=0)}}{A} = \arccos\frac{2{,}5\,cm}{5\,cm} = \pm 60^o = 60^o \times \frac{\pi\,rad}{180^o} = \pm\tfrac{1}{3}\pi$$

$$v_{0(t=0)} = -A\omega \operatorname{sen}(\phi_0) = -A\omega \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) < 0$$

$$x = 0{,}05 \cdot \cos\left(\pi t + \tfrac{1}{3}\pi\right) \Rightarrow v = -0{,}05 \cdot \pi \cdot \operatorname{sen}\left(\pi t + \tfrac{1}{3}\pi\right)$$

$$x = 0{,}05 \cdot \cos\left(\pi t + \tfrac{1}{3}\pi\right) \quad \left\{\omega = \pi \tfrac{rad}{s}\right\} \quad T = 2\,s$$

$$x_{máximo} = +0{,}05 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \cos\left(\pi t + \tfrac{1}{3}\pi\right) = +1 \\ \pi t + \tfrac{1}{3}\pi = 2n\pi \end{matrix}\right\} \quad t = 2n - \tfrac{1}{3} \left\{\begin{matrix} t_1 = \tfrac{5}{3}s \\ t_2 = \tfrac{11}{3}s = \left(\tfrac{5}{3} + 2\right)s \end{matrix}\right.$$

$$x_{mínimo} = -0{,}05 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \cos\left(\pi t + \tfrac{1}{3}\pi\right) = -1 \\ \pi t + \tfrac{1}{3}\pi = (2n+1)\pi \end{matrix}\right\} \quad t = 2n + 1 - \tfrac{1}{3} \left\{\begin{matrix} t_0 = \tfrac{2}{3}s \\ t_1 = \tfrac{8}{3}s = \left(\tfrac{2}{3} + 2\right)s \end{matrix}\right.$$

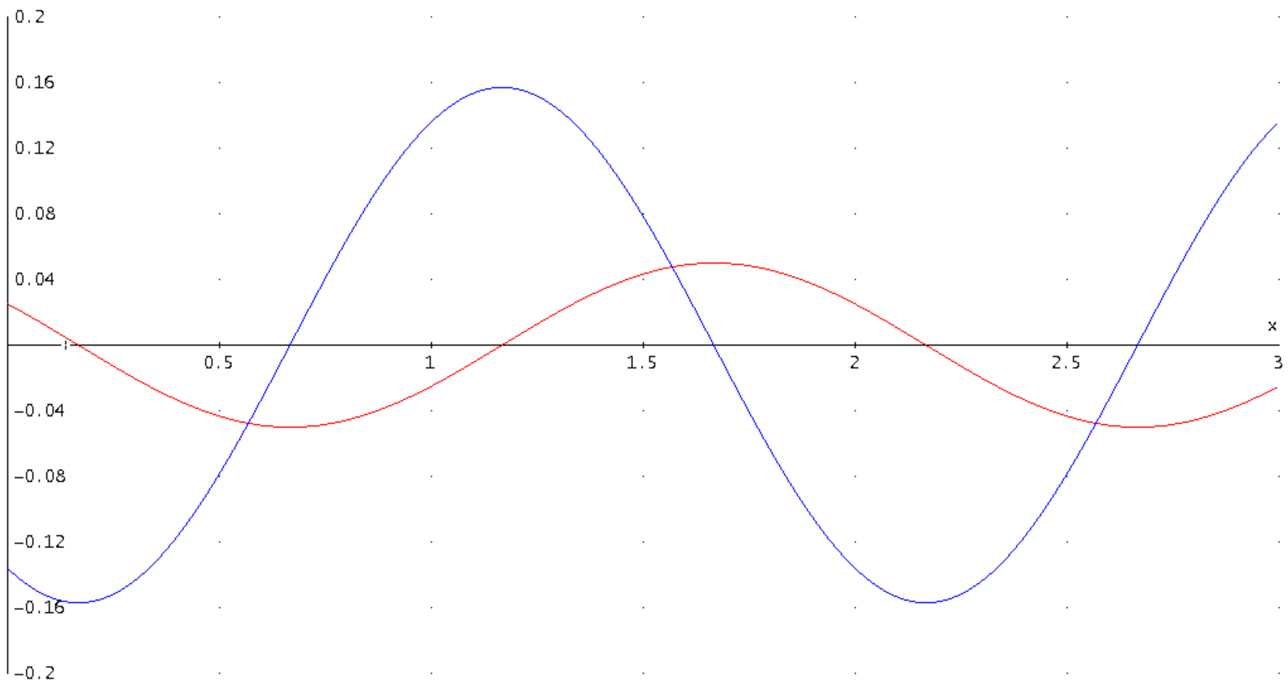
$$x = 0 = x_0 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \cos\left(\pi t + \tfrac{1}{3}\pi\right) = 0 \\ \pi t + \tfrac{1}{3}\pi = (2n+1)\dfrac{\pi}{2} \end{matrix}\right\} \quad t = \frac{2n+1}{2} - \tfrac{1}{3} \left\{\begin{matrix} t_0 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{6}s \\ t_1 = \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{7}{6} = \left(\tfrac{1}{6} + 1\right)s \end{matrix}\right.$$

$$v = -0{,}05 \cdot \pi \cdot \operatorname{sen}\left(\pi t + \tfrac{1}{3}\pi\right) \quad \left\{\omega = \pi \tfrac{rad}{s}\right\} \quad T = 2\,s$$

$$v = 0 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \operatorname{sen}\left(\pi t + \tfrac{1}{3}\pi\right) = 0 \\ \pi t + \tfrac{1}{3}\pi = n\pi \end{matrix}\right\} \quad t = n - \tfrac{1}{3} \left\{\begin{matrix} t_1 = \tfrac{2}{3}s \\ t_2 = \tfrac{5}{3} = \left(\tfrac{2}{3} + 1\right)s \end{matrix}\right.$$

$$v_{máx} = +0{,}05\pi \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \operatorname{sen}\left(\pi t + \tfrac{1}{3}\pi\right) = -1 \\ \pi t + \tfrac{1}{3}\pi = \left(2n + \dfrac{3}{2}\right)\pi \end{matrix}\right\} \quad t = 2n + \frac{3}{2} - \tfrac{1}{3} \left\{\begin{matrix} t_0 = \tfrac{7}{6}s \\ t_1 = \left(2 + \tfrac{7}{6}\right)s \end{matrix}\right.$$

$$v_{mín} = -0{,}05\pi \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \operatorname{sen}\left(\pi t + \tfrac{1}{3}\pi\right) = +1 \\ \pi t + \tfrac{1}{3}\pi = \left(2n + \dfrac{1}{2}\right)\pi \end{matrix}\right\} \quad t = 2n + \frac{1}{2} - \tfrac{1}{3} \left\{\begin{matrix} t_0 = \tfrac{1}{6}s \\ t_1 = \left(2 + \tfrac{1}{6}\right)s \end{matrix}\right.$$



5) Una masa de 200 g cuelga de un muelle colocado verticalmente de k = 10 N/m. La masa se estira hacia abajo hasta un punto donde el muelle está a 30 cm de su longitud sin estirar y sin la masa. En esa posición estirada se suelta. Determina: a) la distancia de la posición de equilibrio; b) la amplitud de las oscilaciones; c) la posición de la masa a los 3 s y respecto a la posición de equilibrio; d) la velocidad de la masa a los 3s. [a) Δl = 19,6 cm; b) A = 10,4 cm; c) y = 7,4 cm por encima de la posición de equilibrio; b) v = 51,6 cm/s]

Solución:

Las oscilaciones verticales son movimiento armónico simple. Aunque el muelle empiece a oscilar a 30 cm de alargamiento no significa que esa es su amplitud de la oscilación. Las oscilaciones tienen lugar alrededor de la posición de equilibrio, por lo que empezaremos determinándola:

$\Delta l = mg/k = 0{,}200\ \text{kg}\cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2/10\ \text{N/m} = 0{,}196\ \text{m} = 19{,}6\ \text{cm}$

El muelle se ha estirado 30 cm pero la posición de equilibrio del muelle con la masa colgada está a 19,6 cm, luego la amplitud de las oscilaciones tiene un valor de: A = 30 cm – 19,6 cm = 10,4 cm.

La posición de la masa se determina por la ecuación: $y(t) = A\cdot\cos(\omega\cdot t + \phi_0)$.

Posición inicial t = 0: $y_0 = -A = A\cdot\cos\phi_0 \Rightarrow \cos\phi_0 = -1 \Rightarrow \phi_0 = \pi$ rad.

$\omega = (k/m)^{½} = (10\ \text{N/m}/0{,}200\ \text{kg})^{½} = 7{,}071$ rad/s.

$y(t) = A\cdot\cos(\omega\cdot t + \phi_0) = 0{,}104\ \text{m}\cdot\cos(7{,}07\ \text{rad/s}\cdot 3\ \text{s} + \pi\ \text{rad}) = 0{,}07407\ \text{m} = 7{,}407\ \text{cm}$

La masa está a 7,4 cm por encima de la posición de equilibrio o a 12,2 cm por debajo del extremo original del muelle. Su velocidad en ese instante es: $v = -\omega\cdot A\cdot\text{sen}(\omega\cdot t + \phi_0)$ = 52 cm/s

$v = -\omega\cdot A\cdot\text{sen}(\omega\cdot t + \phi_0) = -7{,}071\ \text{rad/s}\cdot 0{,}104\ \text{m}\cdot\text{sen}(7{,}07\ \text{rad/s}\cdot 3\ \text{s} + \pi\ \text{rad}) = 0{,}516\ \text{m/s} = 51{,}6\ \text{cm/s}$

6) Un objeto de 0,2 kg, unido al extremo de un resorte, efectúa oscilaciones armónicas de 0,1 π s de período y su energía cinética máxima es de 0,5 J. a) Escriba la ecuación de movimiento del objeto y determine la constante elástica del resorte. b) Explique cómo cambiarían las características del movimiento si: i) se sustituye el resorte por otro de constante elástica doble; ii) se sustituye el objeto por otro de masa doble. [a) k = 80 N/m; x = 0,1118·cos (20·t); b)]

Solución:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 20\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \Rightarrow \quad k = m\omega^2 = 80\,\tfrac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = A\cos(\omega t + \phi_0) \\ v = -A\omega\,\text{sen}(\omega t + \phi_0) \\ a = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi_0) = -\omega^2 x \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} E_c = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right) \\ E_{c(\text{máx})} = \tfrac{1}{2}m\omega^2A^2 \end{array}\right.$$

$$A^2 = \frac{E_{c(\text{máx})}}{\tfrac{1}{2}m\omega^2} \quad \Rightarrow \quad A = 0{,}1118\,\text{m} = 11{,}18\,\text{cm}$$

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0) = 0{,}1118\cos(20t)$$

$$\left\{\begin{array}{l} k' = 2k \\ m\omega'^2 = 2m\omega^2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \omega' = \sqrt{2}\omega \\ T' = \tfrac{1}{\sqrt{2}}T \\ a' = -\omega'^2 x = 2a \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} m' = 2m \\ m'\omega'^2 = m\omega^2 \\ 2m\omega'^2 = m\omega^2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \omega' = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\omega \\ T' = \sqrt{2}\cdot T \\ a' = -\omega'^2 x = \tfrac{1}{2}a \end{array}\right.$$

7) a) ¿Qué características debe tener una fuerza para que al actuar sobre un cuerpo le produzca un movimiento armónico simple?. b) Represente gráficamente el movimiento armónico simple de una partícula dado por: y = 5 cos (10 t + π/2) (S I) y otro movimiento armónico que tenga una amplitud doble y una frecuencia mitad que el anterior.

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} y = 5\cdot\cos\left(10t + \tfrac{1}{2}\pi\right) \\ v = -50\cdot\text{sen}\left(10t + \tfrac{1}{2}\pi\right) \end{array}\right\} \quad \left\{\omega = 10\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{2\pi}{T}\right\} \quad T = \frac{2\pi}{10} = 0{,}628\,\text{s}$$

$$y_{0(t=0)} = 5\cdot\cos\tfrac{1}{2}\pi = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{0(t=0)} = -50\cdot\text{sen}\,\tfrac{1}{2}\pi = -50\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$y_{(t=\frac{1}{4}T)} = 5\cdot\cos\left(10\tfrac{1}{4}\tfrac{2\pi}{10} + \tfrac{1}{2}\pi\right) = 5\cdot\cos(\pi) = -5\,\text{m} \quad \Rightarrow \quad v_{(t=\frac{1}{4}T)} = -50\cdot\text{sen}\,\pi = 0\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$y_{(t=\frac{1}{2}T)} = 5\cdot\cos\left(10\tfrac{1}{2}\tfrac{2\pi}{10} + \tfrac{1}{2}\pi\right) = 5\cdot\cos\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = 0\,\text{m} \quad \Rightarrow \quad v_{(t=\frac{1}{2}T)} = -50\cdot\text{sen}\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = +50\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$y_{(t=\frac{3}{4}T)} = 5\cdot\cos\left(10\tfrac{3}{4}\tfrac{2\pi}{10} + \tfrac{1}{2}\pi\right) = 5\cdot\cos(2\pi) = +5\,\text{m} \quad \Rightarrow \quad v_{(t=\frac{3}{4}T)} = -50\cdot\text{sen}(2\pi) = 0\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$y_{(t=T)} = 5\cdot\cos\left(10\tfrac{2\pi}{10} + \tfrac{1}{2}\pi\right) = 5\cdot\cos(2{,}5\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{(t=\frac{3}{4}T)} = -50\cdot\text{sen}(2{,}5\pi) = -50\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\begin{cases} y' = 10 \cdot \cos\left(5t + \frac{1}{2}\pi\right) \\ v = -50 \cdot \operatorname{sen}\left(5t + \frac{1}{2}\pi\right) \end{cases} \quad \left\{ \omega'' = 5\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{2\pi}{T'} \right\} \quad T' = \frac{2\pi}{5} = 2T = 2 \times 0{,}628\,\text{s}$$

$$y'_{0(t=0)} = 10 \cdot \cos\tfrac{1}{2}\pi = 0 \quad \Rightarrow \quad v'_{0(t=0)} = -50 \cdot \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\pi = -50\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$y'_{\left(t=\frac{1}{4}T\right)} = 10 \cdot \cos\left(5\tfrac{1}{4}\tfrac{2\pi}{5} + \tfrac{1}{2}\pi\right) = 10 \cdot \cos(\pi) = -10\,\text{m} \quad \Rightarrow \quad v'_{\left(t=\frac{1}{4}T\right)} = -50 \cdot \operatorname{sen}\pi = 0\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$y'_{\left(t=\frac{1}{2}T\right)} = 10 \cdot \cos\left(5\tfrac{1}{2}\tfrac{2\pi}{5} + \tfrac{1}{2}\pi\right) = 10 \cdot \cos\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = 0\,\text{m} \quad \Rightarrow \quad v'_{\left(t=\frac{1}{2}T\right)} = -50 \cdot \operatorname{sen}\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = +50\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$y'_{\left(t=\frac{3}{4}T\right)} = 10 \cdot \cos\left(5\tfrac{3}{4}\tfrac{2\pi}{5} + \tfrac{1}{2}\pi\right) = 10 \cdot \cos(2\pi) = +10\,\text{m} \quad \Rightarrow \quad v'_{\left(t=\frac{3}{4}T\right)} = -50 \cdot \operatorname{sen}(2\pi) = 0\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$y'_{(t=T)} = 10 \cdot \cos\left(5\tfrac{2\pi}{5} + \tfrac{1}{2}\pi\right) = 10 \cdot \cos(2{,}5\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad v'_{\left(t=\frac{3}{4}T\right)} = -50 \cdot \operatorname{sen}(2{,}5\pi) = -50\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

8) Una partícula de 50 g vibra a lo largo del eje X, alejándose como máximo 10 cm a un lado y a otro de la posición de equilibrio (x = 0). El estudio de su movimiento ha revelado que existe una relación sencilla entre la aceleración y la posición que ocupa en cada instante: $a = -16 \cdot \pi^2 x$. a) Escriba las expresiones de la posición y de la velocidad de la partícula en función del tiempo, sabiendo que este último se comenzó a medir cuando la partícula pasaba por la posición x = 10 cm. b) Calcule las energías cinética y potencial de la partícula cuando se encuentra a 5 cm de la posición de equilibrio. [a) $x = 0{,}10 \cdot \cos(4\pi t)$; $v = -0{,}4\pi \cdot \operatorname{sen}(4\pi t)$; b) $E_c = 0{,}0296$ J; $E_p = 0{,}00987$ J]

Solución:

$$\left\{ x = A\cos(\omega t + \phi_0) \quad \Rightarrow \quad v = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0) \quad \Rightarrow \quad a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi_0) = -\omega^2 x \right\}$$

$$\left. \begin{cases} x = A\cos(\omega t + \phi_0) \\ x_0 = A\cos(\phi_0) \end{cases} \right\} \begin{cases} \phi_0 = \arccos\dfrac{x_0}{A} = 0^\circ \\ a = -\omega^2 x = -16\pi^2 x \quad \Rightarrow \quad \omega = 4\pi \end{cases}$$

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0) = 0{,}10\cos(4\pi t)$$

$$v = -0{,}4\pi \operatorname{sen}(4\pi t)$$

$$E_c = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right) = \tfrac{1}{2} \times 0{,}050\,\text{kg} \times \left(4\pi\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 \times \left(0{,}10^2 - 0{,}05^2\right)\text{m}^2 = 0{,}0296\,\text{J}$$

$$E_p = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \tfrac{1}{2} \times 0{,}050\,\text{kg} \times \left(4\pi\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 \times 0{,}05^2\,\text{m}^2 = 0{,}00987\,\text{J}$$

9) Una partícula de 0,2 kg describe un movimiento armónico simple a lo largo del eje x, de frecuencia 20 Hz. En el instante inicial la partícula pasa por el origen, moviéndose hacia la derecha, y su velocidad es máxima. En otro instante de la oscilación la energía cinética es 0,2 J y la energía potencial es 0,6 J. a) Escriba la ecuación de movimiento de la partícula y calcule su aceleración máxima. b) Explique, con ayuda de una gráfica, los cambios de energía cinética y de energía potencial durante una oscilación. [a) $x = 0{,}0005 \cdot \cos(40\pi t - \frac{1}{2}\pi)$; $a_{máx} = 8$ m/s^2]

Solución:

$$\left\{x = A\cos(\omega t+\phi_0) \quad\Rightarrow\quad v=-A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t+\phi_0) \quad\Rightarrow\quad a=-A\omega^2\cos(\omega t+\phi_0)=-\omega^2 x\right\}$$

$$\left.\begin{cases} x = A\cos(\omega t+\phi_0) \\ x_0 = A\cos(\phi_0) \end{cases}\right\}\begin{cases} \phi_0 = \arccos\dfrac{x_0}{A} = \pm\dfrac{1}{2}\pi \\ v_0 = -A\omega\,\mathrm{sen}(\phi_0) > 0 \\ \mathrm{sen}(\phi_0) = -1 \quad\Rightarrow\quad \phi_0 = -\dfrac{1}{2}\pi = \dfrac{3}{2}\pi \end{cases}$$

$$E_t = E_c + E_p = \tfrac{1}{2}m\omega^2\left(A^2-x^2\right)+\tfrac{1}{2}m\omega^2x^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2A^2$$

$$A^2 = \frac{E_t}{\frac{1}{2}m\omega^2} = \frac{0{,}8\,\mathrm{J}}{\frac{1}{2}\times 0{,}2\,\mathrm{kg}\times\left(2\pi\cdot 20\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)^2} \quad\Rightarrow\quad A = 0{,}0005066\,\mathrm{m}$$

$$a_{\text{máx}} = -\omega^2 A = -8\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

10) Un movimiento armónico simple viene descrito por la ecuación x(t) = A·sen (ωt + δ). a) Escriba la velocidad y la aceleración de la partícula en función del tiempo y explique cómo varían a lo largo de una oscilación. b) Deduzca las expresiones de las energías cinética y potencial en función de la posición y explique sus cambios a lo largo de la oscilación.

11) Un cuerpo realiza un movimiento vibratorio armónico simple. a) Escriba la ecuación del movimiento si la aceleración máxima es $10\cdot\pi^2$ cm/s^2, el período de las oscilaciones T = 1·s y la elongación del cuerpo al iniciarse el movimiento 2 cm y la velocidad positiva. b) Represente gráficamente la elongación y la velocidad en función del tiempo y comente la gráfica. [a) x = 2,5·cos (2π·t – 0,20π) cm; b) v = -5·π·sen (2π·t – 0,20π) cm/s]

Solución:

$$x = A\cos(\omega t+\phi_0) \quad\Rightarrow\quad v=-A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t+\phi_0)\Rightarrow \quad a=-A\omega^2\cos(\omega t+\phi_0)=-\omega^2 x$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\,\mathrm{rad}}{1\,\mathrm{s}} = 2\pi\,\tfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

$$a_{\text{máx}} = 10\pi^2\,\tfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2} = -\omega^2 A \quad\Rightarrow\quad A = \frac{a_{\text{máx}}}{\omega^2} = \frac{10\pi^2\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}}{\left(2\pi\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)^2} = 2{,}5\,\mathrm{cm}$$

$$x_{0(t=0)} = 2\,\mathrm{cm} = A\cos\phi_0 \quad\Rightarrow\phi_0 = \arccos\frac{x_{0(t=0)}}{A} = \arccos\frac{2\,\mathrm{cm}}{2{,}5\,\mathrm{cm}} = \pm 36{,}87^\mathrm{o}\times\frac{\pi\,\mathrm{rad}}{180^\mathrm{o}} = \pm 0{,}20\pi$$

$$v_{0(t=0)} = -A\omega\,\mathrm{sen}(\phi_0) = -A\omega\,\mathrm{sen}(-0{,}20\pi) > 0$$

$$x = 2{,}5\cdot\cos(2\pi t - 0{,}20\pi)\,\mathrm{cm} = 2{,}5\cdot\cos(2\pi t + 1{,}80\pi)\,\mathrm{cm}$$

$$v = -2{,}5\cdot 2\pi\cdot\mathrm{sen}(2\pi t+1{,}80\pi)\,\tfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} = -5\pi\cdot\mathrm{sen}(2\pi t+1{,}80\pi)\,\tfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$$

$$x = 2,5\cdot\cos(2\pi t - 0,20\pi)\,\text{cm} = 2,5\cdot\cos(2\pi t + 1,80\pi)\,\text{cm} \quad \{\omega = 2\pi\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}}\} \quad T = 1\,\text{s}$$

$$x_{\text{máximo}} = +2,5 \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{matrix}\cos(2\pi t - 0,20\pi) = +1\\ 2\pi t - 0,20\pi = 2n\pi\end{matrix}\right\} \quad t = \frac{2n\pi + 0,2\pi}{2\pi}\left\{\begin{matrix}t_0 = 0,1\,\text{s}\\ t_1 = 1,1\,\text{s}\end{matrix}\right.$$

$$x_{\text{mínimo}} = -0,05 \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{matrix}\cos(2\pi t - 0,20\pi) = -1\\ 2\pi t - 0,20\pi = (2n+1)\pi\end{matrix}\right\} \quad t = \frac{(2n+1)\pi + 0,2\pi}{2\pi}\left\{\begin{matrix}t_0 = 0,6\,\text{s}\\ t_1 = 1,6\,\text{s}\end{matrix}\right.$$

$$x = 0 = x_0 \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{matrix}\cos(2\pi t - 0,20\pi) = 0\\ 2\pi t - 0,20\pi = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}\end{matrix}\right\} \quad t = \frac{(2n+1)\frac{\pi}{2} + 0,2\pi}{2\pi} - \tfrac{1}{3}\left\{\begin{matrix}t_0 = 0,35\,\text{s}\\ t_1 = 0,85\,\text{s}\end{matrix}\right.$$

$$v = -5\pi\cdot\text{sen}(2\pi t - 0,20\pi)\,\tfrac{\text{cm}}{\text{s}} = -5\pi\cdot\text{sen}(2\pi t + 1,80\pi)\,\tfrac{\text{cm}}{\text{s}} \quad \{\omega = \pi\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}}\} \quad T = 2\,\text{s}$$

$$v = 0 \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{matrix}\text{sen}(2\pi t - 0,20\pi) = 0\\ 2\pi t - 0,20\pi = n\pi\end{matrix}\right\} \quad t = \frac{n\pi + 0,2\pi}{2\pi}\left\{\begin{matrix}t_0 = 0,1\,\text{s}\\ t_1 = 0,6\,\text{s}\end{matrix}\right.$$

$$v_{\text{máx}} = +5\pi \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{matrix}\text{sen}(2\pi t - 0,20\pi) = -1\\ 2\pi t - 0,20\pi = \left(2n + \dfrac{3}{2}\right)\pi\end{matrix}\right\} \quad t = \frac{(2n+1,5)\pi + 0,2\pi}{2\pi}\left\{\begin{matrix}t_0 = 0,85\,\text{s}\\ t_1 = 1,85\,\text{s}\end{matrix}\right.$$

$$v_{\text{mín}} = -5\pi \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{matrix}\text{sen}(2\pi t - 0,20\pi) = +1\\ 2\pi t - 0,20\pi = \left(2n + \dfrac{1}{2}\right)\pi\end{matrix}\right\} \quad t = \frac{(2n+0,5)\pi + 0,2\pi}{2\pi}\left\{\begin{matrix}t_0 = 0,35\,\text{s}\\ t_1 = 1,35\,\text{s}\end{matrix}\right.$$

12) a) Describa el movimiento armónico simple y comente sus características cinemáticas y dinámicas. b) Una masa oscila verticalmente suspendida de un muelle. Describa los tipos de energía que intervienen y sus respectivas transformaciones.

13) Un cuerpo, situado sobre una superficie horizontal lisa y unido al extremo de un resorte, efectúa un movimiento armónico simple y los valores máximos de su velocidad y aceleración son 0,6 m/s y 7,2 m/s^2 respectivamente. a) Determine el período y la amplitud del movimiento. b) Razone cómo variaría la energía mecánica del cuerpo si se duplicara: i) la frecuencia; ii) la aceleración máxima. [a) T = 0,5236 s; A = 0,05 m; b) i) E' = 4·E_t]

Solución:

$$\left\{x = A\cos(\omega t + \phi_0) \quad\Rightarrow\quad v = -A\omega\,\text{sen}(\omega t + \phi_0) \quad\Rightarrow\quad a = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi_0) = -\omega^2 x\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix}v_{\text{máx}} = A\omega = 0,6\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\\ a_{\text{máx}} = \omega^2 A = 7,2\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\end{matrix}\right\}\omega = \frac{v_{\text{máx}}}{A}$$

$$a_{\text{máx}} = \omega^2 A = \omega^2 A = \frac{v_{\text{máx}}^2}{A^2}\cdot A \quad\Rightarrow\quad A = \frac{v_{\text{máx}}^2}{a_{\text{máx}}} = \frac{\left(0,6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{7,2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0,05\,\text{m}$$

$$\omega = \frac{v_{\text{máx}}}{A} = \frac{0,6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,05\,\text{m}} = 12\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{2\pi}{T} \quad\Rightarrow\quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,5236\,\text{s}$$

$$E_t = E_c + E_p = \tfrac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right) + \tfrac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

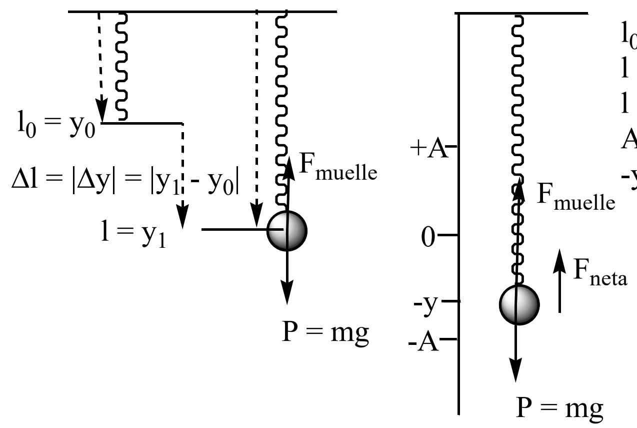
$$\omega' = 2\omega \quad \Rightarrow \quad E'_t = \tfrac{1}{2}m\omega'^2 A^2 = \tfrac{1}{2}m(2\omega)^2 A^2 = 4\cdot\tfrac{1}{2}m\omega^2 A^2 = 4E_t$$

$$a'_{máx} = 2a_{máx} \quad \left\{ a_{máx} = \omega^2 A = 7{,}2\,\tfrac{m}{s^2} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{a_{máx}}{\omega^2} \right\} \quad A' = \frac{a'_{máx}}{\omega^2} = 2\frac{a_{máx}}{\omega^2} = 2A$$

$$E'_t = \tfrac{1}{2}m\omega^2 A'^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2(2A)^2 = 4\cdot\tfrac{1}{2}m\omega^2 A^2 = 4E_t$$

14) Un bloque de 0,5 kg cuelga del extremo inferior de un resorte de constante elástica k = 72 N/m. Al desplazar el bloque verticalmente hacia abajo de su posición de equilibrio comienza a oscilar, pasando por el punto de equilibrio con una velocidad de 6 m/s. a) Razone los cambios energéticos que se producen en el proceso. b) Determine la amplitud y la frecuencia de la oscilación. [a) La E_c oscila entre 0 y 9 J; la E_p oscila entre 2,45 J y 11,45 J; la E_t = 11,45 J; b) A = 0,5 m; ω = 12 rad/s]

Solución:



$l_0 = y_0$ es la longitud del muelle sin estirar
$l = y_1$ es la longitud del muelle con la masa en reposo
$l = y_1$ define la posición de equilibrio y = 0
A es la amplitud de las oscilaciones alrededor de y = 0
-y es la posición de la masa en un instante

La energía en una superficie vertical: el movimiento es también armónico, de la misma pulsación $\omega = (k/m)^{1/2}$, pero con la posición de equilibrio está desplazada respecto del caso horizontal, está alargada en: Δl = mg/k. Por lo que respecto de la energía es de esperar que en vertical haya que añadirle un término de energía potencial correspondiente al alargamiento $\Delta l = l - l_0$:

$$\begin{cases} E_p = E_{p(m)} + E_{p(g)} = \tfrac{1}{2}kx^2 - mgy = \tfrac{1}{2}k\left[\Delta l + y\right]^2 - mgy = \tfrac{1}{2}k\left[\Delta l^2 + y^2 + 2y\Delta l\right] - mgy \\ E_p = \tfrac{1}{2}k\Delta l^2 + \tfrac{1}{2}ky^2 + ky\Delta l - mgy = \tfrac{1}{2}k\Delta l^2 + \tfrac{1}{2}ky^2 + mgy - mgy \\ E_p = E_{p(m)} + E_{p(g)} = \tfrac{1}{2}k\Delta l^2 + \tfrac{1}{2}ky^2 \end{cases}$$

$$E_c = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - y^2\right) = \tfrac{1}{2}k\left(A^2 - y^2\right)$$

$$E_{total} = E_c + E_p = \tfrac{1}{2}k\left(A^2 - y^2\right) + \tfrac{1}{2}k\Delta l^2 + \tfrac{1}{2}ky^2 = \tfrac{1}{2}kA^2 + \tfrac{1}{2}k\Delta l^2$$

$$E_{c(máx)} = \tfrac{1}{2}mv^2_{máx} = \tfrac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \tfrac{1}{2}kA^2$$

$$E_{c(máx)} = \tfrac{1}{2}mv^2_{máx} = \tfrac{1}{2}\times 0{,}5\,kg \times \left(6\,\tfrac{m}{s}\right)^2 = 9\,J \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{2\cdot E_{c(máx)}}{k}} = \sqrt{\frac{2\times 9\,J}{72\,\frac{N}{m}}} = 0{,}5\,m$$

ω^2 = k/m = 72/0,5; ω = 144 rad/s; **frecuencia = 1,90 Hz**

$\Delta l = (l - l_0)$ = mg/k = 0,5 kg·9,8 m/s²/72 N/m = 0,068 m

La energía total: $E_{total} = ½·k·A^2 + ½·k·\Delta l^2 = 9\ J + 2{,}45\ J = 11{,}45\ J$