2. «Trabajo y Energía. Campos escalares y vectoriales»

2.1 Concepto de trabajo y de energía

El trabajo y la energía son conceptos importantes tanto en la física como en la vida diaria. En física **una fuerza realiza trabajo** cuando actúa sobre **un objeto que se desplaza**, **y hay una componente de la fuerza a lo largo del desplazamiento**. Para una fuerza constante aplicada sobre un objeto que se mueve en línea recta, el trabajo realizado es igual al producto escalar de la fuerza por el desplazamiento: $\boxed{\mathbf{W} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}}$.

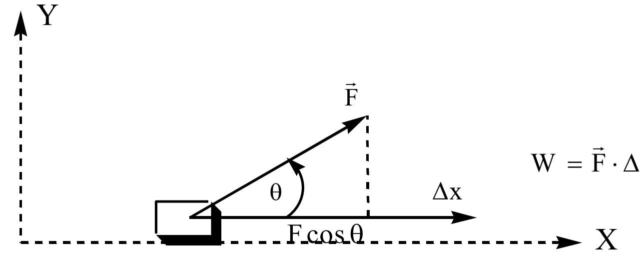
Por otra parte, el concepto de **energía está asociado al de trabajo**. Cuando se realiza trabajo por un sistema sobre otro, la energía se transfiere entre los dos sistemas. Por ejemplo, cuando realizamos trabajo empujando un columpio, la energía química de nuestro cuerpo se transfiere al columpio y aparece como energía cinética de movimiento o energía potencial gravitatoria del sistema Tierra-columpio.

Hay muchas formas de energía. La energía cinética está asociada con el movimiento de un objeto. La energía potencial está asociada con la configuración de un sistema, tal como la distancia de separación entre algún objeto y la Tierra. La energía térmica está asociada con el movimiento aleatorio de las moléculas dentro de un sistema y está íntimamente relacionada con la temperatura del sistema.

2.1.1 El trabajo en una dimensión

Consideramos el movimiento de un objeto, en una dimensión, debido a fuerzas constantes: Si aplicamos una fuerza constante sobre un objeto que se desplaza por la recta OX, formando un ángulo la fuerza y el desplazamiento, se define el trabajo realizado por la fuerza como el producto escalar entre la fuerza y el desplazamiento:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \left(F\cos\theta\right) \cdot \Delta x = F_x \cdot \Delta x$$



$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \left(F\cos\theta\right) \cdot \Delta x = F_x \cdot \Delta x$$

El trabajo es una magnitud escalar, positiva si el ángulo entre fuerza y desplazamiento es menor de 90º y negativa si es mayor de 90º. Las dimensiones del trabajo son de fuerza por distancia, en el Sistema Internacional (SI) de unidades la unidad de trabajo y energía es el **joule** (**J**), 1 J = 1 N·m. Una unidad de trabajo y energía que se utiliza en la física atómica y nuclear es el electrón-voltio (eV): 1 eV = $1{,}6\cdot 10^{-19}$ J.

Cuando se aplican, sobre el objeto, varias fuerzas que realizan trabajo, el trabajo total se determina sumando el trabajo realizado por cada fuerza. Siendo el desplazamiento el mismo para todas:

$$W_{neto} = F_{1x} \cdot \Delta x + F_{2x} \cdot \Delta x + \ldots = \left(F_{1x} + F_{2x} + \ldots\right) \cdot \Delta x = F_{x(neta)} \cdot \Delta x$$

Por tanto, el trabajo neto realizado sobre una partícula, sobre la que se aplican varias fuerzas es el producto de la fuerza neta por el desplazamiento.

2.1.2 El teorema trabajo-energía cinética en una dimensión

Hay una relación importante entre el trabajo neto realizado sobre una partícula y el cambio en su velocidad.

Sea F_x la fuerza neta actuante sobre una partícula, de masa m, mientras esta se está desplazando (Δx). El trabajo realizado por la fuerza neta es igual al trabajo neto realizado sobre la partícula: $W_{neto} = F_{x(neta)} \cdot \Delta x = m \cdot a_x \cdot \Delta x$.

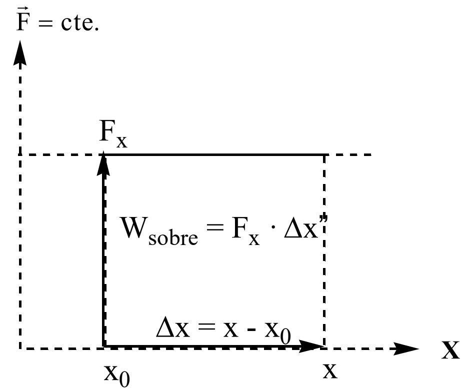
Si la fuerza es constante la aceleración es constante, y se obtiene la relación siguiente:

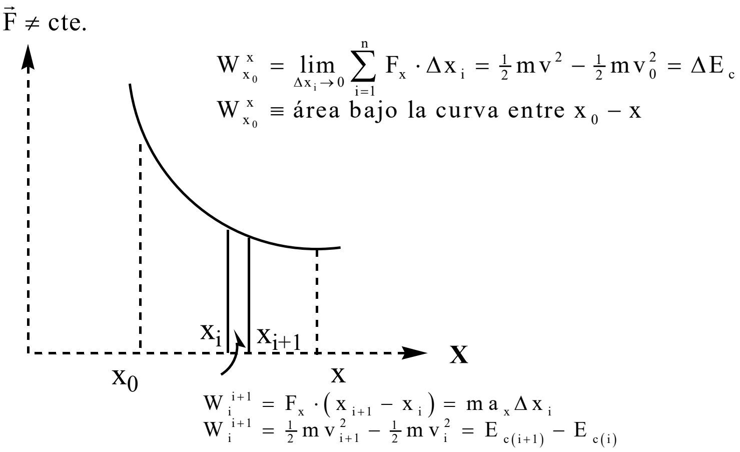
$$\left\{\begin{matrix} F = cte \\ a = cte \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} v^2 - v_0^2 = 2a_x\Delta x \\ \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = a_x\Delta x \end{matrix}\right\} \quad \boxed{W_{neto} = F_x \cdot \Delta x = ma_x \cdot \Delta x = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = E_{c(f)} - E_{c(i)} = \Delta E_c}$$

La magnitud $E_c = \frac{1}{2}mv^2$, que se mide en julios (J) y es un escalar, se llama **energía cinética** de la partícula de masa m que lleva una velocidad v. Siendo el trabajo neto realizado sobre una partícula, de masa m, igual al cambio en su energía cinética: $\boxed{W_{neto} = \Delta E_c = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2}$

Este resultado se conoce como **teorema trabajo-energía cinética**. El teorema es válido tanto si la fuerza neta es constante o variable.

2.1.3 El trabajo realizado por una fuerza variable





En la figura de la izquierda está dibujada, en el eje de ordenadas, una fuerza F constante aplicada a una partícula en función de su posición x, representada sobre el eje de abscisas. El trabajo realizado sobre la partícula que experimenta un desplazamiento está representado por el área bajo la recta fuerza-posición: $\mathbf{W_{sobre\text{-}partícula} = F_x \cdot \Delta x}$.

Ejemplos de **fuerzas que varían con el desplazamiento**:

- Fuerza que realiza un muelle: mayor cuanto más se alarga $\boxed{\vec{F}_{muelle} = -k \cdot \left[\vec{r} - \vec{r}_{0(equilibrio)}\right] = -k \cdot \vec{r}}$.
- Fuerza gravitatoria: mayor cuanto más se acercan las dos masas $\boxed{\vec{F}_g = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r}$.
- Fuerza electrostática: mayor cuanto más se acercan las dos cargas: $\boxed{\vec{F}_e = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{u}_r = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\vec{u}_r}$.

Un ejemplo de fuerza que varía con el desplazamiento se representa en la gráfica de la derecha. Para calcular el trabajo realizado por una fuerza variable debemos calcular el área total bajo la curva fuerza-posición, entre dos posiciones. Para ello consideramos que la fuerza es constante en desplazamientos infinitesimales, por lo que el trabajo será el área de los rectángulos de base infinitesimal $W_i = F_x \cdot \Delta x_i$. Luego el trabajo total, realizado por una fuerza variable, será la suma de todas las áreas de los infinitos rectángulos de base infinitesimal:

$$W_i^{i+1}\begin{cases} W_i^{i+1} = F_x \cdot (x_{i+1} - x_i) = ma_x \Delta x_i \\ W_i^{i+1} = \frac{1}{2}mv_{i+1}^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = E_{c(i+1)} - E_{c(i)} \end{cases} \qquad W_{x_0}^{x}\begin{cases} W_{x_0}^{x} = \lim_{\Delta x_i \to 0}\sum_{i=1}^{n} F_x \cdot \Delta x_i = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \Delta E_c \\ W_{x_0}^{x} \equiv \text{área bajo la curva entre } x_0 - x \end{cases}$$

En cada área del rectángulo $F_x \cdot \Delta x_i$, la fuerza F_x es constante, y así el trabajo será igual al cambio en la energía cinética sobre aquel intervalo. El trabajo total realizado es la suma de las áreas sobre todos los intervalos, las cuales son iguales al cambio en la energía cinética sobre el intervalo completo. Por tanto el teorema trabajo-energía cinética, $\boxed{W_{neto} = \Delta E_c = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2}$, es válido tanto para fuerzas variables como para fuerzas constantes.

Demostración: *el diferencial de energía cinética es igual al diferencial de trabajo realizado sobre ella*: $\mathbf{dE_c = dW}$. Si consideramos la energía cinética de una partícula: $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\vec{v} \cdot \vec{v})$

$$E_c = \frac{1}{2}m(\vec{v} \cdot \vec{v}) \Rightarrow \frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2}m\left(\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}\right) = \frac{1}{2}m\left(2\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\right) = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \boxed{dE_c = \vec{F} \cdot d\vec{r} = dW}$$

2.1.4 Ejercicios de aplicación del teorema trabajo-energía cinética

1º) Un vehículo, de masa 3.000 kg, está en reposo y es levantado verticalmente por una grúa que ejerce una fuerza sobre el vehículo de 31.000 N, que también es vertical y hacia arriba. Esta fuerza se aplica en una distancia de 2 m. Determina: a) el trabajo realizado por la grúa; b) el trabajo realizado por la gravedad; c) la energía cinética que adquiere el vehículo y su velocidad al cabo de los 2 m. [a) 62.000 J; b) -58.800 J; c) 3.200 J; 1,46 m/s]

Solución:

La fuerza aplicada se produce en la dirección del movimiento (eje vertical OY), por lo que el trabajo es positivo. Sin embargo, la gravedad está en dirección opuesta a la del movimiento (-OY), y el trabajo realizado por la gravedad es negativo. La velocidad final del vehículo se obtiene desde la energía cinética final, que se obtiene aplicando el teorema trabajo-energía cinética. El cálculo del trabajo total se puede hacer de dos formas, determinando el trabajo de cada fuerza o a partir de la fuerza neta.

$$W_{neto} = \Delta E_c = E_{c(f)} - E_{c(i)} = \tfrac{1}{2} m v_f^2 - \tfrac{1}{2} m v_i^2 = \tfrac{1}{2} m v_f^2 \qquad \left\{ W_{neto} = W_{\left(F_{aplicada}\right)} + W_{\left(F_{gravedad}\right)} = W_F + W_P \right.$$

$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos\alpha \begin{cases} W_{grúa} = F_{grúa} \cdot \Delta y \cdot \cos 0^\circ = 31.000\ \text{N} \times 2\ \text{m} \times 1 = 62.000\ \text{J} \\ W_{gravedad} = P \cdot \Delta y \cdot \cos 180^\circ = \left(3.000\ \text{kg} \times 9{,}8\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \times 2\ \text{m} \times (-1) = -58.800\ \text{J} \end{cases}$$

$$W_{neto} = \vec{F}_{neta} \cdot \Delta \vec{r} = \left(F_{grúa} - F_{gravedad}\right) \cdot \Delta y = \left(31.000\ \text{N} - 29.400\ \text{N}\right) \times 2\ \text{m} = 3.200\ \text{J}$$

$$W_{neto} = \Delta E_c = W_{grúa} + W_{gravedad} = 62.000\ \text{J} - 58.800\ \text{J} = 3.200\ \text{J}$$

$$W_{neto} = \Delta E_c = E_{c(f)} - E_{c(i)} = E_{c(f)} - 0 = \tfrac{1}{2} m v_f^2 \quad \Rightarrow \quad v_f^2 = \frac{2 \cdot \Delta E_c}{m} = \frac{2 \times 3.200\ \text{J}}{3.000\ \text{kg}} \Rightarrow \quad v_f = 1{,}46\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

2º) En un tubo de televisión se acelera un electrón, partiendo del reposo, hasta alcanzar una energía cinética de 2,5 keV en una distancia de 80 cm. Determina la fuerza eléctrica aplicada sobre el electrón considerando que es constante y en la misma dirección del movimiento.

Solución:

$$W_{total} = \Delta E_c = \vec{F}_{neta} \cdot \Delta \vec{r} = F_{neta} \cdot \Delta r \cdot \cos\alpha$$

$$F_{neta} = \frac{W_{total}}{\Delta r \cdot \cos\alpha} = \frac{\Delta E_c}{\Delta r \cdot \cos\alpha} = \frac{2.500\ \text{eV}}{0{,}80\ \text{m}} \times \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1\ \text{eV}} = 5{,}0 \cdot 10^{-16}\ \text{N}$$

3º) Tiramos de un trineo, de masa 80 kg, que se desliza sobre el hielo, con una fuerza de 180 N formando un ángulo de 20º con la horizontal. Si parte del reposo y se desplaza 5 m sin rozamiento, determina el trabajo que realizamos y la velocidad final del trineo.

Solución:

Consideramos que el trineo se mueve sobre el eje OX horizontal. El trineo está sometido a tres fuerzas, la fuerza aplicada que forma un ángulo de 20º con la horizontal, la fuerza peso dirigida hacia el eje –OY, y la fuerza normal en la dirección +OY

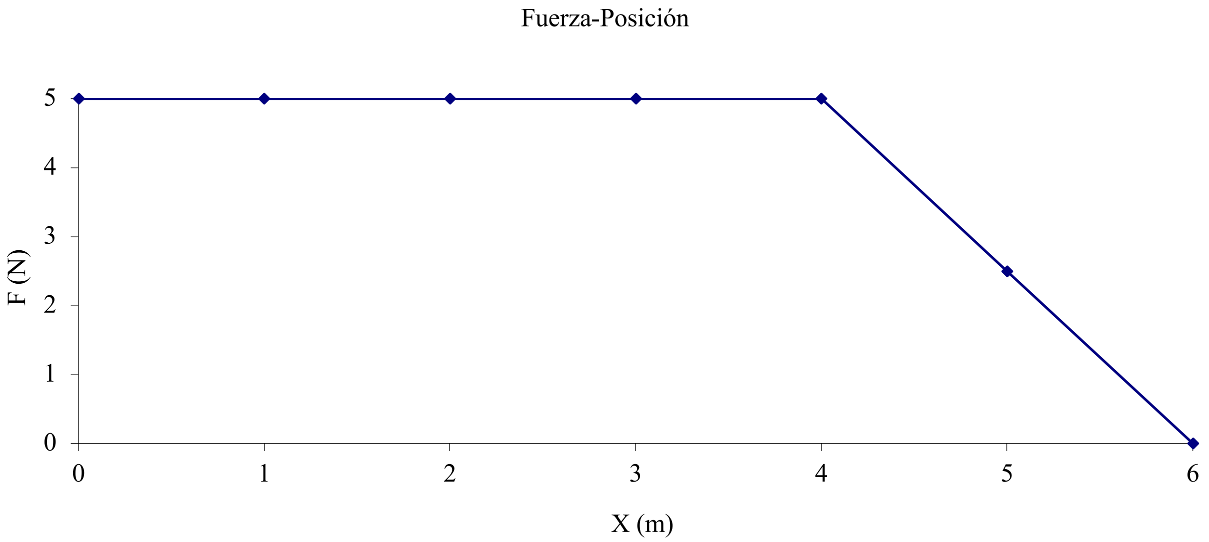
$$W_{total} = \vec{F}_{neta} \cdot \Delta\vec{r} = \Delta E_c = E_{c(f)} - E_{c(i)} = \tfrac{1}{2} m v_f^2 - \tfrac{1}{2} m v_i^2 = \tfrac{1}{2} m v_f^2$$

$$\vec{F}_{neta} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{F}_n \quad \begin{cases} F_{neta(x)} = F\cos 20^o = 180\ \text{N} \times \cos 20^o \\ F_{neta(y)} = F \cdot \text{sen}\, 20^o - mg + F_n = F \cdot \text{sen}\, 20^o - mg + \left(mg - F \cdot \text{sen}\, 20^o\right) = 0 \end{cases}$$

$$W_{total} = \vec{F}_{neta} \cdot \Delta\vec{r} = F_{neta(x)} \cdot \Delta x = \left(180\ \text{N} \times \cos 20^o\right) \times 5\ \text{m} = 845,7\ \text{J}$$

$$W_{total} = 845,7\ \text{J} = \Delta E_c = E_{c(f)} = \tfrac{1}{2} m v_f^2 \quad \Rightarrow v_f^2 = \frac{2 \cdot \Delta E_c}{m} = \frac{2 \times 845,7\ \text{J}}{80\ \text{kg}} \quad \Rightarrow v_f = 4,6\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

4º) Una fuerza F varía con el eje x como se expresa en el dibujo. Determina el trabajo realizado por la fuerza sobre una partícula cuando se mueve desde la posición 0 m hasta la posición 6 m.



Solución: El trabajo total se determina si calculamos el área bajo la curva representada por la fuerza en función de la posición x. En la curva tenemos dos áreas diferenciadas, una desde la posición 0 m hasta 4 m, que es un rectángulo, y la otra desde 4 m hasta 6 m que es un triángulo.

$$W_{total} = \left(5\ \text{N} \times 4\ \text{m}\right) + \left(\tfrac{1}{2} \times 5\ \text{N} \times 2\ \text{m}\right) = 20\ \text{J} + 5\ \text{J} = 25\ \text{J}$$

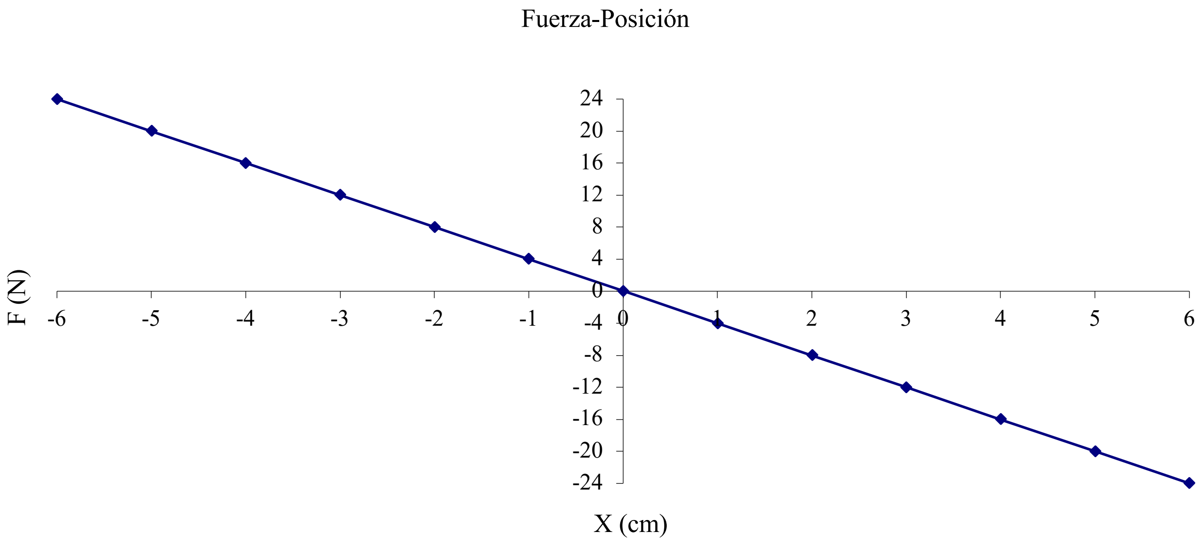
5º) Un bloque de masa 4 kg situado sobre una mesa horizontal, por la que se puede deslizar sin rozamiento, está unido a un muelle, de constante k = 400 N/m. El muelle está inicialmente comprimido con el bloque en la posición -5 cm. Determina el trabajo realizado por el muelle sobre el bloque cuando este se mueve desde la posición -5 cm hasta su posición de equilibrio, y la velocidad del bloque en la posición de equilibrio.

Solución:

El trabajo realizado sobre el bloque cuando se mueve desde una posición a otra es igual al área bajo la curva de la componente de la fuerza sobre el eje x frente al eje x entre los límites que calculemos. El trabajo realizado será igual al cambio en la energía cinética, que es exactamente la energía cinética final ya que la energía cinética inicial es cero.

El trabajo gráficamente.

$$W = \tfrac{1}{2} \times 20\ \text{N} \times 0,05\ \text{m} = 0,5\ \text{J} \quad \left\{W_{total} = \Delta E_c = \tfrac{1}{2} m v_f^2\right\} \quad v_f^2 = \frac{2 \cdot \Delta E_c}{m} = \frac{2 \times 0,5\ \text{J}}{4\ \text{kg}} \quad \Rightarrow v_f = 0,5\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

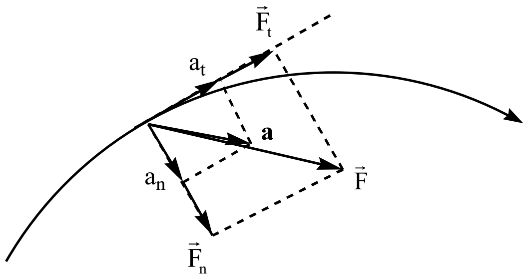


2.2 Trabajo y energía en varias dimensiones

La figura siguiente representa una partícula de masa m sobre la que actúa una fuerza, $\vec{F}$, que hace que se mueva a lo largo de una curva en el espacio.

La fuerza tiene dos componentes respecto al desplazamiento, la tangencial a la curva y la normal o centrípeta: $\vec{F} = \vec{F}_{tangencial} + \vec{F}_{centrípeta}$.

Consideremos un desplazamiento pequeño $d\vec{r} = ds \cdot \vec{u}_t$, en el que *ds* es la distancia medida a lo largo de la curva, la componente de la fuerza paralela F_s y la perpendicular F_n.



$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \begin{cases} F_t = ma_t = m\dfrac{dv}{dt} \\ F_n = ma_n = m\dfrac{v^2}{R} = m\omega^2 R \end{cases}$$

La componente perpendicular o normal F_n proporciona la fuerza centrípeta necesaria para que la partícula recorra la curva, y como es perpendicular al movimiento **no contribuye al trabajo realizado sobre la partícula por la fuerza**, por lo que **<u>el trabajo lo realiza la fuerza tangencial</u>**.

$$\boxed{dW_{neto} = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left(\vec{F}_t + \vec{F}_n\right) \cdot \left(ds \cdot \vec{u}_t\right) = \vec{F}_t \cdot \left(ds \cdot \vec{u}_t\right) = m\frac{dv}{dt}\vec{u}_t \cdot \left(ds \cdot \vec{u}_t\right) = m\frac{dv}{dt} \cdot ds = F_t \cdot ds}$$

$$dW_{neto} = m\frac{dv}{dt} \cdot ds = F_t \cdot ds = m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} \cdot ds = mv \cdot dv$$

$$W_{neto} = \int_{v_0}^{v} mv \cdot dv = \left[\tfrac{1}{2}mv^2\right]_{v_0}^{v} = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = E_{c(f)} - E_{c(i)} = \Delta E_c$$

Solamente realiza trabajo la componente tangencial de la fuerza: $\boxed{W_{neto} = F_t \cdot \Delta s}$.

2.2.1 Ejercicios de aplicación de trabajo y energía en tres dimensiones:

1º) Un trineo, de masa 100 kg, cae por una pendiente de 30º sin rozamiento durante 10 m. Determina el trabajo realizado sobre el trineo y la velocidad cuando llegue al suelo.

Solución: Sobre el trineo actúan dos fuerzas: el peso, que tiene dirección vertical hacia abajo, y la fuerza normal que es perpendicular a la superficie de la pendiente. La única fuerza que realiza trabajo es la fuerza gravitatoria ya que la fuerza normal al ser perpendicular al desplazamiento su trabajo es cero.

$$W_{total} = F_t \cdot \Delta s = mg \,\text{sen}\, \alpha \cdot \Delta s = 100 \text{ kg} \times 9{,}8 \tfrac{m}{s^2} \times \text{sen}\, 30º \times 10 \text{ m} = 4.900 \text{ J}$$
$$W_{total} = \Delta E_c = E_{c(f)} - E_{c(i)} = \tfrac{1}{2} m v_f^2 \quad \Rightarrow \quad v_f^2 = \frac{2 \cdot \Delta E_c}{m} = \frac{2 \times 4.900 \text{ J}}{100 \text{ kg}} \quad \Rightarrow \quad v_f = 9{,}89 \tfrac{m}{s}$$

2.3 Concepto de potencia

La potencia suministrada por una fuerza es **la rapidez con que la fuerza realiza trabajo**. Considera una partícula moviéndose con velocidad instantánea $\vec{v}$. En un corto intervalo de tiempo, dt, la partícula se ha desplazado $d\vec{s} = \vec{v} \cdot dt$. El trabajo realizado por una fuerza $\vec{F}$ actuando sobre la partícula durante este intervalo de tiempo es $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt$. En el SI la unidad de potencia es el **watt** (W): 1 W = 1 J/s.

La potencia entregada a la partícula es $P = \dfrac{dW}{dt} = \dfrac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

El **caballo de vapor** es una unidad de potencia y se define como la potencia necesaria para elevar verticalmente un peso de 75 kp (75 kp = 735,5 N) a la velocidad de 1 m/s, siendo **1 CV = 735,5 W**. El kilopondio también denominado frecuentemente kilogramo-fuerza es una unidad que es definida como aquella fuerza que imparte una aceleración gravitatoria estándar, de 9,80665 m/s^2, a la masa de un kilogramo: 1 kp = 1 kg×9,80665 m/s^2 = 9,81 N.

2.3.1 Ejercicios de aplicación de la potencia

1º) Usamos un pequeño motor para elevar objetos que pesan 800 N hasta una altura de 10 m en un tiempo de 20 s. Determina la potencia mínima que el motor debe producir.

Solución: Consideramos que el objeto se eleva sin aceleración, por lo que la fuerza ejercida hacia arriba por el motor es igual al peso del cuerpo.

$$W_{neto} = \vec{F}_{neta} \cdot \Delta \vec{d} \quad \left\{ \vec{F}_{neta} = F_{motor} - P = 0 \right\} \quad F_{motor} = P = mg$$
$$P_{motor} = \frac{W_{motor}}{t} = \frac{F_{motor} \cdot d}{t} = F_{motor} \cdot v_{objeto} = mg v_{objeto} \quad \Rightarrow \quad v_{objeto} = \frac{10 \text{ m}}{20 \text{ s}} = 0{,}5 \tfrac{m}{s}$$
$$P_{motor} = 800 \text{ N} \times 0{,}5 \tfrac{m}{s} = 400 \text{ W}$$

2.4 Campos escalares y vectoriales

2.4.1 Concepto de campo

El término *campo* se usa para significar la región del espacio y el valor de la magnitud física en la región. En una región del espacio se considera que existe un campo cuando hay un observable físico en cada punto del espacio. Si el observable físico es de naturaleza escalar, tal como la temperatura o la presión, será un campo escalar y si es de naturaleza vectorial, tal como una velocidad o una fuerza, será un campo vectorial.

El concepto de campo surge a mediados del siglo XIX, debido a Faraday, para explicar las interacciones entre cargas eléctricas. Para explicar estos hechos Faraday supuso que una carga eléctrica situada, en reposo, en el espacio está rodeada de un campo eléctrico (electrostático), el cual actúa sobre otra carga en reposo. Si la primera carga estuviese en movimiento estaría rodeada de un campo electromagnético, el cual influiría electromagnéticamente sobre otra carga en reposo o en movimiento.

La *interacción mutua entre dos partículas* se describe mediante el concepto de *campo de fuerzas*. Es decir, en vez de hablar de la acción de una partícula sobre otra, podemos decir que la partícula crea un campo en torno a ella y determinada fuerza actúa entonces sobre cada una de las otras partículas situadas en el campo.

El concepto de campo tiene mucha importancia en la Física ya que las interacciones no se propagan instantáneamente sino a una velocidad finita. Así **la fuerza que actúa sobre una partícula en un instante dado, no está determinada por las posiciones de las demás en el mismo instante**, un cambio en la posición de una de las partículas repercute sobre las otras partículas tan sólo *después de transcurrido un cierto tiempo*. Esto significa que *el campo tiene una realidad física* y no podemos hablar de una interacción directa de partículas colocadas a distancia las unas de las otras.

Las interacciones en un instante cualquiera pueden ocurrir solamente en puntos muy próximos en el espacio sería interacciones de contacto. Por tanto, lo correcto es hablar de ***la interacción de una partícula con el campo y de la ulterior interacción del campo con una segunda partícula***. Ahora bien, es conveniente recordar que las interacciones electromagnéticas tienen al fotón como partícula transportadora de la interacción siendo la velocidad de la luz finita.

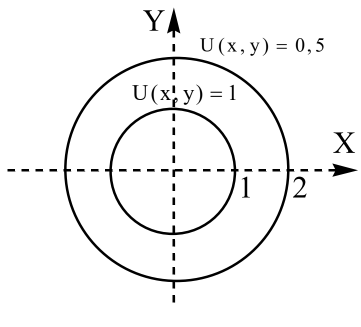
2.4.1.1 Campo escalar

Una magnitud escalar U, como la temperatura, que toma valores determinados en cada punto del espacio se llama función escalar del punto o campo escalar $U = U(\vec{r})$. Por ejemplo, campo de temperatura, de densidad de un medio no homogéneo, de presiones, etc. Un campo escalar puede definirse mediante la función escalar del argumento vectorial $U = U(\vec{r})$.

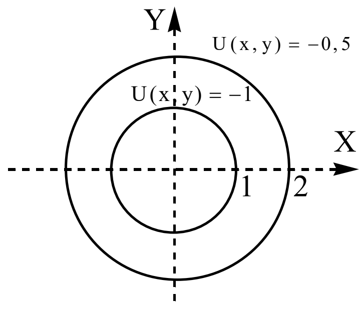
Superficie de nivel en un campo escalar: Consideremos un campo escalar U(x,y), los puntos del campo (puntos del espacio) en los cuales U(x,y) toma el mismo valor constituyen una superficie de nivel. *Siempre se cumple que por cada punto del campo pasa sólo una superficie de nivel.*

Superficies de nivel de dos campos escalares

$$U(x,y) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$



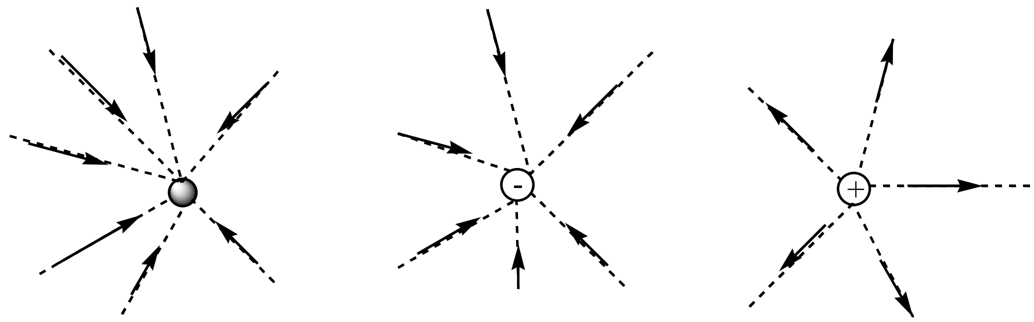
$$U(x,y) = -\frac{1}{r} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$



2.4.1.2 Campo vectorial

Una magnitud vectorial $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ que toma un valor determinado en cada punto del espacio se llama función vectorial o Campo Vectorial. Ejemplos de campos vectoriales: un campo de fuerzas, de fuerza gravitatoria o de fuerza electrostática, el campo de velocidades de las partículas de un líquido en movimiento, un campo de intensidad eléctrica, un campo magnético o de inducción magnética.

Campos vectoriales de fuerzas $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$



Líneas del campo vectorial: En un campo vectorial se llaman líneas del campo a unas líneas tales que en cada punto de la línea el vector del campo es tangente a la curva (líneas radiales y líneas circulares). *Siempre se cumple que por cada punto del campo pasa sólo una línea del campo y, por tanto, las líneas no se cortan.*

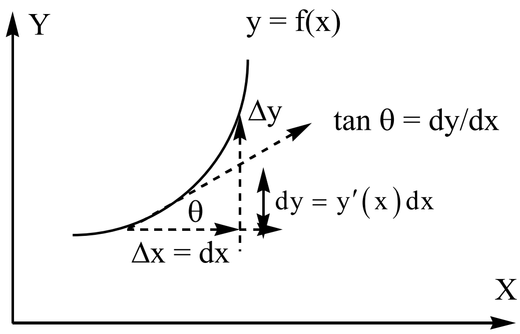
2.4.1.3 Diferencial de un escalar

En un campo escalar de temperaturas U = U(x,y,z), al pasar de un punto $P(r_x; r_y; r_z)$ a otro punto infinitamente próximo $P'(r_x + dr_x; r_y + dr_y; r_z + dr_z)$, éste varía un **diferencial de U** (dU). Si U dependiera solamente de la variable x entonces: $dU = U'(x)dx = \frac{dU}{dx}dx$.

Un diferencial de U sería la derivada de U con respecto a la variable multiplicado por lo que varía la variable, es decir, un diferencial de x. Si el campo escalar depende de dos variables U = U(x, y):

$$dU = U'_x dx + U'_y dy = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_x dy$$

Ejemplo de una variable: y = f(x):



$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x) \quad \Rightarrow \quad dy = y'(x)dx$$

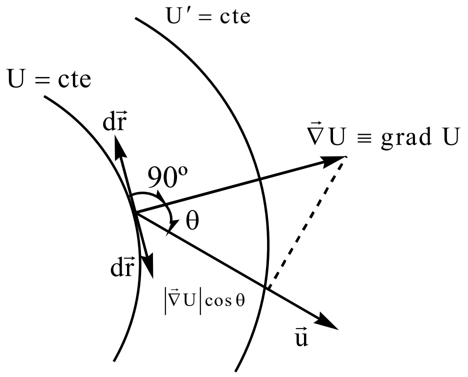
Ejemplo de escalar: $U = x^2 y \quad \Rightarrow \quad dU = U'_x dx + U'_y dy = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_x dy = (2xy)dx + (x^2)dy$

2.4.1.4 Concepto de gradiente: El diferencial de la función escalar U (dU) se puede expresar como el producto escalar de dos vectores, el vector gradiente de U $(\vec{\nabla}U)$ y el vector desplazamiento $(d\vec{r})$, siendo:

$$\boxed{dU = U'_x dx + U'_y dy = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_x dy = \vec{\nabla}U \cdot d\vec{r}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla}U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_y \vec{i} + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_x \vec{j} \\ d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} \end{array} \right\}$$

$$dU = \vec{\nabla}U \cdot d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{dU}{ds} = \vec{\nabla}U \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\nabla}U \cdot \vec{u}$$

Significado físico del vector gradiente: Representa la dirección del máximo cambio en los valores del Campo Escalar o la dirección de máxima pendiente en el Campo Escalar.



$$dU = \left|\vec{\nabla}U\right|\left|d\vec{r}\right|\cos\theta$$

$$\frac{dU}{\left|d\vec{r}\right|} = \left|\vec{\nabla}U\right|\cos\theta = \vec{\nabla}U \cdot \vec{u}$$

$$\left(\frac{dU}{\left|d\vec{r}\right|}\right)_{máx} = \left|\vec{\nabla}U\right|$$

Si nos movemos en una superficie de nivel, por puntos en los que U = cte. (dU = 0), entonces el producto escalar del vector gradiente de U, $\vec{\nabla}U$, por el vector $d\vec{r}$ es cero: $dU = \vec{\nabla}U \cdot d\vec{r} = 0$. El producto escalar cero implica que los dos vectores son perpendiculares, por tanto, el vector gradiente de U es un vector perpendicular a la superficie de nivel.

Ejemplo del significado físico del vector gradiente: Supongamos que la temperatura T en una superficie viene dada por la ecuación: $T = x^2 + y^2 + xy + 273$. Determine en el punto $P_1(1,1)$ la dirección en la que la temperatura aumenta más rápidamente y la rapidez del cambio de temperatura.

Respuesta: $T = x^2 + y^2 + xy + 273 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_y \vec{i} + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_x \vec{j} = (2x + y)\vec{i} + (2y + x)\vec{j}$

$$\left(\vec{\nabla}T\right)_{P_1(1,1)} = (2x + y)_{P_1(1,1)}\,\vec{i} + (2y + x)_{P_1(1,1)}\,\vec{j} = 3\tfrac{K}{m}\,\vec{i} + 3\tfrac{K}{m}\,\vec{j}$$

$$\frac{dT}{ds} = \left|\vec{\nabla}T\right| = \sqrt{\left(3\tfrac{K}{m}\right)^2 + \left(3\tfrac{K}{m}\right)^2} = \sqrt{18}\,\tfrac{K}{m}$$

En el punto $P_1(1,1)$ *la dirección en la que aumenta más la temperatura viene dada por el vector gradiente*, $\vec{\nabla}T = 3\frac{K}{m}\vec{i} + 3\frac{K}{m}\vec{j}$, siendo el valor del módulo, $\frac{dT}{ds} = \left|\vec{\nabla}T\right| = \sqrt{18}\,\frac{K}{m}$, la rapidez del cambio de temperatura.

También sabemos que la temperatura disminuye más rápidamente en el sentido $-\vec{\nabla}T$, en este sentido $\frac{dT}{ds} = -\sqrt{18}\,\frac{K}{m}$. El calor fluye en el sentido negativo del gradiente, ya que va desde temperatura más alta a más bajas.

2.4.2 Concepto de circulación del vector fuerza a lo largo de una trayectoria

Circulación elemental del vector fuerza: Sea un campo vectorial cuyo vector campo en el punto P(x,y) viene dado por $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$ y sea $d\vec{r} = dr_x \vec{i} + dr_y \vec{j}$ un desplazamiento elemental cualquiera. Se define la **circulación elemental del vector fuerza** al producto escalar del vector en ese punto por el diferencial de la posición:

$$dC = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dr_x + F_y dr_y \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} \\ d\vec{r} = dr_x \vec{i} + dr_y \vec{j} \end{array} \right\}$$

En física elemental aprendimos que el trabajo realizado por la fuerza aplicada sobre un objeto es igual al producto de la fuerza por el desplazamiento. Si la fuerza y el desplazamiento no son paralelos, entonces la componente de la fuerza perpendicular al desplazamiento no realiza trabajo. *Si la fuerza varía con la distancia o también la dirección del movimiento cambia con el tiempo*, podemos escribir, para un desplazamiento infinitesimal: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

<u>Concepto de circulación del vector fuerza a lo largo de una trayectoria</u>: Supongamos que un objeto se mueve debido a la fuerza F actuando sobre él, y que varía conforme se mueve el objeto a lo largo de una trayectoria curvilínea que une dos puntos A y B. La fuerza será una función de las coordenadas (x,y,z). Sin embargo, sobre una curva las coordenadas cartesianas están relacionadas por las ecuaciones de la curva, y así, **a lo largo de una curva hay sólo una variable independiente**.

<u>Ejemplo</u>: El trabajo que realiza la fuerza $\vec{F} = xy\vec{i} - y\vec{j}$, aplicada sobre un objeto, desde el punto A(0,0) hasta el B(1,2), a lo largo de la parábola $y = x^2$ es igual a -0,25 J.

Solución:

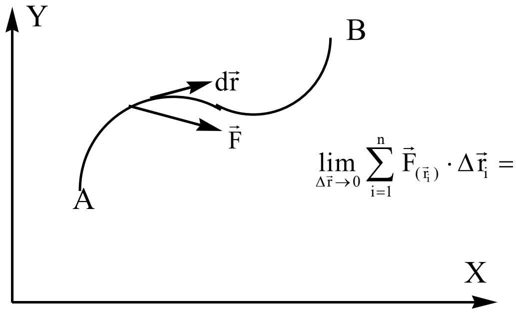
$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left(xy\vec{i} - y\vec{j}\right) \cdot \left(dx\vec{i} + dy\vec{j}\right) = xydx - ydy$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = x^2 \\ dy = 2xdx \end{array} \right\} \Rightarrow \quad dW = xx^2dx - x^2 2xdx = \left(x^3 - 2x^3\right)dx = -x^3dx$$

La integral curvilínea: $W = \int_A^B dW = \int_{(0,0)}^{(1,2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \left(-x^3\right)dx = -\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = -0,25\,\mathrm{J}$

Por tanto, si hay definido un campo de fuerzas en todos los puntos de la trayectoria curvilínea, *como a lo largo de una curva hay sólo una variable independiente podemos escribir la circulación como función de una única variable*.

La integral a lo largo de una curva dada será una integral sencilla de una variable y se llama integral de línea o curvilínea, en contraste con la integral en una superficie que es doble.



$$\lim_{\Delta \vec{r} \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{(\vec{r}_i)} \cdot \Delta \vec{r}_i = \int_A^B \vec{F}_{(\vec{r}_i)} \cdot d\vec{r}_i$$

Se llama **circulación del campo vectorial** a lo largo de la trayectoria desde A hasta B a **la integral curvilínea de la función vectorial** tomada sobre el camino AB:

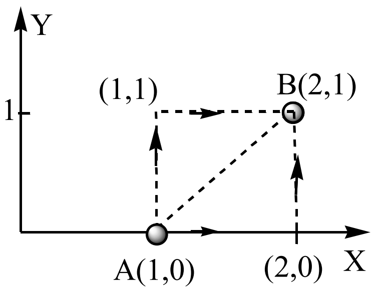
Propiedades de la Circulación: $W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^C \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_C^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$

2.4.2.1 Ejemplo de circulación del vector fuerza a lo largo de tres caminos diferentes

Fuerza no-conservativa: Dada la fuerza $\vec{F} = xy\vec{i} - y\vec{j}$, que es una fuerza variable ya que la componente F_x depende de los valores x-y y la componente F_y depende de los valores de y. Vamos a **calcular el trabajo realizado por la fuerza** a lo largo de los caminos indicados en la figura desde el punto A(1,0) hasta el punto B(2,1).

El trabajo es igual a: $W_A^B = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \left(xy\vec{i} - y\vec{j}\right) \cdot \left(dx\vec{i} + dy\vec{j}\right) = \int_{1,0}^{2,1} \left(xydx - ydy\right)$.

Debemos escribir la integral en términos de **una variable**.



Desplazamiento desde A(1,0) hasta B(2,1) por los caminos:
1. Por la línea quebrada desde A(1,0) hasta (1,1) y B(2,1)
2. Por la línea quebrada desde A(1,0) hasta (2,0) y B(2,1)
3. Por la recta y = x - 1
4. Por la parábola $y = x^2 - 2x + 1$

A lo largo del **camino 1** que es la línea quebrada desde A(1,0) hasta (1,1), que es una línea recta de ecuación x = 1 (dx = 0), y luego desde (1,1) hasta B(2,1), que una recta de ecuación y = 1 (dy = 0). Posteriormente, sumamos los resultados:

$$W_A^B = \int_{1,0}^{1,1}\left(xydx - ydy\right) + \int_{1,1}^{2,1}\left(xydx - ydy\right) \quad \begin{Bmatrix} (1,0) \to (1,1) \Rightarrow \{x = 1 \Rightarrow dx = 0\} \\ (1,1) \to (2,1) \Rightarrow \{y = 1 \Rightarrow dy = 0\} \end{Bmatrix} \quad W_A^B = \int_{1,0}^{1,1}\left(-ydy\right) + \int_{1,1}^{2,1} x1dx$$

$$\left\{W_{1,0}^{1,1} = \int_{1,0}^{1,1}\left(-ydy\right) = \left[-\tfrac{1}{2}y^2\right]_0^1 = -\tfrac{1}{2}\right\} \quad \left\{W_{1,1}^{2,1} = \int_{1,1}^{2,1} xdx = \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_1^2 = 2 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2}\right\} \quad W_A^B = W_{1,0}^{1,1} + W_{1,1}^{2,1} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2} = \tfrac{2}{2} = 1$$

A lo largo del **camino 2** que es la línea quebrada desde A(1,0) hasta (2,0), que es una línea recta de ecuación y = 0 (dy = 0), y luego desde (2,0) hasta B(2,1), que una recta de ecuación x = 2 (dx = 0). Posteriormente, sumamos los resultados:

$$W_A^B=\int_{1,0}^{2,0}(xydx-ydy)+\int_{2,0}^{2,1}(xydx-ydy)\quad \begin{Bmatrix}(1,0)\rightarrow(2,0)\Rightarrow\{y=0\Rightarrow dy=0\}\\(2,0)\rightarrow(2,1)\Rightarrow\{x=2\Rightarrow dx=0\}\end{Bmatrix}\quad W_A^B=0+\int_{2,0}^{2,1}(-ydy)$$

$$\left\{W_{1,0}^{2,0}=0\right\}\quad\left\{W_{2,0}^{2,1}=\int_{2,0}^{2,1}-ydy==\left[-\tfrac{1}{2}y^2\right]_0^1=-\tfrac{1}{2}\right\}\quad W_A^B=W_{1,0}^{2,0}+W_{2,0}^{2,1}=0-\tfrac{1}{2}=-\tfrac{1}{2}$$

A lo largo del **camino 3** que es la línea recta de ecuación $y=x-1$

$$W_A^B=\int_A^B\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{1,0}^{2,1}(xydx-ydy)\quad\begin{Bmatrix}y=x-1\\dy=dx\end{Bmatrix}\quad W=\int_1^2\left[x(x-1)-(x-1)\right]dx=\left[\tfrac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_1^2=\tfrac{1}{3}$$

A lo largo del **camino 4** que es la parábola que une A(1,0) y B(2,1): $y=f(x)=x^2-2x+1$

$$y=f(x)=x^2+bx+c\quad\begin{Bmatrix}y=0=f(1)=1^2+b1+c\\y=1=f(2)=2^2+b2+c\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}f(2)-f(1)=1=3+b\\b=-2\ (c=-1-b=1)\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}y=f(x)=x^2-2x+1\\dy=(2x-2)dx\end{Bmatrix}$$

$$dW=\vec{F}\cdot d\vec{r}=\left(xy\vec{i}-y\vec{j}\right)\cdot\left(dx\vec{i}+dy\vec{j}\right)=xydx-ydy\quad\begin{Bmatrix}y=x^2-2x+1\\dy=(2x-2)dx\end{Bmatrix}\quad dW=x\left(x^2-2x+1\right)dx-\left(x^2-2x+1\right)(2x-2)dx$$

$$dW=\left(-x^3+4x^2-5x+2\right)dx\quad\left\{W_A^B=\int_{1,0}^{2,1}\left(-x^3+4x^2-5x+2\right)dx=\left[-\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{4}{3}x^3-\tfrac{5}{2}x^2+2x\right]_1^2=\tfrac{1}{4}J\right.$$

Fuerza conservativa: Dada la fuerza del tipo interacción gravitatoria y electrostática

$\vec{F}=\dfrac{1}{r^2}\vec{u}_r=\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\vec{r}}{r}=\dfrac{x\vec{i}+y\vec{j}}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}=\dfrac{x\vec{i}+y\vec{j}}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, que es una fuerza variable ya que la componente F_x depende de los valores x-y y la componente F_y depende también de los valores x-y. Vamos a **calcular el trabajo realizado por la fuerza** a lo largo de los caminos indicados en la figura desde el punto A(1,0) hasta el punto B(2,1).

$$W_A^B=\int_A^B\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_A^B\left(\frac{x\vec{i}+y\vec{j}}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)\cdot\left(dx\vec{i}+dy\vec{j}\right)=\int_{1,0}^{2,1}\left(\frac{xdx+ydy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)=\int_{1,0}^{2,1}\frac{xdx}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\int_{1,0}^{2,1}\frac{ydy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Debemos escribir la integral en términos de **una variable**.

A lo largo del **camino 1** que es la línea quebrada desde A(1,0) hasta (1,1), que es una línea recta de ecuación x = 1 (dx = 0), y luego desde (1,1) hasta B(2,1), que una recta de ecuación y = 1 (dy = 0). Posteriormente, sumamos los resultados:

$$W_A^B=\int_{1,0}^{1,1}\frac{xdx+ydy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\int_{1,1}^{2,1}\frac{xdx+ydy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\quad\begin{Bmatrix}(1,0)\rightarrow(1,1)\Rightarrow\{x=1\Rightarrow dx=0\}\\(1,1)\rightarrow(2,1)\Rightarrow\{y=1\Rightarrow dy=0\}\end{Bmatrix}\quad W_A^B=\int_{1,0}^{1,1}\frac{ydy}{\left(1+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\int_{1,1}^{2,1}\frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$W_{1,0}^{1,1}=\int_{1,0}^{1,1}\frac{ydy}{\left(1+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\begin{Bmatrix}1+y^2=t\\2ydy=dt\end{Bmatrix}\int_{1,0}^{1,1}\tfrac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}dt=\tfrac{1}{2}\cdot\left[\frac{t^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}\right]_{y=0}^{y=1}=\tfrac{1}{2}\cdot\left[-2t^{-\frac{1}{2}}\right]_{y=0}^{y=1}=-\left[\left(1+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^1=-\left[\left(1+1^2\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(1+0^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]=-\tfrac{1}{\sqrt{2}}+1$$

$$W_{1,1}^{2,1}=\int_{1,1}^{2,1}\frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}=\begin{Bmatrix}x^2+1=t\\2xdx=dt\end{Bmatrix}\int_{1,1}^{2,1}\tfrac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}dt=\tfrac{1}{2}\cdot\left[\frac{t^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}\right]_{x=1}^{x=2}=\tfrac{1}{2}\cdot\left[-2t^{-\frac{1}{2}}\right]_{x=1}^{x=2}=-\left[\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}\right]_1^2=-\left[\left(2^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(1^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}\right]=-\tfrac{1}{\sqrt{5}}+\tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

$$W_A^B=W_{1,0}^{1,1}+W_{1,1}^{2,1}=-\tfrac{1}{\sqrt{2}}+1-\tfrac{1}{\sqrt{5}}+\tfrac{1}{\sqrt{2}}=1-\tfrac{1}{\sqrt{5}}$$

A lo largo del **camino 2** que es la línea quebrada desde A(1,0) hasta (2,0), que es una línea recta de ecuación y = 0 (dy = 0), y luego desde (2,0) hasta B(2,1), que una recta de ecuación x = 2 (dx = 0). Posteriormente, sumamos los resultados:

$$W_A^B = \int_{1,0}^{2,0} \frac{xdx+ydy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \int_{2,0}^{2,1} \frac{xdx+ydy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad \left\{ \begin{matrix} (1,0) \to (2,0) \Rightarrow \{y=0 \Rightarrow dy=0\} \\ (2,0) \to (2,1) \Rightarrow \{x=2 \Rightarrow dx=0\} \end{matrix} \right\} \quad W_A^B = \int_{1,0}^{2,0} \frac{xdx}{\left(x^2+0\right)^{\frac{3}{2}}} + \int_{2,0}^{2,1} \frac{ydy}{\left(2^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$W_{1,0}^{2,0} = \int_{1,0}^{2,0} \frac{xdx}{x^3} = \int_{1,0}^{2,0} \frac{dx}{x^2} = \left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_1^2 = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2}+1$$

$$W_{2,0}^{2,1} = \int_{2,0}^{2,1} \frac{ydy}{\left(4+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \left\{ \begin{matrix} 4+y^2=t \\ 2ydy=dt \end{matrix} \right\} \int_{2,0}^{2,1} \tfrac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} dt = \tfrac{1}{2} \cdot \left[\frac{t^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}\right]_{y=0}^{y=1} = \tfrac{1}{2} \cdot \left[-2t^{-\frac{1}{2}}\right]_{y=0}^{y=1} = -\left[\left(4+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^1 = -\left[\left(4+1^2\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(4+0^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right] = -\tfrac{1}{\sqrt{5}} + \tfrac{1}{2}$$

$$W_A^B = W_{1,0}^{2,0} + W_{2,0}^{2,1} = -\tfrac{1}{2} + 1 - \tfrac{1}{\sqrt{5}} + \tfrac{1}{2} = 1 - \tfrac{1}{\sqrt{5}}$$

<u>A lo largo del **camino 2 inverso**</u> que es la línea quebrada desde B(2,1) hasta (2,0), que es una línea recta de ecuación x = 2 (dx = 0), y luego desde (2,0) hasta A(1,0), que una recta de ecuación y = 0 (dy = 0). Posteriormente, sumamos los resultados:

$$W_B^A = \int_{2,1}^{2,0} \frac{xdx+ydy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \int_{2,0}^{1,0} \frac{xdx+ydy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad \left\{ \begin{matrix} (2,1) \to (2,0) \Rightarrow \{x=2 \Rightarrow dx=0\} \\ (2,0) \to (1,0) \Rightarrow \{y=0 \Rightarrow dy=0\} \end{matrix} \right\} \quad W_B^A = \int_{2,1}^{2,0} \frac{ydy}{\left(4+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \int_{2,0}^{1,0} \frac{xdx}{\left(x^2+0^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$W_{2,1}^{2,0} = \int_{2,1}^{2,0} \frac{ydy}{\left(4+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \left\{ \begin{matrix} 4+y^2=t \\ 2ydy=dt \end{matrix} \right\} \int_{2,1}^{2,0} \tfrac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} dt = \tfrac{1}{2} \cdot \left[\frac{t^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}\right]_{y=1}^{y=0} = \tfrac{1}{2} \cdot \left[-2t^{-\frac{1}{2}}\right]_{y=1}^{y=0} = -\left[\left(4+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]_1^0 = -\left[\left(4+0^2\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(4+1^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right] = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{\sqrt{5}}$$

$$W_{2,0}^{1,0} = \int_{2,0}^{1,0} \frac{dx}{x^2} = \left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_2^1 = \left[-\frac{1}{x}\right]_2^1 = -1 + \tfrac{1}{2}$$

$$W_B^A = W_{2,1}^{2,0} + W_{2,0}^{1,0} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{\sqrt{5}} - 1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{\sqrt{5}} - 1$$

En un **campo de fuerzas conservativo** el trabajo realizado por el campo de fuerzas para trasladar una partícula desde un punto A hasta un punto B $\left(W_A^B\right)$, siguiendo una trayectoria, y el trabajo para trasladarla desde B hasta A $\left(W_B^A\right)$, siguiendo otra trayectoria, son iguales pero de signo contrario. Por tanto, el trabajo que realiza el campo de fuerzas en recorrer un camino cerrado para volver al mismo punto es cero.

$$\left\{W_A^B = W_{1,0}^{1,1} + W_{1,1}^{2,1} = -\tfrac{1}{\sqrt{2}} + 1 - \tfrac{1}{\sqrt{5}} + \tfrac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \tfrac{1}{\sqrt{5}}\right\} \left\{W_B^A = W_{2,1}^{2,0} + W_{2,0}^{1,0} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{\sqrt{5}} - 1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{\sqrt{5}} - 1\right\}$$

$$W_{neto} = W_A^B + W_B^A = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \left\{ \begin{matrix} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -dE_p = -\vec{\nabla} E_p \cdot d\vec{r} \\ \vec{F} = -\vec{\nabla} E_p \end{matrix} \right\} \quad W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_A^B dE_p = -\left[E_p\right]_A^B = -\left[E_{p(B)} - E_{p(A)}\right] = -\Delta E_p$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p = -\left[\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}\right] \quad \left\{F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\right\} \left\{F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}\right\} \left\{F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}\right\}$$

$$\left\{\frac{\partial^2 E_p}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial y}\right\} \Rightarrow \left\{\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 E_p}{\partial y \partial x}\right\} \left\{\frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial y}\right\} \Rightarrow \left\{\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}\right\} \left\{\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}\right\} \left\{\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}\right\}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{i}\left[\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right] - \vec{j}\left[\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right] + \vec{k}\left[\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right] = 0$$

<u>2.5 Concepto de campo de fuerzas conservativo</u>

En el ejemplo anterior hemos calculado el trabajo por un campo de fuerzas por tres caminos distintos, y los tres han sido distintos. Le podemos dar un significado físico a estos hechos si interpretamos las integrales en todos los casos.

Como **el trabajo realizado por la fuerza** sobre un objeto que se mueve a lo largo del camino de integración se expresa por el producto escalar del **campo de fuerzas por el desplazamiento** $W_{\text{por-campo}} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$**,** lo lógico es que *dependa del camino de integración,* tanto como de los puntos extremos A y B, y se llama **no-conservativo**.

Físicamente significa que el trabajo al depender de la trayectoria, como en el rozamiento, se pierde por unos caminos más que por otros.

Sin embargo, existen **campos de fuerzas conservativos**, para los que el trabajo siempre es el mismo entre dos puntos dados A y B *independientemente del camino por el que lo calculemos*, y se llaman campos de fuerzas **conservativos**.

Se demuestra que para que un **campo de fuerzas** sea conservativo, al calcular el trabajo el integrando ha de ser una diferencial exacta de una función escalar llamada potencial, o más bien, **energía potencial E_p**, ya que tiene unidades de energía como el trabajo. Así:

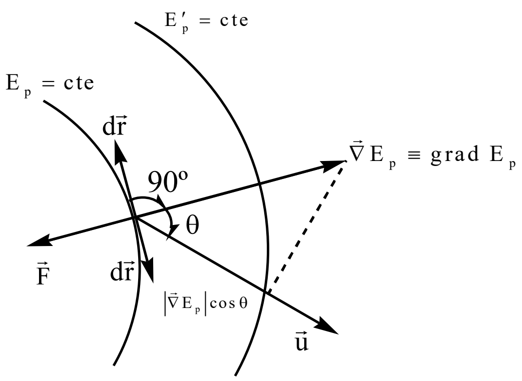
$$W_{\text{por-campo}} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad W_{\text{por-campo}} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B -dE_p = -\left[E_p\right]_A^B = -\left[E_{p(B)} - E_{p(A)}\right] = -\Delta E_p$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dE_p = -\vec{\nabla} E_p \cdot d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = -\vec{\nabla} E_p \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0}$$

$$\vec{F}_{\text{conservativa}} = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\left[0-0\right] - \vec{j}\left[0-0\right] + \vec{k}\left[0-0\right] = 0$$

2.5.1 Propiedades de un campo de fuerzas conservativo

1. En cada punto P(x,y,z) de un campo de fuerzas conservativo, $\vec{F}$, se define un escalar, E_p, que depende solamente de las coordenadas de ese punto, constituyendo un campo escalar asociado al vectorial. Siendo la relación: $\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dE_p = -\vec{\nabla} E_p \cdot d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p}$.
2. El signo menos se considera en sentido físico que el vector fuerza se dirige en sentido contrario del gradiente de energía potencial, es decir, hacia los puntos del campo en los que decrece la energía potencial ya que el vector gradiente indica hacia donde aumenta la energía potencial. En los campos de fuerzas conservativos coexisten dos campos, el campo vectorial de fuerzas y el campo escalar de energía potencial. Siendo las líneas de fuerza del campo vectorial perpendiculares a las superficies de nivel de la energía potencial.
3. En un campo de fuerzas conservativo la circulación a través de una trayectoria cerrada es cero: $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$
4. En un campo escalar, asociado a un campo de fuerzas conservativo, lo único que está definido es la diferencia de energía potencial entre dos puntos, ya que la energía potencial de un punto queda indeterminado por una constante: $W_{\text{por-campo}} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B -dE_p = -\Delta E_p$.



$$dE_p = \left|\vec{\nabla}E_p\right|\left|d\vec{r}\right|\cos\theta \quad \begin{cases} \dfrac{dE_p}{\left|d\vec{r}\right|} = \left|\vec{\nabla}E_p\right|\cos\theta = \vec{\nabla}E_p\cdot\vec{u} \\ \left(\dfrac{dE_p}{\left|d\vec{r}\right|}\right)_{máx} = \left|\vec{\nabla}E_p\right| \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{F}\ \text{conservativa} \\ \vec{F}\cdot d\vec{r} = -dE_p = -\vec{\nabla}E_p\cdot d\vec{r} \quad \left\{\vec{F} = -\vec{\nabla}E_p\right\} \\ \oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \quad \left\{\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \vec{\nabla} \parallel \vec{F}\right. \end{cases}$$

2.6 Relación entre trabajo, energía cinética y energía potencial

Trabajo de una fuerza variable: Se define el *Trabajo* realizado **por** la fuerza aplicada **sobre** una partícula, de masa m, a lo largo de un arco de trayectoria entre dos puntos, de posición inicial A hasta el de posición final B, como **la circulación de la fuerza** a lo largo de ese arco de curva*:*

$$W_{por} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B \left[F_x dr_x + F_y dr_y + F_z dr_z\right]$$

El trabajo es una magnitud escalar, aunque las dos magnitudes implicadas en su definición son vectoriales. La unidad de trabajo en el Sistema Internacional es el joule (J).

Energía Cinética: La energía cinética es un tipo de energía que está asociada con el estado de movimiento de un cuerpo, por lo que **es relativa**, depende del sistema de referencia. El teorema trabajo-energía nos dice que *«El trabajo realizado por la fuerza neta sobre una partícula de masa m es igual a la variación de su energía cinética»:*

$$W_{neto} = \int_i^f \vec{F}_{neta}\cdot d\vec{r} = \int_i^f \frac{d\vec{p}}{dt}\cdot d\vec{r} = \int_i^f \vec{v}\cdot d\vec{p} = \int_i^f m\vec{v}\cdot d\vec{v} = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2 = \Delta E_{cinética}$$

Para cuerpos que se mueven a **velocidades** próximas a la de la luz se ha de utilizar la **Teoría de la Relatividad** que considera como ley universal "la velocidad de la luz es una invariante física, teniendo el mismo valor para todos los observadores en movimiento relativo uniforme". Como consecuencia las transformaciones de Galileo no son correctas y todos los observadores en movimiento relativo uniforme son equivalentes, lo que lleva al principio de la relatividad especial siguiente «*todas las leyes de la naturaleza deben ser las mismas para todos los observadores inerciales que se muevan con velocidad relativa constante unos respecto de otros»*. Con lo cual para que se cumpla el principio de conservación del momento lineal en partículas rápidas

$$E_c = \int_0^v F_t ds = \int_0^v v dp = vp - \int_0^v p dv$$

$$\vec{F}_{sobre} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = m\vec{v}_{propia} = \frac{m\vec{v}_{relativa}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \gamma m\vec{v}_{relativa} \quad \Rightarrow \quad E_c = mc^2(\gamma - 1)$$

Energía Potencial: *La energía potencial de la partícula es otro tipo de energía que aparece en los campos de fuerzas conservativos y sólo es función de la posición de la partícula.*

En un campo de fuerzas conservativo a cada punto del campo le podemos asociar un potencial, que es una magnitud escalar, y como el potencial tiene dimensiones de energía se llama **energía potencial**: $\vec{F}\cdot d\vec{r} = -dE_p = -\vec{\nabla}E_p \cdot d\vec{r}$

En un campo de fuerzas conservativo el trabajo realizado sobre una partícula será:

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = -dE_p = -\vec{\nabla}E_p \cdot d\vec{r} \quad \left\{ W = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_A^B dE_p = -\left(E_{p(B)} - E_{p(A)}\right) = -\Delta E_p \right.$$

2.7 Principio de conservación de la energía mecánica

Considera un campo de fuerzas conservativo, la fuerza actuante sobre una partícula que se desplaza realiza un trabajo sobre ella:

$$\boxed{W_{\text{por-campo}} = \Delta E_c = -\Delta E_p} \Rightarrow \begin{Bmatrix} E_{c(f))} - E_{c(i)} = -E_{p(f)} - E_{p(i)} \\ E_{c(f)} + E_{p(f)} = E_{c(i)} + E_{p(i)} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{E_{\text{mecánica}(f)} = E_{\text{mecánica}(i)}}$$

La energía mecánica de un cuerpo es la suma de la energía cinética y de la energía potencial.

Principio de conservación: «*Si un cuerpo se encuentra en un campo de fuerzas conservativo la suma de la energía cinética y de la energía potencial es siempre constante*».

Es decir, la condición necesaria y suficiente para que se conserve la energía mecánica es que la fuerza derive de un potencial escalar.

La energía potencial de un sistema se define considerando que **el trabajo realizado por** una **fuerza conservativa** interna **sobre el sistema** es igual al **decrecimiento** en la **energía potencial**: $W_{\text{por-campo}} = -\Delta E_p$. Si la fuerza conservativa es la única fuerza que realiza trabajo, el trabajo realizado también es igual al **incremento** en la energía cinética $W_{\text{por-campo}} = \Delta E_c$.

Como el decrecimiento en energía potencial es igual al incremento en la energía cinética, la suma de la energía cinética y potencial no cambia, lo que es conocido como la **ley de conservación de la energía mecánica**.

La ley de conservación de la energía mecánica de obtiene de las leyes de Newton, y **es una alternativa a las leyes de Newton**, de mucha utilidad, para solucionar los problemas en mecánica. Aunque el uso de la conservación de la energía es limitado porque casi siempre hay fuerzas no conservativas, como las fuerzas de fricción.

2.8 Campos de fuerzas conservativos: la fuerza que ejerce un muelle, la fuerza gravitatoria y la fuerza electrostática

1º) La *fuerza que ejerce un muelle* al ser comprimido o estirado, $\Delta r = r - r_0$, depende del desplazamiento que experimenta, conocida como ley de Hooke $\boxed{\vec{F}_{\text{muelle}} = -k\cdot\Delta\vec{r}}$, la fuerza del muelle es la fuerza ejercida **por el muelle** sobre un cuerpo y el desplazamiento se refiere a la posición de equilibrio, por lo que el muelle puede ser comprimido o alargado. El **trabajo** que realiza un muelle se invierte en incrementar la energía potencial del muelle, $\boxed{E_{p(\text{muelle})} = \frac{1}{2}kr^2}$:

$$\vec{F}_{\text{muelle}} = -k\cdot\vec{r} \Rightarrow W_{\text{muelle}} = \int_0^1 \vec{F}_{\text{muelle}}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 -k\vec{r}\cdot d\vec{r} = -\left[\tfrac{1}{2}kr^2\right]_0^1 = -\left(\tfrac{1}{2}kr_1^2 - \tfrac{1}{2}kr_0^2\right) = -\Delta E_{p(\text{muelle})}$$

2º) La *fuerza gravitatoria* que viene dada por la ley de gravitación universal es conservativa ya que depende de la distancia entre las masas $\boxed{\vec{F}_{gravitatoria} = -G\dfrac{Mm}{r^2}\vec{u}_r}$, y el **trabajo** realizado **por el campo gravitatorio** sobre un cuerpo de masa m se invierte en incrementar la energía potencial gravitatoria del cuerpo, $\boxed{E_{p(gravitatoria)} = -G\dfrac{Mm}{r}}$:

$$\vec{F}_g = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r \quad\Rightarrow\quad W_{por-campo} = \int_0^1 \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = \int_0^1 -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r d\vec{r} = \left[G\frac{Mm}{r}\right]_0^1 = -\left(-G\frac{Mm}{r_1} + G\frac{Mm}{r_0}\right) = -\Delta E_{p(g)}$$

En las proximidades de la superficie terrestre:

$$\boxed{\vec{F}_{gravitatoria} = -mg_0\vec{u}_r} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\Delta E_{p(g)} = mg\Delta h = mg\left(y - y_0\right)}$$

$$\vec{F}_{gravitatoria} = -mg_0\vec{u}_r \quad\Rightarrow W_{por-campo} = \int_0^1 \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = \int_0^1 -mg_0\vec{u}_r d\vec{r} = -mg_0\left[y\right]_0^1 = -mg_0\left(y - y_0\right) = -mg_0\Delta y = -\Delta E_{p(g)}.$$

3º) La *fuerza electrostática* que viene dada por la ley de Coulomb es conservativa ya que depende de la distancia entre las cargas $\boxed{\vec{F}_e = K_e\dfrac{Qq}{r^2}\vec{u}_r = q\vec{E}}$, y el **trabajo** realizado **por el campo electrostático** sobre un cuerpo de carga q se invierte en incrementar la energía potencial electrostática del cuerpo, $\boxed{E_{p(e)} = K_e\dfrac{Qq}{r}}$:

$$\vec{F}_e = K_e\frac{Qq}{r^2}\vec{u}_r = q\vec{E} \quad\Rightarrow\quad W_{por-campo} = \int_0^1 \vec{F}_e \cdot d\vec{r} = \int_0^1 K_e\frac{Qq}{r^2}\vec{u}_r d\vec{r} = -\left[K_e\frac{Qq}{r}\right]_0^1 = -\left(K_e\frac{Qq}{r_1} - K_e\frac{Qq}{r_0}\right) = -\Delta E_{p(e)}$$

2.9 El trabajo debido a la fuerza de fricción o de rozamiento y la conservación de la energía

Si además de las fuerzas **conservativas** hay fuerzas **de fricción**, como la fuerza de rozamiento, la energía mecánica no se conserva ya que aparece un trabajo disipativo que se pierde. *Las fuerzas de fricción tienen sentido opuesto al deseo del desplazamiento, luego el trabajo debido a estas fuerzas es siempre negativo*:

$$\boxed{W_{disipativo} = \oint \vec{F}\cdot d\vec{r} < 0}$$

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = \left(\vec{F}_{cons} + \vec{F}_{disi}\right)\cdot d\vec{r} = \vec{F}_c \cdot d\vec{r} + \vec{F}_d \cdot d\vec{r} = -dE_p + \vec{F}_d \cdot d\vec{r}$$

$$W_{neto} = \int_A^B \left(\vec{F}_c + \vec{F}_d\right)\cdot d\vec{r} = \int_A^B -dE_p + \int_A^B \vec{F}_d \cdot d\vec{r} = -\Delta E_p + W_d$$

La conservación de la Energía ha de incluir el Trabajo debido a las fuerzas de rozamiento. Si en el sistema intervienen varias fuerzas conservativas (elástica y gravitatoria) hay que considerarlas todas:

$$\left.\begin{cases} W_{neto} = \Delta E_c = W_{muelle} + W_{gravedad} + W_{rozamiento} \\ W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(muelle)} - \Delta E_{p(gravitatoria)} + W_{roz} \end{cases}\right\} \begin{cases} \Delta E_c = -\Delta E_{p(m)} - \Delta E_{p(g)} + W_{roz} \\ \boxed{\Delta E_c + \Delta E_{p(m)} + \Delta E_{p(g)} = W_{roz} < 0} \end{cases}$$

Cuando las fuerzas de fricción están presentes la energía mecánica del sistema decrece. Como la energía mecánica del sistema siempre decrece en la mayoría de los procesos, y no se conserva, no se consideró útil hasta el siglo XIX, cuando se descubrió que la desaparición de energía mecánica macroscópica está siempre acompañada por la aparición de algún otro tipo de energía, frecuentemente energía térmica, lo que viene indicado por un aumento de temperatura. Hoy en día conocemos, sobre la escala microscópica, que esta energía térmica consiste de energía cinética y energía potencial de las moléculas en el sistema.

Existen otras formas de energía, como la energía química de nuestro cuerpo, la energía del sonido y la energía electromagnética. Si un sistema cambia su energía lo podemos comprobar por el aumento o disminución en energía que experimente el sistema. La observación experimental nos lleva a la ley de conservación de la energía, que es una de las leyes esenciales de toda la ciencia. Aunque la energía cambie desde una forma a otra nunca se crea ni se destruye.

2.10 La conservación de la energía

En el mundo macroscópico las fuerzas no conservativas están siempre presentes de alguna manera, las más frecuentes son las fuerzas de fricción, que hace que el sistema disminuya su energía mecánica. Sin embargo la disminución de la energía mecánica es igual al incremento en la energía térmica producida por las fuerzas de fricción.

Otro tipo de fuerza no conservativa es aquella que suponga una deformación de los objetos. Cuando doblamos un objeto el trabajo realizado sobre él en la deformación se disipa como energía térmica. Similarmente cuando una bola rebota en el suelo se calienta con el impacto, y la energía potencial inicial aparece como energía térmica. Si la energía térmica se suma a la energía mecánica, la energía total se conserva, aunque haya fuerzas de fricción o fuerzas deformación.

Otro tipo de fuerzas no conservativas se asocia con reacciones químicas. Cuando consideramos sistemas en los que las reacciones químicas tienen lugar, la suma de la energía mecánica y de la energía térmica no se conserva. Cuando empezamos a correr la energía interna química de nuestro músculo se convierte en cinética de nuestro cuerpo, y se produce energía térmica, y la suma de las tres permanece constante.

2.10.1 Ejercicios de aplicación del principio de conservación de la energía

1º) Sobre un objeto, de masa 4 kg, en reposo sobre una mesa horizontal, se aplica una fuerza horizontal de 25 N mientras recorre 3 m. El coeficiente de fricción cinética entre el objeto y la mesa es 0,35. Determina: a) el trabajo externo realizado sobre el sistema mesa-objeto; b) la energía disipada por el rozamiento; c) la energía cinética que adquiere el objeto al recorrer los 3 m, así como la velocidad. [a) 75 J; b) -41,16 J; c) 33,84 J; 4,11 m/s]

Solución:

$$W_{sobre} = F_{ext} \cdot \Delta x = 25\ \text{N} \times 3\ \text{m} = 75\ \text{J}$$
$$W_{roz} = -f_{roz} \cdot \Delta x = -\mu_k mg \cdot \Delta x = -0{,}35 \times 4\ \text{kg} \times 9{,}8\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 3\ \text{m} = -41{,}16\ \text{J}$$
$$W_{neto} = \Delta E_c = W_{sobre} + W_{roz} = 75\ \text{J} - 41{,}16\ \text{J} = 33{,}84\ \text{J}$$
$$\Delta E_c = E_{c(f)} - E_{c(i)} = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 - 0 = 33{,}84\ \text{J}$$
$$v^2 = \frac{2 \cdot \Delta E_c}{m} = \frac{2 \times 33{,}84\ \text{J}}{4\ \text{kg}} \Rightarrow \quad v = 4{,}11\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

2º) Un objeto, de masa 40 kg, se deja caer, desde una altura vertical de 4 m, deslizándose por un plano inclinado de 30º respecto de la horizontal. Siendo el coeficiente de fricción cinética entre el objeto y el plano $\mu = 0{,}2$. Determine: a) el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento; b) la energía cinética del objeto en la base del plano y su velocidad. [a) -543,17 J; b) 1.024,83 J; 7,16 m/s]

Solución: Como el objeto parte del reposo en la parte superior, parte de su energía potencial se convierte en energía cinética y otra en energía térmica debida a la fricción. Elegimos el sistema formado por el objeto, el plano inclinado y la Tierra, luego el trabajo externo es cero, y el teorema trabajo-energía supone que la energía disipada por la fricción es igual al cambio en la energía mecánica.

$$W_{neto} = \Delta E_c = W_{gravedad} + W_{roz} = -\Delta E_{p(gravitatoria)} + W_{roz}$$

$$\Delta E_{p(gravitatoria)} = mgh_f - mgh_i = 0 - mgh = 0 - 40\,kg \times 9,8\,\tfrac{m}{s^2} \times 4\,m = -1.568\,J$$

$$W_{roz} = -f_{roz} \cdot d = -\mu_k F_n \cdot d = -\mu_k P \cos 30^o \cdot d = -\mu_k mg \cos 30^o \times \frac{h}{sen\,30^o} = -543,17\,J$$

$$W_{neto} = -\Delta E_{p(gravitatoria)} + W_{roz} = +1.568\,J - 543,17\,J = 1.024,83\,J$$

$$W_{neto} = \Delta E_c = \tfrac{1}{2} mv^2 - 0 = 1.024,83\,J \quad \Rightarrow v^2 = \frac{2 \cdot \Delta E_c}{m} = \frac{2 \times 1.024,83\,J}{40\,kg} \Rightarrow \quad v = 7,16\,\tfrac{m}{s}$$

3º) Un objeto (m_1 = 4 kg) está colgado por un hilo que pasa a través de una polea y que está unido a otro objeto (m_2 = 6 kg), que permanece en reposo sobre una mesa horizontal. El objeto m_2 está comprimiendo 30 cm un muelle, de constante elástica k = 180 N/m. Si se suelta el objeto m_2, que posee un coeficiente de fricción cinética con la mesa de μ_k = 0'2, determine: a) la velocidad de los dos objetos después de que el muelle se halla soltado hasta alcanzar la posición de equilibrio; b) la velocidad de m_1 cuando haya recorrido una distancia de 40 cm. [a) 1,81 m/s; b) 1,95 m/s]

Solución: La velocidad de los dos objetos se obtiene a partir de su energía cinética final. El sistema se considera formado por la Tierra, la mesa horizontal, el muelle y los dos objetos. Por lo que el trabajo externo es cero y el teorema trabajo-energía implica que la energía disipada por fricción es igual al cambio en la energía mecánica. Elegimos que el objeto de 4 kg se mueve en el eje OY siendo el origen la posición inicial (y = 0)

$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(gravitatoria)} - \Delta E_{p(muelle)} + W_{roz}$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\Delta E_c = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 - 0 \\ &\Delta E_{p(gravitatoria)} = m_1 gy - m_1 gy_0 = mg\Delta y = 4\,kg \times 9,8\,\tfrac{m}{s^2} \times (-0,30\,m) = -11,76\,J \\ &\Delta E_{p(muelle)} = \tfrac{1}{2}kx_f^2 - \tfrac{1}{2}kx_i^2 = 0 - \tfrac{1}{2} \times 180\,\tfrac{N}{m} \times (0,30\,m)^2 = -8,1\,J \\ &W_{roz} = -f_{roz}\Delta x = -\mu_k m_2 g\Delta x = -0,2 \times 6\,kg \times 9,8\,\tfrac{m}{s^2} \times 0,30\,m = -3,53\,J \end{aligned} \right\}$$

$$\Delta E_c = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = -\Delta E_{p(gravitatoria)} - \Delta E_{p(muelle)} + W_{roz} = +11,76\,J + 8,1\,J - 3,53\,J = 16,33\,J$$

$$v^2 = \frac{2 \cdot \Delta E_c}{m} = \frac{2 \times 16,33\,J}{10\,kg} \quad \Rightarrow \quad v = 1,81\,\tfrac{m}{s}$$

$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(gravitatoria)} + W_{roz}$$

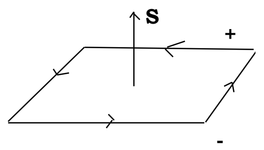
$$\left\{ \begin{aligned} &\Delta E_c = E_{c(f)} - E_{c(i)} = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 - \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v_i^2 = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 - 16,33\,J \\ &\Delta E_{p(gravitatoria)} = m_1 g\Delta y = 4\,kg \times 9,8\,\tfrac{m}{s^2} \times (-0,10\,m) = -3,92\,J \\ &W_{roz} = -f_{roz}\Delta x = -\mu_k m_2 g\Delta x = -0,2 \times 6\,kg \times 9,8\,\tfrac{m}{s^2} \times 0,10\,m = -1,176\,J \end{aligned} \right\}$$

$$W_{neto} = \Delta E_c = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 - 16,33\,J = -\Delta E_{p(gravitatoria)} + W_{roz} = +3,92\,J - 1,176\,J = 2,744\,J$$

$$E_{c(f)} = E_{c(i)} + W_{neto} = 16,33\,J + 2,744\,J = 19,074\,J \quad \Rightarrow v_f^2 = \frac{2 \cdot E_{c(f)}}{m} = \frac{2 \times 19,074\,J}{10\,kg} \Rightarrow \quad v_f = 1,95\,\tfrac{m}{s}$$

2.11 Concepto de flujo de un campo vectorial. Teorema de Gauss

Concepto de flujo de un campo vectorial: Si consideramos una superficie plana dentro de un campo vectorial de fuerzas $\vec{F}$, se llama flujo del campo vectorial a través de la superficie $\vec{S}$ al producto escalar del campo por el vector superficie: $\Phi = \vec{F} \cdot \vec{S}$



El flujo depende de la magnitud de los vectores y de sus orientaciones respectivas, de tal forma que el flujo será máximo cuando el ángulo sea de 0º ó de 180º. El vector de una superficie plana equivale al producto vectorial de sus lados, si A y B son los lados de la superficie que forma un ángulo entre sí en una determinada dirección: $\vec{S} = \vec{A} \times \vec{B}$

Si la superficie está curvada, o el campo no es uniforme, entonces dividimos la superficie en diferenciales de superficies y consideramos que los vectores unitarios de los diferenciales son perpendiculares a ellos y dirigidos hacia la convexidad

$$d\vec{S}_1 + d\vec{S}_2 + ... = \left|d\vec{S}_1\right| \vec{u}_1 + \left|d\vec{S}_2\right| \vec{u}_2 + ...$$

El Flujo Total será: $\Phi = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot d\vec{S}_i = \iint \vec{F} \cdot d\vec{S}$. En una **superficie cerrada** o **superficie gaussiana** que envuelve a un volumen τ:

$$\Phi = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot d\vec{S}_i = \oint\!\!\oint_{\substack{\text{superficie} \\ \text{rodeando a } \tau}} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

<u>Teorema de la divergencia</u>: Si consideramos un volumen grande τ, e imaginemos elementos de volumen $d\tau_i$ en su interior. Se demuestra matemáticamente que el flujo saliente desde cada diferencial de volumen, $d\tau_i$, es el producto de la divergencia del vector por el diferencial de volumen: $\vec{\nabla}\vec{F} d\tau_i$. Lo que nos lleva a decir que el flujo saliente desde el elemento de volumen τ o desde todos los diferenciales de volumen es el sumatorio de todos los productos: $\sum_i \vec{\nabla}\vec{F} d\tau_i$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{\nabla}\vec{F} d\tau_i = \oint\!\!\oint\!\!\oint_{\text{volumen } \tau} \vec{\nabla}\vec{F} d\tau \\ \Phi = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot d\vec{S}_i = \oint\!\!\oint_{\substack{\text{alrededor} \\ \text{de } \tau}} \vec{F} \cdot d\vec{S} \end{array} \right\} \quad \boxed{\oint\!\!\oint\!\!\oint_{\text{volumen } \tau} \vec{\nabla}\vec{F} d\tau = \oint\!\!\oint_{\substack{\text{alrededor} \\ \text{de } \tau}} \vec{F} \cdot d\vec{S}}$$

El Flujo a través de una superficie nos mide la cantidad de líneas del campo que pasan por esa superficie. Si la superficie es cerrada, **superficie gaussiana**, el flujo puede ser positivo, negativo o cero:

- Si el flujo es mayor que cero quiere decir que salen más líneas del campo que entran. Físicamente quiere decir que dentro de esa superficie se generan más líneas del campo y diremos que dentro de esa superficie hay fuentes del campo vectorial.

- Si el flujo es negativo quiere decir que salen menos líneas del campo que entran. Físicamente quiere decir que dentro de esa superficie hay sumideros de esas líneas del campo.

- Si el flujo es cero quiere decir que entran el mismo número de líneas del campo que salen.

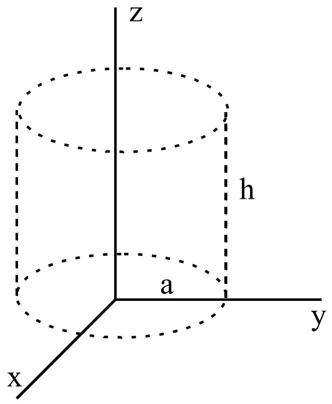
Por tanto, desde el punto de vista físico lo que nos mide el flujo a través de una superficie cerrada es la magnitud de las fuentes o sumideros del Campo vectorial contenidos en su interior. Se define la divergencia de un campo vectorial como:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \lim_{V\to 0}\frac{\iint \vec{F}\cdot d\vec{S}}{V} \quad\Rightarrow\quad \Phi = \iint \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint \vec{\nabla}\vec{F}dV$$

Teorema de Gauss: "*El flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada que envuelve a un volumen es igual a la divergencia del campo vectorial a través de dicho volumen*".

El significado físico del teorema de Gauss es que el flujo del campo vectorial a través de una superficie cerrada nos da la magnitud de las fuentes del campo vectorial que hay en el volumen encerrado por dicha superficie.

Ejemplo para demostrar el teorema de la divergencia:



Consideremos el vector $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Sea un cilindro, de radio a y altura h, colocado de tal forma que la base está en el plano XY y la altura se dirige hacia el eje Z. Siendo el área de la base del cilindro $S = \pi\left(x^2 + y^2\right) = \pi a^2$ y el volumen total del cilindro $\tau = \pi a^2 h$.

Evaluamos la integral de volumen en el cilindro:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = 3\tfrac{N}{m} \quad \left\{ \iiint_{\text{volumen }\tau} \vec{\nabla}\vec{F}d\tau_i = \iiint_{\text{volumen }\tau} 3d\tau = 3\pi a^2 h \right.$$

Ahora vamos a evaluar la integral de superficie en el cilindro, para ello lo hacemos en tres partes. El flujo por la parte superior del cilindro, por la parte inferior y por la superficie curvada:

$$\Phi_{\text{superior}} = \iint \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)\cdot\left[\pi\left(2xdx + 2ydy\right)\right]\vec{k} = \iint z\pi\left(2xdx + 2ydy\right) = h\pi\left(x^2 + y^2\right) = h\pi a^2 = \pi a^2 h$$

$$\Phi_{\text{inferior}} = \iint \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)\cdot\left[\pi\left(2xdx + 2ydy\right)\right]\left(-\vec{k}\right) = \iint z\pi\left(2xdx + 2ydy\right) = 0 \quad \{z = 0\}$$

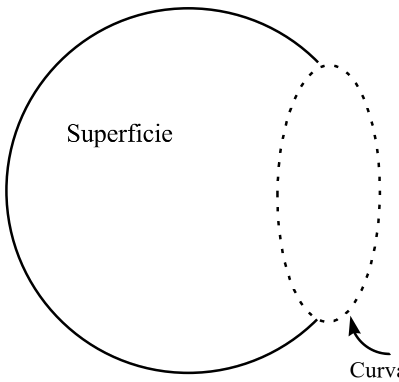
En la parte curvada del cilindro tenemos que el vector $x\vec{i} + y\vec{j}$, es normal a la superficie, siendo el vector unitario normal $\vec{n} = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j}}{a}$. La ecuación del cilindro es $x^2 + y^2 = a^2$, luego el flujo en la superficie curvada es:

$$\Phi_{curvada} = \iint \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint \vec{F}\cdot\vec{n}dS = \iint\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)\cdot\frac{x\vec{i}+y\vec{j}}{a}dS = \iint\frac{x^2+y^2}{a}dS = a\iint dS = a2\pi ah = 2\pi a^2h$$

Luego el flujo total: $$\oiint_{\substack{\text{alrededor}\\ \text{de }\tau}} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \Phi_{superior}+\Phi_{inferior}+\Phi_{curvada} = \pi a^2h + 0 + 2\pi a^2h = 3\pi a^2h$$

<u>Teorema de Stokes</u>:

Este teorema relaciona una integral sobre una superficie con la integral de línea alrededor de la curva que envuelve a la superficie. Un ejemplo puede ser una red de cazar mariposas, donde la red es la superficie y la arandela es la curva que enlaza la superficie. Las superficies que se consideran, aquí y en las aplicaciones, son superficies obtenidas por deformación de una semiesfera (la red de cazar mariposas).



$$\oint_{\text{enlazando S}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\vec{n}\,dS$$

Ahora imaginemos que dividimos la superficie en elementos diferenciales de superficie, dS, dibujando un vector unitario que es perpendicular a cada elemento de área. Cada elemento de área es aproximadamente un elemento del plano tangente a la superficie.

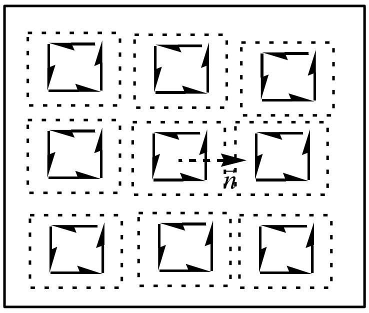
Entonces para cada elemento de superficie dS: $$\oint_{\substack{\text{Alrededor}\\ \text{de dS}}} \vec{F}d\vec{r} = \iint_{dS}\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\vec{n}dS$$

Si sumamos todas las ecuaciones para todos los elementos de superficie de la superficie total:

$\sum_{\text{todos dS}}\oint\vec{F}d\vec{r} = \iint_{\text{Superficie S}}\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\vec{n}dS$. En la figura se observa que todas las integrales de línea interiores se cancelan porque a lo largo de los extremos entre dos dS las dos integrales están en dirección opuesta. Por lo que de la ecuación anterior queda la expresión del teorema de Stokes:

$$\oint_{\text{Curva enlazando S}}\vec{F}d\vec{r} = \iint_{\text{Superficie S}}\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\vec{n}dS$$

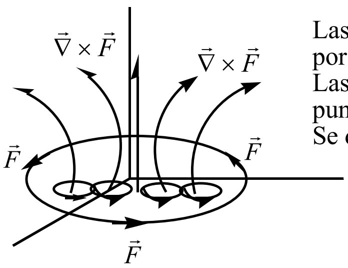
Que es para una superficie abierta enlazada por una sencilla línea cerrada.



$$\oint_{\substack{\text{Alrededor}\\ \text{de dS}}} \vec{F} d\vec{r} = \iint_{\text{dS}} \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\vec{n}dS$$

$$\sum_{\text{todos dS}} \oint \vec{F} d\vec{r} = \iint_{\text{Superficie S}} \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\vec{n}dS$$

$$\oint_{\substack{\text{Curva}\\ \text{enlazando S}}} \vec{F} d\vec{r} = \iint_{\text{Superficie S}} \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\vec{n}dS$$



Las líneas de fuerza del vector rotacional de F que atraviesan la superficie limitada por el contorno a lo largo del cual se ha formado la circulación de F.
Las líneas de fuerza del vector rotacional de F son normales a la superficie S y los puntos de intersección se llaman puntos de remolino.
Se define el rotacional de F como la densidad superficial de puntos de remolino.

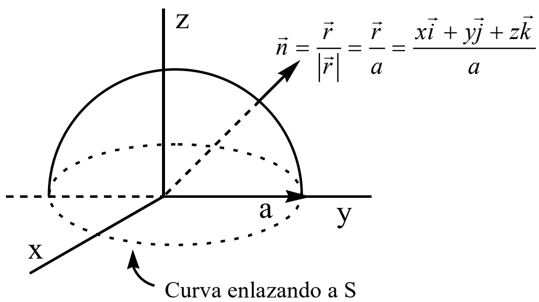
$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \lim_{S\to 0}\frac{\oint \vec{F}\cdot d\vec{r}}{S}$$

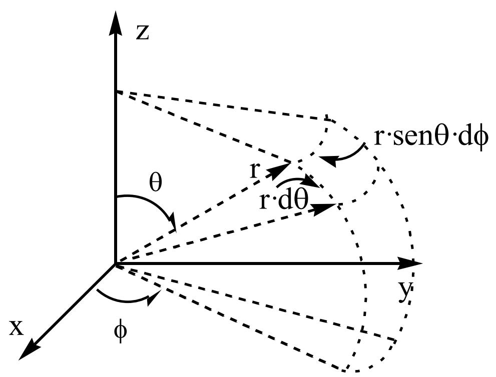
Ejemplo para demostrar el teorema de Stokes: $\oint_{\text{Curva enlazando S}} \vec{F}d\vec{r} = \iint_{\text{Superficie S}} \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\vec{n}dS$

Sea el vector $\vec{F} = 4y\vec{i} + x\vec{j} + 2z\vec{k}$. En primer lugar determinamos la integral $\iint_S \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\vec{n}dS$ sobre la superficie formada por la semiesfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \left(z \geq 0\right)$.

El rotacional: $\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 4y & x & 2z \end{vmatrix} = \vec{k}\left[\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(4y)}{\partial y}\right] = -3\vec{k}$.

La superficie de la semiesfera con centro en el origen tiene como vector unitario y normal a la superficie: $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\vec{r}}{a} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{a}$. Por lo que: $\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\vec{n} = -3\vec{k}\cdot\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = -3\vec{k}\cdot\frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{a} = -3\frac{z}{a}$.





Siendo la superficie de la semiesfera: $dS = rd\theta\cdot r\,\text{sen}\,\theta d\phi = r^2\,\text{sen}\,\theta d\theta d\phi$

$$S_{\text{semiesfera}} = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\frac{1}{2}\pi} r^2\,\text{sen}\,\theta d\theta d\phi = r^2\int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{\theta=0}^{\frac{1}{2}\pi}\text{sen}\,\theta d\theta = r^2\left(2\pi\right)\left[-\cos\theta\right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = 2\pi r^2\left[-0+1\right] = 2\pi r^2$$

Luego la integral de superficie (r = a) es:

$$\iint_S \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\vec{n}dS = \iint_S -3\frac{z}{a}r^2\,\text{sen}\,\theta d\theta d\phi = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\frac{1}{2}\pi} -3\frac{a\cos\theta}{a}a^2\,\text{sen}\,\theta d\theta d\phi$$

$$\boxed{\iint_S \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\vec{n}dS = -3a^2\int_{\phi=0}^{2\pi}d\phi\int_{\theta=0}^{\frac{1}{2}\pi}\cos\theta\,\text{sen}\,\theta d\theta = -3a^2\int_{\phi=0}^{2\pi}d\phi\int_{\theta=0}^{\frac{1}{2}\pi}\tfrac{1}{2}\text{sen}\left(2\theta\right)d\theta = \left(-3a^2\right)\left(2\pi\right)\tfrac{1}{2} = -3\pi a^2}$$

Ahora, calculamos la integral curvilínea alrededor de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = a^2$:

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} \quad \begin{Bmatrix} \vec{F} = 4y\vec{i} + x\vec{j} + 2z\vec{k} \\ d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \end{Bmatrix} \quad \oint\left[4ydx + xdy\right] \quad \left\{x^2 + y^2 = a^2\right\}\begin{Bmatrix} x = a\cos\phi \\ y = a\,\text{sen}\,\phi \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} dx = -a\,\text{sen}\,\phi d\phi \\ dy = a\cos\phi d\phi \end{Bmatrix}$$

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint\left[4ydx + xdy\right] = \oint\left[4a\,\text{sen}\,\phi\left(-a\,\text{sen}\,\phi d\phi\right) + a\cos\phi a\cos\phi d\phi\right] = \oint\left[-4a^2\,\text{sen}^2\,\phi + a^2\cos^2\phi\right]d\phi$$

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint\left[-4a^2\left(1-\cos^2\phi\right) + a^2\cos^2\phi\right]d\phi = \oint\left[-4a^2 + 5a^2\cos^2\phi\right]d\phi$$

$$\left\{\int_0^{2\pi}\cos^2\phi d\phi = \left[\tfrac{1}{2}\phi + \tfrac{1}{4}\text{sen}\left(2\phi\right)\right]_0^{2\pi} = \left[\tfrac{1}{2}2\pi + 0 - 0\right] = \pi\right\}$$

$$\boxed{\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} -4a^2 d\phi + \int_0^{2\pi} 5a^2\cos^2\phi d\phi = -4a^2 2\pi + 5a^2\pi = -3\pi a^2}$$

5.1 Movimiento oscilatorio: el movimiento vibratorio armónico simple

Una partícula posee movimiento oscilatorio o vibratorio cuando se mueve periódicamente alrededor de una posición de equilibrio. Son ejemplos de movimiento oscilatorio: a) un péndulo simple, que consiste en una masa balanceándose en el extremo de una varilla rígida; b) una masa sujeta a una pared a través de un muelle poco rígido; c) un circuito eléctrico, una carga q moviéndose a través de una inductancia L conectada a un condensador C; d) los átomos en un sólido y en una molécula están vibrando respecto de los otros átomos; e) los electrones en una antena, radiando o recibiendo están en oscilación rápida.

Para entender los fenómenos ondulatorios, relacionados con el sonido y la luz, es necesario conocer el movimiento vibratorio. Magnitudes importantes del movimiento oscilatorio:

- **Frecuencia**: *el número de oscilaciones que son completadas cada segundo*. Completar una oscilación es volver a la misma posición o estado que tenía. El símbolo ν se usa para la frecuencia y su unidad es el hertz (Hz). Donde 1 hertz = 1 Hz = 1 oscilación por segundo.
- **Período**: *el tiempo necesario para una oscilación completa*. El símbolo es T, y está relacionado con la frecuencia del mismo: $T = \nu^{-1}$.

Cualquier movimiento que se repite en intervalos determinados se llama **movimiento periódico** o **movimiento armónico**. Existe un movimiento que se repite de una forma particular y se llama **movimiento armónico simple**. Si el movimiento periódico es una función sinusoidal del tiempo y el **desplazamiento** de la partícula, desde el origen, viene dado como una función del tiempo del tipo: $\mathbf{x = A\cdot\cos(\omega\cdot t + \phi_0)}$, en la que el desplazamiento depende sólo de la variable t, los demás parámetros ($\mathbf{A, \omega, \phi_0}$) son constantes. El **movimiento armónico simple** significa que el movimiento periódico es una función sinusoidal del tiempo.

De todos los movimientos oscilatorios, el más importante es el llamado **movimiento armónico simple**. Además de ser el movimiento más sencillo de analizar y describir, constituye la mejor descripción de muchas oscilaciones que se encuentran en la naturaleza. Aunque no todos los movimientos oscilatorios son armónicos.

La **amplitud** del movimiento es la cantidad **A** que es una constante positiva, cuyo valor depende de cómo ha empezado el movimiento. La función coseno varía entre los límites ±1, así que el desplazamiento x varía entre los límites ±A.

La **fase del movimiento** es una cantidad variable con el tiempo, $\boldsymbol{\phi = (\omega \cdot t + \phi_0)}$, y $\boldsymbol{\phi_0}$ es la constante de fase. El valor de $\boldsymbol{\phi_0}$ depende del desplazamiento y la velocidad de la partícula en el tiempo inicial $t = 0$.

La magnitud ω se llama la frecuencia angular del movimiento, su unidad es 1 rad/s. Para interpretar la constante $\omega = 2\pi\nu$ consideramos que el valor del desplazamiento x(t) debe volver a su valor inicial después de un tiempo llamado período T, siendo $x(t) = x(t + T)$. Demostración:

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = A\cos(\omega t + \phi_0) \\ x(t+T) = A\cos[\omega(t+T) + \phi_0] \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x(t) = x(t+T) \\ \cos(\omega t + \phi_0) = \cos[\omega(t+T) + \phi_0] \\ (\omega t + \phi_0) = [\omega(t+T) + \phi_0] \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \omega T = 2\pi \\ \omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \end{array}\right.$$

<u>Deducción de la ecuación del movimiento</u>:

La ecuación del movimiento de un sistema perturbado se obtiene del balance dinámico entre las fuerzas actuantes sobre el sistema. La segunda ley de Newton para aprender qué fuerza puede actuar sobre la partícula, para que tenga esa aceleración y la fuerza restauradora, que es igual al producto de una constante de proporcionalidad, k, que es llamada la rigidez por el desplazamiento desde la posición de equilibrio. La constante k es la fuerza restauradora por unidad de longitud.

$$\boxed{F_{\text{sobre-partícula}} = F_{\text{restauradora(ley-Hooke)}}} \qquad \left\{\begin{array}{l} F_{\text{sobre-partícula}} = ma = m\dfrac{dv}{dt} = m\dfrac{d^2x}{dt^2} \\ F_{\text{restauradora(ley-Hooke)}} = -kx \end{array}\right.$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0} \quad \left\{\omega^2 = \frac{k}{m} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}\right\}$$

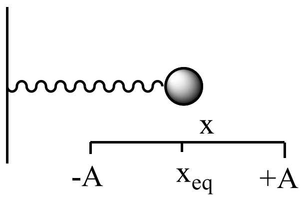
<u>Soluciones</u> de la ecuación anterior para x: 1) $\boldsymbol{x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_0)}$; 2) $\boldsymbol{x = A \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t + \phi_0)}$.

Demostración:

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0) \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = -\omega A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi_0) \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi_0) = -\omega^2 x \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi_0) \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = \omega A\cos(\omega t + \phi_0) \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi_0) = -\omega^2 x \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

<u>5.2 Cinemática del movimiento armónico simple (MAS)</u>



$x(t) = A\cdot\cos\,(\omega\cdot t + \phi_0)$
$v = -A\cdot\omega\cdot\text{sen}\,(\omega\cdot t + \phi_0)$
$a = -A\cdot\omega^2\cdot\cos\,(\omega\cdot t + \phi_0) = -\omega^2\cdot x$

La **posición** de la partícula: $\boxed{x(t) = A\cos\left(\omega t + \phi_0\right)}$

La **velocidad** de la partícula: $v = \dfrac{dx}{dt} = -A\omega\,\text{sen}\left(\omega t + \phi_0\right) = -A\omega\cos\left[\left(\omega t + \phi_0\right) - \frac{1}{2}\pi\right]$

$$\begin{cases} v = -A\omega\,\text{sen}\left(\omega t + \phi_0\right) = -A\omega\cos\left[\left(\omega t + \phi_0\right) - \frac{1}{2}\pi\right] \\ \cos\left[\left(\omega t + \phi_0\right) - \frac{1}{2}\pi\right] = \cos\left(\omega t + \phi_0\right)\cos\frac{1}{2}\pi + \text{sen}\left(\omega t + \phi_0\right)\text{sen}\,\frac{1}{2}\pi = \text{sen}\left(\omega t + \phi_0\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2 = A^2\omega^2\left(1 - \cos^2\left(\omega t + \phi_0\right)\right) = A^2\omega^2\left(1 - \dfrac{x^2}{A^2}\right) = A^2\omega^2 - \omega^2 x^2 = \omega^2\left(A^2 - x^2\right) \\ v = -\omega A\sqrt{1 - \cos^2\left(\omega t + \phi_0\right)} = -\omega\sqrt{A^2 - x^2} \end{cases}$$

La **aceleración** de la partícula: $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos\left(\omega t + \phi_0\right) = -\omega^2 x$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = A\cos\left(\omega t + \phi_0\right) \\ v = \dfrac{dx}{dt} = -A\omega\,\text{sen}\left(\omega t + \phi_0\right) = -\omega\sqrt{A^2 - x^2} = -A\omega\cos\left[\left(\omega t + \phi_0\right) - \frac{1}{2}\pi\right] \\ a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} - -A\omega^2\cos\left(\omega t + \phi_0\right) = -\omega^2 x \end{array}}$$

<u>Representación gráfica de un M.A.S</u>: x = 0,05·cos (π·t); v = -0,05·π·sen (π·t)

$$\left\{\begin{array}{l} x = A\cdot\cos\left(\omega t + \phi_0\right) = 0{,}05\cdot\cos\left(\pi t\right) \\ v = -A\omega\,\text{sen}\left(\omega t + \phi_0\right) = -0{,}05\pi\cdot\text{sen}\left(\pi t\right) \end{array}\right\} \quad \left\{\omega = \pi\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{2\pi}{T}\right\} \quad T = \frac{2\pi}{\pi} = 2\,\text{s}$$

$$x_{0(t=0)} = 0{,}05\cdot\cos 0 = 0{,}05\,\text{m} \;\Rightarrow\; v_{0(t=0)} = -0{,}05\pi\cdot\text{sen}\,0 = 0\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$x_{\left(t=\frac{1}{4}T\right)} = 0{,}05\cdot\cos\left(\pi\tfrac{1}{4}2\right) = 0{,}05\cdot\cos\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) = 0\,\text{m} \;\Rightarrow\; v_{\left(t=\frac{1}{4}T\right)} = -0{,}05\pi\cdot\text{sen}\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) = -0{,}05\pi\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$x_{\left(t=\frac{1}{2}T\right)} = 0{,}05\cdot\cos\left(\pi\tfrac{1}{2}2\right) = 0{,}05\cdot\cos\left(\pi\right) = -0{,}05\,\text{m} \;\Rightarrow\; v_{\left(t=\frac{1}{2}T\right)} = -0{,}05\pi\cdot\text{sen}\left(\pi\right) = 0\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$x_{\left(t=\frac{3}{4}T\right)} = 0{,}05\cdot\cos\left(\pi\tfrac{3}{4}2\right) = 0{,}05\cdot\cos\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = 0\,\text{m} \;\Rightarrow\; v_{\left(t=\frac{3}{4}T\right)} = -0{,}05\pi\cdot\text{sen}\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = +0{,}05\pi\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$x_{(t=T)} = 0{,}05\cdot\cos\left(\pi 2\right) = 0{,}05\cdot\cos\left(2\pi\right) = 0{,}05\,\text{m} \;\Rightarrow\; v_{\left(t=\frac{3}{4}T\right)} = -0{,}05\pi\cdot\text{sen}\left(2\pi\right) = 0\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$x = A\cdot\cos(\omega t+\phi_0) = 0{,}05\cdot\cos(\pi t) \quad \left\{\omega = \pi\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{2\pi}{T}\right\} \quad T = \frac{2\pi}{\pi} = 2\,\text{s}$$

$$x_{\text{máximo}} = +0{,}05 \;\Rightarrow\; \left\{\begin{matrix}\cos(\pi t) = +1 \\ \pi t = n2\pi \quad (n = 0,1,2,3\ldots)\end{matrix}\right\} \quad t = 2n \quad \left\{\begin{matrix}t_{n=0} = 0\,\text{s} \\ t_{n=1} = 2\,\text{s}\end{matrix}\right.$$

$$x_{\text{mínimo}} = -0{,}05 \;\Rightarrow\; \left\{\begin{matrix}\cos(\pi t) = -1 \\ \pi t = (2n+1)\pi\end{matrix}\right\} \quad t = 2n+1 \quad \left\{\begin{matrix}t_{n=0} = 1\,\text{s} \\ t_{n=1} = 3\,\text{s}\end{matrix}\right.$$

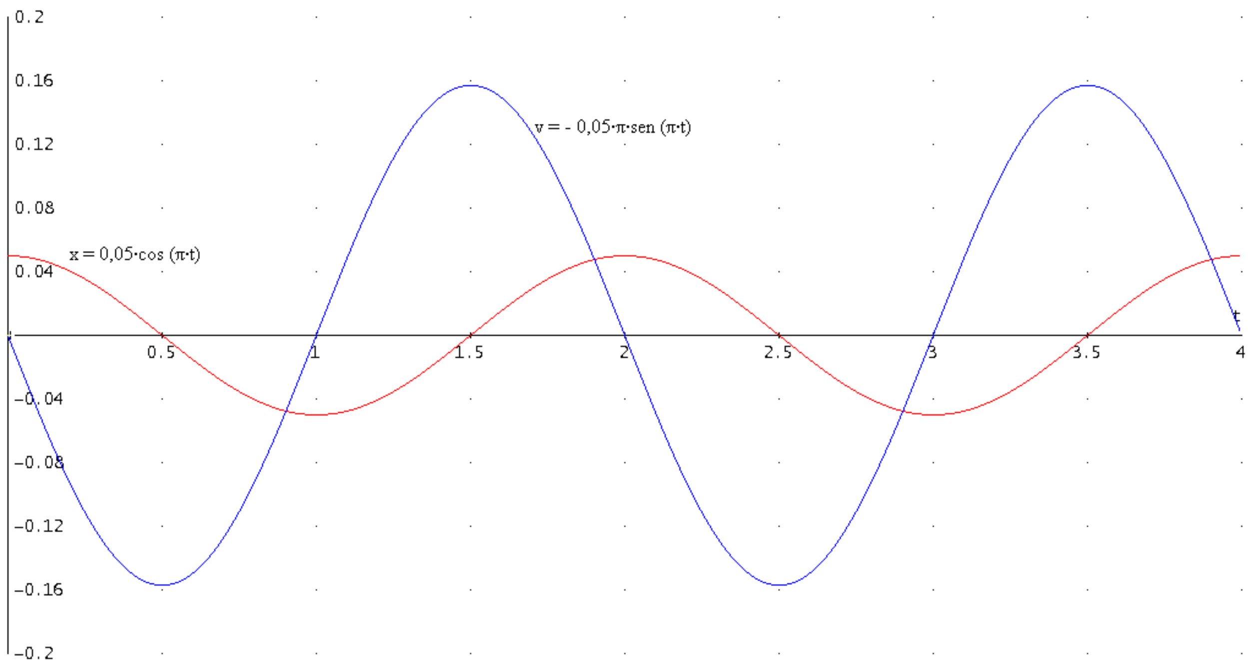
$$x = 0 = x_0 \;\Rightarrow\; \left\{\begin{matrix}\cos(\pi t) = 0 \\ \pi t = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}\end{matrix}\right\} \quad t = \frac{2n+1}{2} \quad \left\{\begin{matrix}t_{n=0} = 0{,}5\,\text{s} \\ t_{n=1} = 1{,}5\,\text{s} \\ t_{n=2} = 2{,}5\,\text{s}\end{matrix}\right.$$

$$\left\{\begin{matrix}x = A\cdot\cos(\omega t+\phi_0) \\ v = -A\cdot\omega\cdot\text{sen}(\omega t+\phi_0)\end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix}x = 0{,}05\cdot\cos(\pi t) \\ v = -0{,}05\pi\cdot\text{sen}(\pi t)\end{matrix}\right\} \quad \omega = \pi = \frac{2\pi}{T} \;\Rightarrow\; T = 2\,\text{s}$$

$$v = 0 \;\Rightarrow\; \left\{\begin{matrix}\text{sen}(\pi t) = 0 \\ \pi t = n\pi\end{matrix}\right\} \quad t = n \quad \left\{\begin{matrix}t_{n=0} = 0\,\text{s} \\ t_{n=1} = 1\,\text{s}\end{matrix}\right.$$

$$v_{\text{máx}} = +0{,}05\pi \;\Rightarrow\; \left\{\begin{matrix}\text{sen}(\pi t) = -1 \\ \pi t = \dfrac{3}{2}\pi + 2n\pi\end{matrix}\right\} \quad t = \frac{3}{2} + 2n \quad \left\{\begin{matrix}t_{n=0} = 1{,}5\,\text{s} \\ t_{n=1} = 3{,}5\,\text{s}\end{matrix}\right.$$

$$v_{\text{mín}} = -0{,}05\pi \;\Rightarrow\; \left\{\begin{matrix}\text{sen}(\pi t) = +1 \\ \pi t = \dfrac{1}{2}\pi + 2n\pi\end{matrix}\right\} \quad t = \frac{1}{2} + 2n \quad \left\{\begin{matrix}t_{n=0} = 0{,}5\,\text{s} \\ t_{n=1} = 2{,}5\,\text{s}\end{matrix}\right.$$



Al comparar las curvas posición-tiempo y velocidad-tiempo, la de la velocidad está retrasada en $\frac{1}{2}\pi$ rad respecto a la de la posición. Este retraso corresponde a la cuarta parte del período, $\frac{1}{4}T$, respecto de la curva del desplazamiento. La diferencia de fase entre posición y desplazamiento es ½π:

$$\Delta\phi = \phi_{x(\text{posición})} - \phi_{v(\text{velocidad})} = (\omega t + \phi_0) - \left[(\omega t + \phi_0) - \tfrac{1}{2}\pi\right] = \tfrac{1}{2}\pi$$

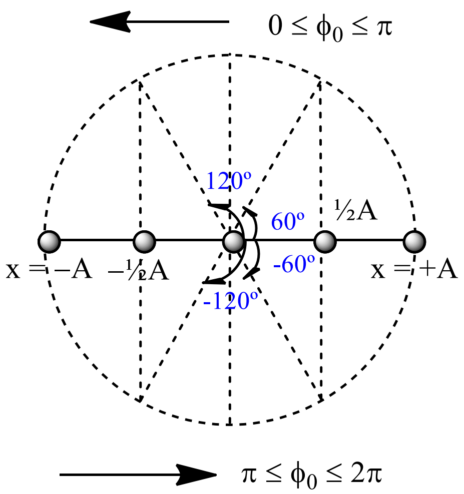
$$\Delta\phi = \omega\Delta t \quad \Rightarrow \quad \Delta t = t_{x(\text{posición})} - t_{v(\text{velocidad})} = \frac{\Delta\phi}{\omega} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\frac{2\pi}{T}} = \tfrac{1}{4}T$$

La **aceleración** de la partícula: $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left[-\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0)\right] = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi_0) = -\omega^2 x$

<u>La fase del movimiento o fase de la oscilación</u>: $\phi = (\omega \cdot t + \phi_0)$

El valor de ϕ_0 es la **constante de fase**, especifica las condiciones iniciales t = 0, del oscilador.

$$\left\{\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t + \phi_0) \\ v &= -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0) \end{aligned}\right\} \quad \left\{\begin{aligned} x_{0(t=0)} &= A\cos\phi_0 \\ v_{0(t=0)} &= -A\omega\operatorname{sen}\phi_0 \end{aligned}\right.$$



$x = A \cdot \cos(\omega t + \phi_0)$
$v = -A \cdot \omega \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0)$

Dependiendo del punto inicial x_0 así será ϕ_0:

$x_0 = +A$ entonces $\phi_0 = 0$
$x_0 = -A$ entonces $\phi_0 = \pi$
$x_0 = 0$ hacia $+A$ entonces $\phi_0 = -\pi/2 = 3/2 \cdot \pi$
$x_0 = 0$ hacia $-A$ entonces $\phi_0 = +\pi/2$
$x_0 = +A/2$ hacia $+A$ entonces $\phi_0 = -\pi/3$
$x_0 = +A/2$ hacia $-A$ entonces $\phi_0 = +\pi/3$
$x_0 = -A/2$ hacia $+A$ entonces $\phi_0 = -2\pi/3$
$x_0 = -A/2$ hacia $-A$ entonces $\phi_0 = +2\pi/3$

Los valores distintos de la constante de fase ϕ_0 corresponden a diferentes puntos de partida del movimiento:

$$x_0 = +A \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &x = A\cos(\omega t + \phi_0) \\ &+A = A\cos\phi_0 \\ &\cos\phi_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = 0 \end{aligned}\right\} \boxed{x = A\cos(\omega t + 0)}$$

$$x_0 = -A \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &x = A\cos(\omega t + \phi_0) \\ &-A = A\cos\phi_0 \\ &\cos\phi_0 = -1 \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = \pi \end{aligned}\right\} \boxed{x = A\cos(\omega t + \pi)}$$

$$x_0 = 0 \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &x = A\cos(\omega t + \phi_0) \\ &0 = A\cos\phi_0 \\ &\cos\phi_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = \pm\tfrac{1}{2}\pi \end{aligned}\right\} \left\{\begin{aligned} &v = -A\omega\operatorname{sen}(\omega t + \phi_0) \\ &v_0 = -A\omega\operatorname{sen}\phi_0 \\ &v_{0(\phi_0 = +\frac{1}{2}\pi)} = -A\omega < 0 \\ &v_{0(\phi_0 = -\frac{1}{2}\pi)} = +A\omega > 0 \end{aligned}\right\} \boxed{\begin{aligned} x_{(0\to+A)} &= A\cos(\omega t - \tfrac{1}{2}\pi) \\ x_{(0\to-A)} &= A\cos(\omega t + \tfrac{1}{2}\pi) \end{aligned}}$$

$$x_0 = +\frac{A}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = A\cos(\omega t + \phi_0) \\ +\frac{A}{2} = A\cos\phi_0 \\ \cos\phi_0 = 0,5 \\ \phi_0 = \pm 60^\circ = \pm\frac{2\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{3} \end{cases} \begin{cases} v = -A\omega \,\mathrm{sen}(\omega t + \phi_0) \\ v_0 = -A\omega\,\mathrm{sen}\,\phi_0 \\ v_{0(\phi_0 = +\frac{\pi}{3})} < 0 \\ v_{0(\phi_0 = -\frac{\pi}{3})} > 0 \end{cases} \boxed{\begin{array}{l} x_{(0\to +A)} = A\cos(\omega t - \frac{1}{3}\pi) \\ x_{(0\to -A)} = A\cos(\omega t + \frac{1}{3}\pi) \end{array}}$$

$$x_0 = -\frac{A}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = A\cos(\omega t + \phi_0) \\ -\frac{A}{2} = A\cos\phi_0 \\ \cos\phi_0 = -0,5 \\ \phi_0 = \pm 120^\circ = \pm\frac{2\pi}{3} \end{cases} \begin{cases} v = -A\omega \,\mathrm{sen}(\omega t + \phi_0) \\ v_0 = -A\omega\,\mathrm{sen}\,\phi_0 \\ v_{0(\phi_0 = +\frac{2\pi}{3})} < 0 \\ v_{0(\phi_0 = -\frac{2\pi}{3})} > 0 \end{cases} \boxed{\begin{array}{l} x_{(0\to +A)} = A\cos(\omega t - \frac{2}{3}\pi) \\ x_{(0\to -A)} = A\cos(\omega t + \frac{2}{3}\pi) \end{array}}$$

Si la partícula parte inicialmente de $x_{0(t=0)} = +A$, la constante de fase es $\phi_0 = 0$. Siendo la ecuación de la posición: $x = A\cdot\cos(\omega\cdot t)$, y la velocidad inicial es $v_0 = 0$.

Si la partícula parte inicialmente de $x_{0(t=0)} = -A$, la constante de fase es $\phi_0 = \pi$. Siendo la ecuación de la posición: $x = A\cdot\cos(\omega\cdot t + \pi)$, y la velocidad inicial es $v_0 = 0$.

Si la partícula parte desde un punto entre +A hasta –A la constante de fase ϕ_0 varía entre 0 y π radianes: $0 \le \phi_0 \le \pi$. Y si la partícula parte desde –A hasta +A la constante de fase varía entre $-\pi$ y 0 radianes: $-\pi \le \phi_0 \le 0$.

Ecuaciones

$$\boxed{x = A\cos\phi = A\cos(\omega t + \phi_0)} \quad \Rightarrow \quad v = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi_0)$$

$$\begin{Bmatrix} x = +A \quad \Rightarrow \quad \cos(\omega t + \phi_0) = +1 \\ \omega t + \phi_0 = 2n\pi\,(n = 0,1,\ldots) \Rightarrow t = \dfrac{2n\pi - \phi_0}{\omega} \\ \{\phi_{0(t=0;n=0)} = 0\} \quad v_0 = -A\omega\,\mathrm{sen}\,\phi_0 = 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x = -A \quad \Rightarrow \quad \cos(\omega t + \phi_0) = -1 \\ \omega t + \phi_0 = (2n+1)\pi \Rightarrow t = \dfrac{(2n+1)\pi - \phi_0}{\omega} \\ \{\phi_{0(t=0;n=0)} = \pi\} \quad v_0 = -A\omega\,\mathrm{sen}\,\phi_0 = 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x = +\frac{A}{2} \quad \{\cos(\omega t + \phi_0) = +0,5\} \\ \omega t + \phi_0 = \frac{1}{6}\pi \quad \{v_0 = -A\omega\,\mathrm{sen}\,\phi_0 < 0 \\ \omega t + \phi_0 = -\frac{1}{6}\pi = \frac{11}{6}\pi \quad \{v_0 = -A\omega\,\mathrm{sen}\,\phi_0 > 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x = -\frac{A}{2} \quad \{\cos(\omega t + \phi_0) = -0,5\} \\ \omega t + \phi_0 = \frac{2}{3}\pi \quad \{v_0 = -A\omega\,\mathrm{sen}\,\phi_0 < 0 \\ \omega t + \phi_0 = -\frac{2}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi \quad \{v_0 = -A\omega\,\mathrm{sen}\,\phi_0 > 0 \end{Bmatrix}$$

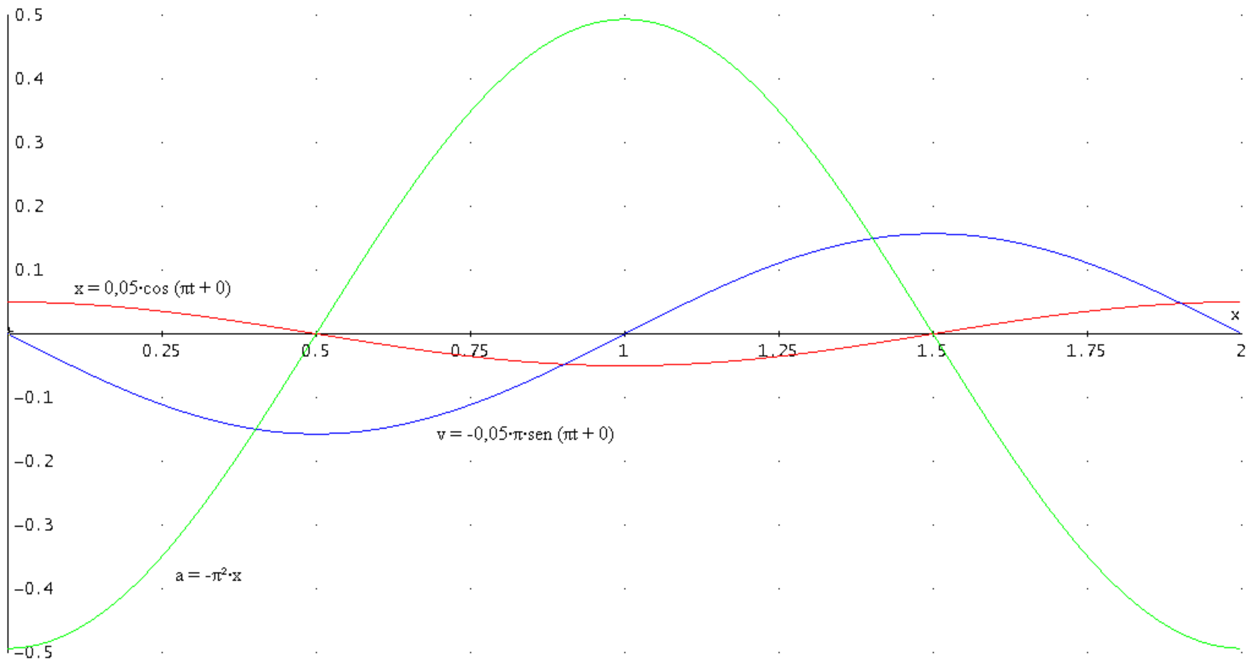
$$\begin{Bmatrix} x_0 = 0 \quad \{\cos(\omega t + \phi_0) = 0\} \\ \omega t + \phi_0 = (2n+1)\dfrac{\pi}{2} \quad \left\{ t = \dfrac{(2n+1)\frac{\pi}{2} - \phi_0}{\omega} \right. \end{Bmatrix} \begin{cases} \phi_{0(t=0;n=0)} = \dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad v_0 = -A\omega\,\mathrm{sen}\,\phi_0 = -A\omega \\ \phi_{0(t=0;n=1)} = \dfrac{3\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad v_0 = -A\omega\,\mathrm{sen}\,\phi_0 = +A\omega \end{cases}$$

Ejemplo de movimiento armónico simple de las características siguientes: el desplazamiento máximo de A = 0,05 m y el período de T = 2 s, siendo la constante de fase $\phi_0 = 0$ ($x_0 = A$)

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0) = 0{,}05 \cdot \cos(\pi t + 0) \quad \{x_0 = 0{,}05\,\text{m} \Rightarrow \phi_0 = 0\}$$
$$v = -0{,}05\pi\,\text{sen}(\pi t + 0)$$
$$a = -\omega^2 x = -\pi^2 0{,}5\cos(\pi t + 0)$$

$$\left.\begin{Bmatrix} x = +A \\ \cos(\omega t) = +1 \end{Bmatrix}\right\} \omega t = 2n\pi\ (n = 0,1,\ldots) \Rightarrow t = \frac{2n\pi}{\omega} = \frac{2n\pi}{\frac{2\pi}{T}} = nT$$
$$\left.\begin{Bmatrix} x = 0 \\ \cos(\omega t) = 0 \end{Bmatrix}\right\} \omega t = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{(2n+1)\frac{\pi}{2}}{\omega} = \frac{(2n+1)\frac{\pi}{2}}{\frac{2\pi}{T}} = (2n+1)\frac{T}{4}$$
$$\left.\begin{Bmatrix} x = -A \\ \cos(\omega t) = -1 \end{Bmatrix}\right\} \omega t = (2n+1)\pi \Rightarrow t = \frac{(2n+1)\pi}{\omega} = \frac{(2n+1)\pi}{\frac{2\pi}{T}} = (2n+1)\frac{T}{2}$$

La representación en el eje de ordenadas de los valores de la posición x(m), de la velocidad v(m/s) y de la aceleración a(m/s^2), y en el eje de abscisas el tiempo (s), nos da las siguientes gráficas:



5.3 Dinámica del movimiento armónico simple

Conocida la aceleración de una partícula y cómo varía con el tiempo, podemos usar la segunda ley de Newton para aprender qué fuerza puede actuar sobre la partícula, para que tenga esa aceleración. La fuerza restauradora es igual al producto de una constante, k, por el desplazamiento desde la posición de equilibrio. La constante k es la fuerza restauradora por unidad de longitud.

$$\boxed{F_{\text{sobre-partícula}} = F_{\text{restauradora(ley-Hooke)}}} \quad \begin{Bmatrix} ma = -kx \\ m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx \end{Bmatrix} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \equiv \left\{\frac{\frac{N}{m}}{kg} = \frac{\frac{kg\cdot\frac{m}{s^2}}{m}}{kg} = s^{-2}\right\} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

Las soluciones de la ecuación anterior para x:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0 \quad \begin{cases} x = A\cos(\omega t+\phi_0) \\ x = A\,\mathrm{sen}(\omega t+\phi_0) \end{cases} \quad \begin{cases} \omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}=\dfrac{2\pi}{T}=2\pi\nu \\ T=\dfrac{1}{\nu}=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \end{cases}$$

El movimiento armónico simple es el movimiento ejecutado por una partícula de masa m sometida a una fuerza $F = -k\cdot(x - x_0)$, que es proporcional al desplazamiento de la partícula pero opuesta en signo. Cuando el desplazamiento es positivo la fuerza apunta en sentido contrario al desplazamiento, y cuando el desplazamiento es negativo la fuerza apunta en sentido contrario al mismo. Por lo que la fuerza está apuntando siempre hacia el origen x_0, que es el punto de equilibrio. La fuerza es central y atractiva. La constante k se llama constante elástica. Representa la fuerza por unidad de distancia requerida para desplazar la partícula.

El péndulo

Un movimiento de oscilación es el péndulo. Una masa m unida a una cuerda de longitud L que puede oscilar libremente. La posición del péndulo se puede describir por el arco de longitud s, que es cero cuando el péndulo está en la vertical. Los ángulos y el arco son positivos cuando el péndulo está a la derecha del centro y negativos cuando está a la izquierda.

Sobre la masa actúan dos fuerzas: la tensión T y el peso P. Dividimos las fuerzas en componentes tangencial, paralela al movimiento, y componentes radial paralela a la cuerda.

La segunda ley de Newton para la componente tangencial, paralela al movimiento, es

$$F_{t(\text{neta})}=-mg\,\mathrm{sen}\,\theta=ma_t \quad \left\{a_t=\frac{d^2s}{dt^2}=-g\,\mathrm{sen}\,\theta\right\}$$

El ángulo está relacionado por θ = s/L. Esta es la ecuación del movimiento de oscilación del péndulo. La función seno hace la ecuación más complicada que la ecuación del movimiento de un muelle oscilando.

Si hacemos la restricción de que el péndulo oscile para pequeños ángulos de menos de 10º entonces sen θ ≈ θ (en radianes)

$$F_{t(\text{neta})}=-mg\,\mathrm{sen}\,\theta\approx-mg\theta=-mg\frac{s}{L}=ma_t \quad \left\{a_t=\frac{d^2s}{dt^2}=-\frac{g}{L}s\right\}$$

$$\begin{Bmatrix} ma=-kx \\ m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-kx \end{Bmatrix} \quad \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0 \;\Rightarrow\; \frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0 \;\Rightarrow \omega^2=\frac{k}{m} \;\Rightarrow\; \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{2\pi}{T}=2\pi\nu$$

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-\frac{g}{L}s \;\Rightarrow\; \frac{d^2s}{dt^2}+\frac{g}{L}s=0 \;\Rightarrow \omega^2=\frac{g}{L} \;\Rightarrow\; \omega=\sqrt{\frac{g}{L}}=\frac{2\pi}{T} \quad \boxed{T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

5.4 Energía de la partícula en el movimiento armónico simple

Energía cinética: $E_c=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\,\mathrm{sen}^2(\omega t+\phi_0)=\frac{1}{2}m\omega^2(A^2-x^2)$

$$\begin{Bmatrix} x=A\cos(\omega t+\phi_0) \\ v=-A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t+\phi_0) \end{Bmatrix} \begin{cases} E_c=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left[-\omega A\,\mathrm{sen}(\omega t+\phi_0)\right]^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\,\mathrm{sen}^2(\omega t+\phi_0) \\ E_c=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\left[1-\cos^2(\omega t+\phi_0)\right]=\frac{1}{2}m\omega^2(A^2-x^2) \end{cases}$$

La energía cinética alcanza su valor máximo en el punto de equilibrio, que es el punto medio ($x = x_{eq} = 0$), y su valor es cero en los extremos de la oscilación ($x = \pm A$).

Energía potencial: $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2(\omega t + \phi_0)$

$$\left\{\begin{array}{l} W_{por} = \int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_i^f -kx\cdot dx = -\left[\frac{1}{2}kx^2\right]_i^f = -\left(\frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2\right) = -\Delta E_{p(muelle)} \\ E_{p(m)} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \end{array}\right\}$$

La energía potencial tiene el valor mínimo en el punto de equilibrio ($x = 0$) y se incrementa hasta el valor máximo, cuando la partícula alcanza los puntos extremos de la oscilación ($x = \pm x_m$).

Energía total: La energía total es constante porque la fuerza es conservativa.

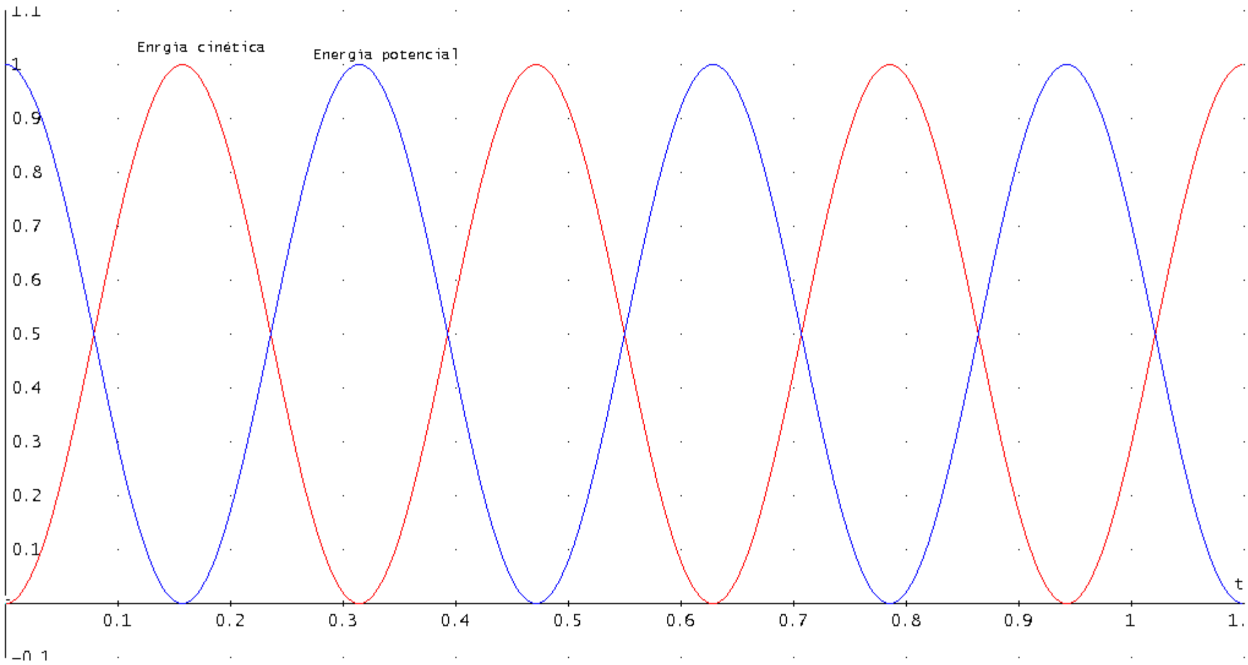
$$E_{total} = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$$

<u>Ejemplo</u>: La partícula de masa 0,5 kg con MAS de amplitud 0,2 m y frecuencia angular de 10 rad/s tiene una energía total de 1 J. El movimiento parte de $x_0 = A$: **$x = 0{,}2\cdot\cos(10t)$; $v = -2\cdot\text{sen}(10t)$**

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right) = \frac{1}{2}\times 0{,}5\,\text{kg}\times\left(10\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2\times\left[0{,}2^2 - \left(0{,}2\cos(10t)\right)^2\right]$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \frac{1}{2}\times 0{,}5\,\text{kg}\times\left(10\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2\times\left(0{,}2\cos(10t)\right)^2$$

$$E_{total} = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}\times 0{,}5\,\text{kg}\times\left(10\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2\times\left(0{,}2\,\text{m}\right)^2 = 1\,\text{J}$$



<u>Oscilaciones verticales</u>

Si una esfera de masa m se cuelga de un muelle vertical, de constante k, se observa que la posición de equilibrio de la masa no está donde el muelle estaba antes de colocar la masa. La posición de equilibrio de la masa m está donde esta no se mueve y el muelle tiene un alargamiento $\Delta l = l - l_0$.

Para determinar el valor de Δl se hace mediante un **problema de equilibrio estático** en el que la fuerza del muelle hacia arriba se equilibra con la fuerza peso de la masa hacia abajo. La componente de la fuerza del muelle sobre el eje y viene dada por la ley de Hooke:

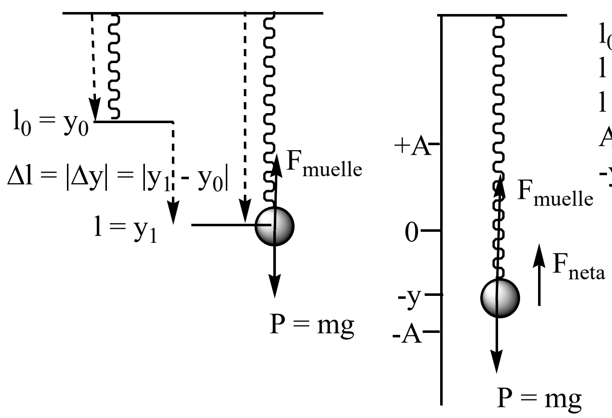
$F_{muelle(y)} = -k \cdot \Delta y = +k \cdot \Delta l$

La distancia Δl es simplemente un número positivo, el desplazamiento $\Delta y = y_1 - y_0$ es negativo, como la masa se ha desplazado hacia abajo: $\mathbf{\Delta y = y_1 - y_0 = -\Delta l}$.

La **primera ley de Newton** para la masa en equilibrio es: $\boxed{\mathbf{F_{neta(y)} = F_{muelle(y)} + F_{gravedad(y)} = 0}}$

$\mathbf{F_{neta(y)} = F_{muelle(y)} + F_{gravedad(y)} = -k \cdot (y_1 - y_0) - mg = = +k \cdot \Delta l - mg = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \boxed{\Delta l = mg/k}}$.

Esta es la distancia **Δl** que se alarga el muelle cuando la masa se cuelga y permanece en reposo.



$l_0 = y_0$ es la longitud del muelle sin estirar
$l = y_1$ es la longitud del muelle con la masa en reposo
$l = y_1$ define la posición de equilibrio $y = 0$
A es la amplitud de las oscilaciones alrededor de $y = 0$
-y es la posición de la masa en un instante

Ahora analizamos si la masa oscila alrededor de la posición de equilibrio, que es la fijada por la masa cuando se cuelga y permanece en reposo.

Si oscila desde A hasta –A, colocamos el origen en la posición de equilibrio de la masa en reposo. Si la masa se mueve hacia arriba el muelle se acorta comparado con su longitud de equilibrio, pero el muelle está estirado comparado con su longitud sin estirar. Si la masa se mueve hacia abajo el muelle se estira por una cantidad $(\Delta l - \Delta y) = [-(y_1 - y_0) - (y - 0)]$, y ejerce una fuerza hacia arriba de valor: $\mathbf{F_{muelle(y)} = k \cdot (\Delta l - \Delta y)} = -k \cdot (y_1 - y_0) - k \cdot (y - 0)]$

La fuerza neta sobre la masa en este punto y es:

$\mathbf{F_{neta(y)} = F_{muelle(y)} + F_{gravedad(y)} = k \cdot (\Delta l - \Delta y) - mg = = -k \cdot (y_1 - y_0) - k \cdot (y - 0)] - mg = - k \cdot (y - 0)}$

Esta ecuación para oscilaciones verticales es exactamente la misma que para oscilaciones horizontales ($F_{neta(x)} = -k \cdot x$). Por tanto, $F_{total} = -k \cdot y$, es la ecuación de una fuerza recuperadora que cumple la ley de Hooke y da lugar a un movimiento vibratorio armónico.

El papel de la gravedad es determinar dónde está la posición de equilibrio, pero no afecta al movimiento alrededor de la posición de equilibrio. Como la fuerza neta es la misma, la segunda ley de Newton tendrá la misma solución:

$\mathbf{y(t) = A \cdot \cos (\omega \cdot t + \phi_0)}$.

La energía en una superficie horizontal: el movimiento armónico de pulsación ω = (k/m)^½ y alrededor de la posición de equilibrio que es la longitud l_0 del muelle. Siendo su energía total: $E_{total} = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}kA^2$

La energía en una superficie vertical: el movimiento es también armónico, de la misma pulsación ω = (k/m)^½, pero con la posición de equilibrio está desplazada respecto del caso horizontal, está alargada en: Δl = mg/k. Por lo que respecto de la energía es de esperar que en vertical haya que añadirle un término de energía potencial correspondiente al alargamiento $\Delta l = l - l_0$:

$$\begin{cases} E_p = E_{p(m)} + E_{p(g)} = \frac{1}{2}kx^2 - mgy = \frac{1}{2}k\left[\Delta l + y\right]^2 - mgy = \frac{1}{2}k\left[\Delta l^2 + y^2 + 2y\Delta l\right] - mgy \\ E_p = \frac{1}{2}k\Delta l^2 + \frac{1}{2}ky^2 + ky\Delta l - mgy = \frac{1}{2}k\Delta l^2 + \frac{1}{2}ky^2 + mgy - mgy \\ E_p = E_{p(m)} + E_{p(g)} = \frac{1}{2}k\Delta l^2 + \frac{1}{2}ky^2 \end{cases}$$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - y^2\right) = \frac{1}{2}k\left(A^2 - y^2\right)$$

$$E_{total} = E_c + E_p = \frac{1}{2}k\left(A^2 - y^2\right) + \frac{1}{2}k\Delta l^2 + \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}kA^2 + \frac{1}{2}k\Delta l^2$$

2.12 Cuestiones y Problemas de «Trabajo y Energía. Campos escalares y vectoriales»

Cuestiones

1) Conteste razonadamente a las siguientes preguntas: a) ¿puede asociarse una energía potencial a una fuerza de rozamiento?; b) ¿qué tiene más sentido físico, la energía potencial en un punto o la variación de energía potencial entre dos puntos?

Problemas

1) Un automóvil de 1200 kg está subiendo una pendiente de inclinación 5º. La fuerza de fricción tiene de magnitud 500 N. Si la longitud de la pendiente es de 300 m, ¿cuál será la magnitud de la fuerza que lo hace subir? sabiendo que el trabajo neto hecho por todas las fuerzas actuantes sobre el coche es de +150.000 J. [2.025 N]

2) Un avión, de masa 6.000 kg, está volando inclinado en un ángulo 10 grados hacia abajo durante una distancia de 1.700 m. Sobre el avión actúan cuatro fuerzas: su peso, la fuerza ascendente que actúa perpendicular a la dirección del avión, la fuerza de los motores (de magnitud 18.000 N) y la fuerza de la resistencia del aire opuesta a la dirección del movimiento del avión. El trabajo neto realizado por estas cuatro fuerzas es $2{,}9 \cdot 10^7$ J. Calcula: a) el trabajo hecho por la resistencia del aire, y b) la magnitud de la fuerza de la resistencia del aire. [a) $-1{,}896 \cdot 10^7$ J; b) -11.151,7 N]

3) La frenada de un coche tiene 65 m de longitud. El coeficiente de fricción cinética entre los neumáticos y la carretera es 0,80. ¿Qué velocidad llevaba el coche antes de aplicar los frenos?. [31,9 m/s]

4) Una nave espacial viaja a través del espacio vacío con una velocidad de 11.000 m/s, siendo su masa de 50.000 kg. Suponemos que no actúan fuerzas sobre la nave excepto aquellas generadas por su motor. El motor ejerce una fuerza constante de 400 kN, que es paralela al desplazamiento, y si ésta se mantiene durante un desplazamiento de 2.500 km, determina: a) la energía cinética final de la nave; b) la velocidad final de la nave. [a) $4{,}025 \cdot 10^{12}$ J; b) 12.688,6 m/s]

5) Un esquiador de 58 kg está bajando por una pendiente de 25º, siendo la fuerza de fricción cinética de 70 N. Si la velocidad inicial del esquiador era de 3,6 m/s, e ignoramos la resistencia del aire, después de recorrer 57 m determina: a) la energía cinética final esquiador; b) la velocidad final. [a) 10.078,1 J; b) 18,64 m/s]

6) Un gimnasta de 48,0 kg salta verticalmente hacia arriba desde un trampolín. El gimnasta sale del trampolín a una altura de 1,20 m y alcanza una altura máxima de 4,80 m, siempre con relación al suelo. Si ignoramos la resistencia del aire, determina: a) el trabajo debido a la fuerza de la gravedad en la subida y la velocidad inicial con la que el gimnasta sale del trampolín; b) la velocidad del gimnasta al volver a caer a una altura de 3,50 m, así como el trabajo debido a la fuerza de la gravedad en la caída. [a) -1693 J; 8,40 m/s; b) 612 J; 5,05 m/s]

7) La montaña rusa más alta del mundo tiene una caída vertical de 59,3 m. Si consideramos que la velocidad en el punto más alto es cero y que la fricción es prácticamente nula, calcula la velocidad de los viajeros en el punto más bajo de la trayectoria. Posteriormente compara el resultado obtenido con el obtenido en la experiencia en que la velocidad de los viajeros en la parte más baja es de 32,2 m/s, que es menor que la calculada teóricamente. Con estos datos calcula cuánto trabajo realiza la fuerza de fricción sobre un vagón de 55,0 kg. [34 m/s; 3.449,6 J]

8) Calcular el trabajo neto realizado al arrastrar un bloque de 80 kg, sobre un plano horizontal, aplicándole una fuerza de 400 N durante una distancia de 15 m si: a) la fuerza aplicada es horizontal y no existe rozamiento entre el bloque y el plano; b) la fuerza aplicada forma un ángulo de 60º con la horizontal y no existe rozamiento entre el bloque y el plano; c) la fuerza aplicada es horizontal y existe rozamiento entre el bloque y el plano siendo $\mu = 0,2$; d) la fuerza forma un ángulo de 60º con la horizontal y existe rozamiento entre el bloque y el plano siendo $\mu = 0,2$. [a) 6.000 J; b) 3.000 J; c) 3.648 J; d) 1687,2 J]

9) Un bloque de 5 kg desliza por una superficie horizontal lisa con una velocidad de 4 m/s y choca con un resorte de masa despreciable y constante elástica 800 N/m, en equilibrio y con el otro extremo fijo. Calcular: a) cuánto se comprime el resorte; b) desde qué altura por encima del resorte colocado verticalmente debería caer el bloque para producir la misma compresión obtenida en el apartado anterior. [a) $\Delta x_{muelle} = 0,3162$ m; b) 0,500 m].

10) Un bloque de 10 kg se lanza hacia arriba por un plano inclinado de 30º, con la horizontal, con una velocidad de 10 m/s. El bloque vuelve al punto de partida con una velocidad de 5 m/s. Calcula: a) el trabajo de rozamiento total, en subir y bajar; b) la longitud que recorre en subir; c) el coeficiente de rozamiento con el plano; d) la deformación máxima y final de un resorte de constante elástica 500 N/m, colocado en dicho punto de partida y con el que choca el bloque al volver. [a) -375 J; b) 6,38 m; c) $\mu = 0,346$; d) 0,7475 m y 0,0386 m]

11) Una bola pequeña de metal es lanzada por un plano inclinado desde una altura sobre el suelo de 3,00 m. Al final del plano, siguiendo un camino curvado, es proyectado verticalmente hacia arriba hasta una altura de 4,00 m sobre el suelo. Si ignoramos la fricción y la resistencia del aire, encuentra la velocidad inicial de la bola. [4,43 m/s]

12) Un cohete de 3 kg es lanzado verticalmente hacia arriba con suficiente velocidad inicial para alcanzar una altura máxima de 100 m. Si la resistencia del aire realiza un trabajo de -800 J sobre el cohete, ¿qué altura alcanzaría el cohete sin resistencia del aire?. [127,5 m]

13) Un bloque de 2 kg se lanza hacia arriba con una velocidad de 10 m/s por un plano inclinado que forma un ángulo de 30º con la horizontal. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano es $\mu = 0,4$. Calcula: a) el incremento en la energía potencial gravitatoria del bloque cuando alcanza el punto más alto y el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento en la subida; b) la energía cinética del bloque cuando vuelve a caer al punto de lanzamiento y su velocidad. [a) $\Delta E_{p(g)} = 59,07$ J; $W_{roz} = -40,93$ J; b) $E_c = 18,14$ J; v = 4,26 m/s]

14) Un bloque de 2,0 kg se deja caer desde una altura de 40 cm sobre un muelle colocado verticalmente. La constante elástica del muelle es de 1.960 $N \cdot m^{-1}$. Calcula: a) la longitud máxima que se comprime el muelle; b) la longitud comprimida del muelle cuando se alcance el equilibrio. Dato: $g = 9,8\ m \cdot s^{-2}$. [a) 0,10 m; b) 0,010 m]

15) Un objeto de masa 1 kg se encuentra a una altura de 100 m. Se deja caer, con velocidad inicial cero, siendo la fuerza de rozamiento del aire de 2 N. Determina: a) la energía cinética con la que llega al suelo; b) la velocidad cuando llega al suelo. Dato: $g = 9,8\ m/s^2$. [a) 780 J; b) 39,50 m/s]

16) Calcula el Trabajo realizado sobre una partícula al desplazarla desde el punto (1,1) m hasta el (2,4) m por los campos de fuerzas: $\vec{F} = x^2\vec{i} - y^2\vec{j}$; $\vec{F} = y^2\vec{i} - x^2\vec{j}$. Siguiendo las trayectorias: a) por la recta que pasa por los citados puntos; b) por la quebrada que pasa por los puntos (1,1), (2,1) y (2,4); c) por la quebrada que pasa por los puntos (1,1), (1,4) y (2,4); d) por la parábola de ecuación $y = x^2$. Posteriormente determina si el campo de fuerzas es conservativo. [1º: a) -56/3 J; b) -56/3; c) -56/3; d) -56/3; Conservativo][2º: a) 0 J; b) -11 J; c) 13 J; d) -1,3 J. No conservativo]

17) Sea el campo de fuerzas que actúa sobre una partícula: $\vec{F} = 2xy\vec{i} - x^2\vec{j}$. Calcula el trabajo realizado al desplazar la partícula desde el punto (0,0) m hasta el (2,4) m siguiendo las trayectorias siguientes: a) por la quebrada (0,0), (2,0) y (2,4); b) por la quebrada (0,0), (0,4) y (2,4); c) a lo largo de la recta que une los dos puntos (0,0) y (2,4). Posteriormente comprobar si el campo es conservativo. [a) -16 J ; b) 16 J; c) 16/3 J. No Conservativo]

18) Un cuerpo se mueve a lo largo de la trayectoria [x = t + 1; y = 2t - 2; z = t] y bajo la acción del campo: $\vec{F} = t\vec{i} - (3t+1)\vec{j} + 2\vec{k}$. Calcular: a) el trabajo realizado entre los instantes 2 s y 3 s; b) el desplazamiento de la partícula. [a) -12,5 J; b) $6^{1/2}$ m]

19) Una bala, de masa m_b = 0,01 kg, con velocidad horizontal de valor v_b = 200 m/s, se incrusta en un bloque colgado (péndulo balístico), de masa m_p = 4 kg, suspendido de un punto fijo mediante una cuerda de longitud 0,5 m. Calcule: a) la velocidad del sistema, formado por las dos masas, tras el impacto; b) la energía cinética del sistema tras el impacto; c) la altura a la que asciende el sistema tras el impacto; d) la velocidad mínima de la bala para que el bloque con la bala describa una circunferencia vertical completa. [a) 0,50 m/s; b) 0,50 J; c) 0,0127 m; d) 1.984 m/s].

20) Un bloque, de masa 20 kg, se encuentra sobre una superficie horizontal en equilibrio, unido a uno de los extremos de un resorte (k = 100 N/m) que tiene el otro extremo fijo. Al bloque se le aplica una fuerza, de 150 N y formando un ángulo de 30º con la horizontal, hasta estirar el resorte una longitud de 0,5 m. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y la superficie es μ = 0,4. Calcule, al término de recorrer el bloque los 0,5 m: a) el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento; b) el aumento de la energía cinética del bloque y su velocidad; c) la aceleración del bloque. [a) -24,2 J; b) 28,25 J; v = 1,68 m/s; c) a = 1,575 m/s^2].

21) Un proyectil de 100 g lleva una velocidad de 210 m/s cuando choca y se incrusta en un bloque de madera de 2 kg que descansa en un plano horizontal. El bloque con el proyectil incrustado recorre 4 m sobre el plano, siendo el coeficiente de rozamiento μ = 0,2. Posteriormente, choca con un resorte, de constante elástica k = 1.000 N/m, al que comprime. Calcule: a) velocidad del sistema (bloque y proyectil) inmediatamente después del choque, así como su energía cinética; b) la energía cinética del sistema antes de chocar con el muelle, así como su velocidad; c) la longitud que se comprime el muelle y el aumento en su energía potencial. [a) 10 m/s, 105 J; b) 88,536 J; 9,18 m/s; c) 0,417 m; 86,82 J]

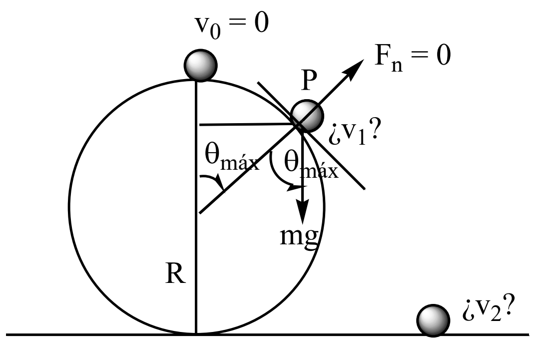
22) Un cuerpo se desliza sin rozamiento por una vía en forma de rizo. La altura de la que parte es de 4 m y el rizo tiene de radio R = 1 m. Calcula: a) la velocidad en el rizo a 1 m de altura y en la parte superior que está a 2 m de altura; b) la altura desde la que debe caer el cuerpo para que al pasar por el punto más alto del rizo la fuerza normal sea igual que el peso del cuerpo. [a) $v_{(1m)}$ = 7,67 y v_{top} = 6,3 m/s; b) 3 m]

23) Un bloque de masa 2 kg se lanza con una velocidad de 6 m·s^{-1} por una superficie horizontal rugosa de μ = 0,2. Después de recorrer una distancia de 4 m, choca con el extremo libre de un resorte, de masa despreciable y constante elástica 200 N·m^{-1}, colocado horizontalmente y fijo por el otro extremo. Calcule: a) la compresión máxima del resorte y el trabajo total realizado en dicha compresión; b) la altura desde la que debería dejarse caer el bloque sobre el extremo del resorte, colocado verticalmente, para que la compresión máxima fuera la misma que en el apartado a). [a) 0,43 m y 18,5 J; b) 0,5 m]

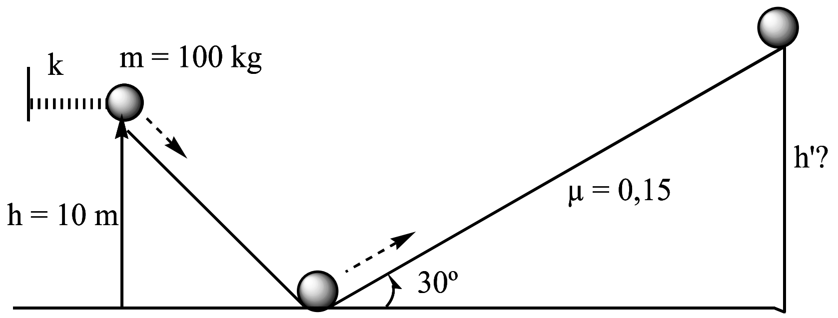
24) Un muelle se comprime 2 cm si se le aplica una fuerza de 270 N. Un bloque cuya masa es de 12 kg se deja caer desde lo alto de un plano inclinado, sin rozamiento, cuyo ángulo de inclinación es de 30º. El bloque en su caída por el plano inclinado choca con el muelle y lo comprime hasta 5,5 cm. Calcula: a) ¿desde qué distancia ha caído?; b) ¿cuál es la velocidad del bloque justamente antes de chocar con el muelle?. Dato: g = 9,8 m·s^{-2}. [a) 35 cm; b) 1,7 m/s]

25) Un bloque de 2,0 kg se deja caer desde una altura de 40 cm sobre un muelle colocado verticalmente. La constante elástica del muelle es de 1960 N·m^{-1}. Calcula la distancia máxima que se comprime el muelle. [0,08 m]

26) Un objeto, de masa 1 kg, se encuentra en reposo sobre una esfera de radio R = 3 m. El objeto se desliza, con velocidad inicial cero, sin rozamiento hasta que se separa de la esfera en el punto P, cuando F_n = 0, siendo el ángulo que forma con la vertical $\theta_{máx}$. Calcule: a) el valor del ángulo $\theta_{máx}$; b) la energía cinética de la masa en el punto P y la velocidad v_1 en ese punto; c) la energía cinética cuando choca con el suelo y la velocidad v_2. Dato: $g = 9,8\ m/s^2$. [a) $\theta_{máx} = 48,19º$; b) $E_c = 9,8$ J; $v_1 = 4,43$ m/s ; c) 58,8 J; $v_2 = 10,84$ m/s]



27) Un muelle (k = 80.000 N/m), colocado horizontalmente, se encuentra comprimido 50 cm con un objeto de 100 kg, y estando todo el sistema a 10 m de altura. Cuando se suelta el muelle el objeto cae, los 10 m de altura, por una rampa por la que no tiene rozamiento. Al llegar el objeto a la parte más baja de la rampa se encuentra que ha de subir por un plano inclinado, de 30º con la horizontal, pero cuya superficie ejerce un rozamiento de coeficiente dinámico 0,15. Determina hasta qué altura del plano inclinado subirá. Dato: $g = 9,8\ m/s^2$. [16 m]



28) Un muelle (k = 80 N/m), colocado horizontalmente sobre una mesa, está unido a un objeto de 5 kg, que está en reposo. Se tira del objeto mediante una fuerza horizontal de 100 N durante un espacio de 50 cm. Si el objeto tiene rozamiento con la mesa de coeficiente 0,30 determina la energía cinética final después de recorrer los 50 cm y su velocidad. Dato: $g = 9,8\ m \cdot s^{-2}$. [32,65 J y 3,6 m/s]

29) Un ascensor de 1.000 kg, partiendo del reposo, acelera hacia arriba a $1\ m/s^2$ en 10 m. Calcula: a) el trabajo realizado por la gravedad; b) el trabajo realizado por la tensión del cable del ascensor; c) la energía cinética del ascensor a los 10 m y su velocidad. Dato: $g = 9,8\ m \cdot s^{-2}$. [a) -98.000 J; b) 108.000 J; c) 10.000 J; 4,47 m/s]

30) Un muelle (k =2.000 N/m), colocado horizontalmente, se encuentra comprimido 10 cm. Con dos bloques (de 1 kg y 2 kg) en sus extremos. Cuando el muelle se suelta empuja a los dos bloques a moverse horizontalmente sin rozamiento. Determina la velocidad de cada bloque cuando son expulsados. [3,65 m/s y -1,825 m/s]

31) Lanzamos un cuerpo de 1 kg por el aparato de "rizar el rizo", cuya pista circular tiene 20 cm de radio; suponemos que el cuerpo no se encuentra enganchado a la pista y que desliza sin rozamiento, calcula: a) la energía cinética y velocidad en el punto más alto (A) para que siga dando vueltas; b) la velocidad en el punto medio (B) para que dé vueltas; c) la velocidad en el punto más bajo (C) para que dé vueltas; d) la fuerza que la pista ejerce sobre el cuerpo en los tres casos anteriores. [a) $v_A = 1,4$ m/s y $E_{c(A)} = 0,98$ J; b) $v_B = 2,425$ m/s; c) $v_C = 3,13$ m/s; d) 0 N en A; 29,4 N en B; 58,8 N en C]

32) Un cuerpo de 1 kg se halla colgado de un hilo de 1 m de longitud. Lanzamos horizontalmente un proyectil de 20 g que realiza un choque frontal con el cuerpo de 1 kg, quedando empotrado en él, Calcula la mínima velocidad del proyectil para que, realizado el choque, ambas masas describan una circunferencia completa en el plano vertical. [357 m/s]

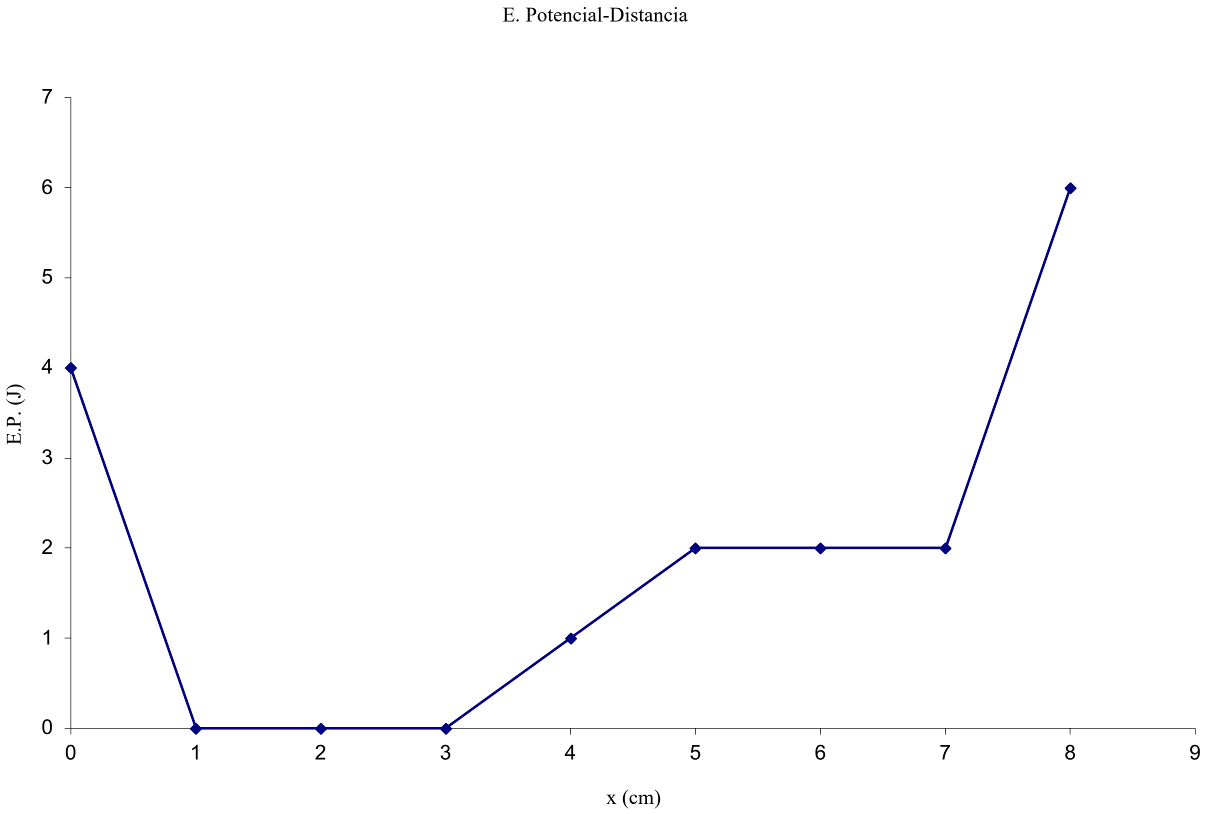
33) Un proyectil de masa m se introduce en un bloque de madera de masa M que está unido a un resorte espiral de constante elástica k. Por el impacto se comprime el resorte una longitud x. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento entre el bloque y el suelo es μ, calcula en función de estos datos la velocidad de la bala antes del choque.

34) Un objeto (m = 0,1 kg) se encuentra acoplado con un muelle ($k_{elástica}$ = 1.000 N/m) y comprimido 10 cm. Se suelta y el objeto sube con rozamiento (μ = 0,20) por un plano inclinado, de 45º con la horizontal y altura 2 m, para proseguir por el plano horizontal (a 2 m de altura) y sometido al mismo rozamiento hasta que se para. Calcule: a) la energía del objeto antes de salir del muelle; b) la energía cinética del objeto al subir a lo alto del plano inclinado, así como la velocidad en ese instante; c) la distancia que recorre por el plano horizontal (a 2 m de altura) hasta que se para. [a) 5 J; b) 2,648 J; 7,277 m/s; c) 13,5 m]

35) Un objeto de masa 3 kg se encuentra sobre una mesa horizontal unido mediante una cuerda y una polea a otro objeto, de masa 2 kg, que está colgando a 1,5 m del suelo. Si el sistema está en reposo y se suelta calcula la velocidad con la que llega al suelo en los dos casos siguientes: a) si el objeto de 3 kg no tiene rozamiento; b) si tiene rozamiento de μ = 0,15. [a) 3,4 m/s; b) 3,4 m/s]

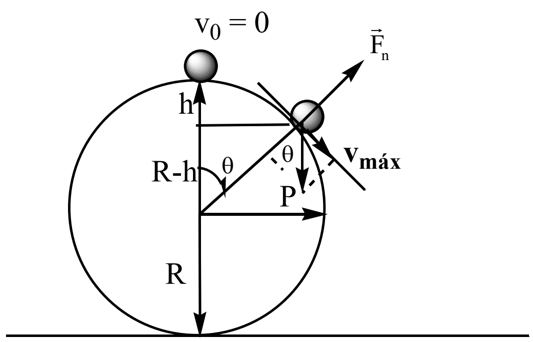
36) Un objeto de 10 kg se deja caer sin rozamiento por un plano inclinado, de 30º con la horizontal. Al caer una 4,0 m por el plano choca con un muelle (k = 25 N/m). Determina: a) la máxima compresión del muelle; b) la compresión del muelle cuando el objeto tiene su velocidad máxima. Dato: g = 9,8 m s^{-2}. [a) 1,46 m; b) 0,196 m]

37) En la gráfica se representa la Energía Potencial de una partícula, de masa 10 g, frente a la posición. Determina: a) el valor y dirección de la fuerza en cada posición; b) el trabajo que realiza la fuerza cuando la partícula cambia la posición desde x = 2 cm hasta x = 6 cm; c) la velocidad de la partícula en la posición x = 2 cm si sabemos que en la posición x = 6 cm la velocidad que posee es de 10 m/s. [a) $F_{0\to1} = 400\ N$; $F_{1\to3} = 0\ N$; $F_{3\to5} = -100\ N$; $F_{5\to7} = 0\ N$; $F_{7\to8} = -400\ N$; b) -2 J; c) 22,36 m/s]



38) Un objeto de masa 10 kg, está en la rampa de un plano inclinado de 20º con la horizontal, siendo el coeficiente de rozamiento de $\mu = 0,20$. Determina: a) la fuerza mínima que hay que aplicarle para que suba por la rampa; b) el trabajo realizado para que suba 10 m por la rampa; c) la fuerza y el trabajo realizado por ella si subimos el objeto hasta la misma altura pero siguiendo una trayectoria vertical. [a) 51,9 N; b) 519 J; c) 98 N; 335,2 J]

39) Un objeto se encuentra en la parte superior de la esfera. Se deja caer, sin rozamiento, por la esfera describiendo un arco de circunferencia, hasta que deja de estar en contacto con la esfera y cae libremente con una velocidad $v_{máx}$. Aplicando el principio de conservación de la energía determine una expresión de la velocidad del objeto cuando está cayendo, en función del ángulo barrido desde la parte superior. Aplicando la segunda ley de la dinámica determine el ángulo total barrido $\theta_{máx}$ en la caída hasta que deje de estar en contacto con la esfera, así como la velocidad $v_{máx}$ que posee en ese instante. [a) $v^2 = 2gR(1-\cos\theta)$; b) $\theta_{máx} = 48,2º$; $v_{máx} = 2,556$ m/s]



40) Un cuerpo de 2 kg cae sobre un resorte elástico de constante k = 4.000 N/m, vertical y sujeto al suelo. La altura a la que se suelta el cuerpo, medida sobre el extremo superior del resorte, es de 2 m. a) Explique los cambios energéticos durante la caída y la compresión del resorte. b) Determine la deformación máxima del resorte. Dato: $g = 9{,}8\ m/s^2$.

41) Un bloque de 0,5 kg está colocado sobre el extremo superior de un resorte vertical que está comprimido 10 cm y, al liberar el resorte, el bloque sale despedido hacia arriba verticalmente. La constante elástica del resorte es 200 N/m. a) Explique los cambios energéticos que tienen lugar desde que se libera el resorte hasta que el cuerpo cae y calcule la máxima altura que alcanza el bloque. b) ¿Con qué velocidad llegará el bloque al extremo del resorte en su caída?. Dato: $g = 9{,}8\ m/s^2$.

42) Sobre un plano inclinado que forma un ángulo de 30º con la horizontal se encuentra un bloque de 0,5 kg adosado al extremo superior de un resorte, de constante elástica 200 N/m, paralelo al plano y comprimido 10 cm. Al liberar el resorte, el bloque asciende por el plano hasta detenerse y, posteriormente, desciende. El coeficiente de rozamiento es 0,1. a) Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre el bloque cuando asciende por el plano y calcule la aceleración del bloque. b) Determine la velocidad con la que el bloque es lanzado hacia arriba al liberarse el resorte y la distancia que recorre el bloque por el plano hasta detenerse. Dato: $g = 9{,}8\ m/s^2$.

43) Un bloque de 0,2 kg está apoyado sobre el extremo superior de un resorte vertical, de constante 500 N/m, comprimido 20 cm. Al liberar el resorte, el bloque sale lanzado hacia arriba. a) Explique las transformaciones energéticas a lo largo de la trayectoria del bloque y calcule la altura máxima que alcanza. b) ¿Qué altura alcanzaría el bloque si la experiencia se realizara en la superficie de la Luna?. $g_T = 9{,}8\ m/s^2$; $M_T = 102 \cdot M_L$; $R_T = 4 \cdot R_L$

44) Un bloque de 1 kg desliza con velocidad constante por una superficie horizontal y choca contra el extremo de un muelle horizontal, de constante elástica 200 N/m, comprimiéndolo. a) ¿Cuál ha de ser la velocidad del bloque para comprimir el muelle 40 cm? b) Explique cualitativamente cómo variarían las energías cinética y potencial elástica del sistema bloque - muelle, en presencia de rozamiento. Dato: $g = 9{,}8\ m/s^2$.

45). Un bloque de 3 kg, situado sobre un plano horizontal, está comprimiendo 30 cm un resorte de constante k = 1.000 N/m. Al liberar el resorte el bloque sale disparado y, tras recorrer cierta distancia sobre el plano horizontal, asciende por un plano inclinado de 30º. Suponiendo despreciable el rozamiento del bloque con los planos: a) Determine la altura a la que llegará el cuerpo. b) Razone cuándo será máxima la energía cinética y calcule su valor. Dato: $g = 9{,}8\ m/s^2$.

46) Un bloque de 2 kg se encuentra sobre un plano horizontal, sujeto al extremo de un resorte de constante elástica k = 150 N/m, comprimido 20 cm. Se libera el resorte de forma que el cuerpo desliza sobre el plano, adosado al extremo del resorte hasta que éste alcanza la longitud de equilibrio, y luego continúa moviéndose por el plano. El coeficiente de rozamiento es de 0,2. a) Explique las transformaciones energéticas que tienen lugar a lo largo del movimiento del bloque y calcule su velocidad cuando pasa por la posición de equilibrio del resorte. b) Determine la distancia recorrida por el bloque hasta detenerse. Dato: $g = 9{,}8\ m/s^2$.

46) Un cuerpo de 0,5 kg se lanza hacia arriba por un plano inclinado, que forma 30º con la horizontal, con una velocidad inicial de 5 m/s. El coeficiente de rozamiento es 0,2. a) Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, cuando sube y cuando baja por el plano, y calcule la altura máxima alcanzada por el cuerpo. b) Determine la velocidad con la que el cuerpo vuelve al punto de partida. Dato: $g = 9{,}8\ m/s^2$.

47). Un bloque de 2 kg desliza con velocidad constante por una superficie horizontal sin rozamiento y choca contra el extremo de un muelle horizontal, de constante elástica 120 N/m, comprimiéndolo. a) ¿Cuál ha de ser la velocidad del bloque para comprimir el muelle 30 cm? b) Explique las transformaciones energéticas que tienen lugar considerando la existencia de rozamiento.

48) Un bloque de 0,5 kg se encuentra sobre una superficie horizontal sin rozamiento, sujeto al extremo de un resorte de constante elástica k = 200 N/m. Se tira del bloque hasta alargar el resorte 10 cm y se suelta. a) Escriba la ecuación de movimiento del bloque y calcule su energía mecánica. b) Explique cualitativamente las transformaciones energéticas durante el movimiento del bloque si existiera rozamiento con la superficie.

49) Por un plano inclinado que forma un ángulo de 30º con la horizontal se lanza hacia arriba un bloque de 10 kg con una velocidad inicial de 5 m/s. Tras su ascenso por el plano inclinado, el bloque desciende y regresa al punto de partida con una cierta velocidad. El coeficiente de rozamiento entre plano y bloque es 0,1. a) Dibuje en dos esquemas distintos las fuerzas que actúan sobre el bloque durante el ascenso y durante el descenso e indique sus respectivos valores. Razone si se verifica el principio de conservación de la energía en este proceso. b) Calcule el trabajo de la fuerza de rozamiento en el ascenso y en el descenso del bloque. Comente el signo del resultado obtenido. Dato: g = 9,8 m/s^2.

50) Un bloque de 8 kg desliza por una superficie horizontal sin rozamiento con una velocidad de 10 m/s e incide sobre el extremo libre de un resorte, de masa despreciable y constante elástica k = 400 N/m, colocado horizontalmente. a) Analice las transformaciones de energía que tienen lugar desde un instante anterior al contacto del bloque con el resorte hasta que éste, tras comprimirse, recupera la longitud inicial. b) Calcule la compresión máxima del resorte. ¿Qué efecto tendría la existencia de rozamiento entre el bloque y la superficie?

51) Un bloque de 2 kg se lanza hacia arriba por una rampa rugosa (μ = 0,2), que forma un ángulo de 30º con la horizontal, con una velocidad de 6 m/s. Tras su ascenso por la rampa, el bloque desciende y llega al punto de partida con una velocidad de 4,2 m/s. a) Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre el bloque cuando asciende por la rampa y, en otro esquema, las que actúan cuando desciende e indique el valor de cada fuerza. b) Calcule el trabajo de la fuerza de rozamiento en el ascenso del bloque y comente el signo del resultado obtenido. Dato: g = 9,8 m/s^2.

52) Un bloque de 5 kg se encuentra inicialmente en reposo en la parte superior de un plano inclinado de 10 m de longitud, que presenta un coeficiente de rozamiento μ = 0,2 (ignore la diferencia entre el coeficiente de rozamiento estático y el dinámico). a) Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre el bloque durante el descenso por el plano y calcule el ángulo mínimo de inclinación del plano para que el bloque pueda deslizarse. b) Analice las transformaciones energéticas durante el descenso del bloque y calcule su velocidad al llegar al suelo suponiendo que el ángulo de inclinación del plano es de 30º. Dato: g = 9,8 m/s^2.

Preguntas de teoría de Trabajo y Energía

1) a) Energía potencial asociada a una fuerza conservativa. b) Una partícula se desplaza bajo la acción de una fuerza conservativa. ¿Aumenta o disminuye su energía potencial? ¿Y su energía cinética? Razone las respuestas.

2) a) ¿Qué trabajo se realiza al sostener un cuerpo durante un tiempo t? b) ¿Qué trabajo realiza la fuerza peso de un cuerpo si éste se desplaza una distancia d por una superficie horizontal? Razone las respuestas.

3) Comente las siguientes afirmaciones: a) Un móvil mantiene constante su energía cinética mientras actúa sobre él: i) una fuerza; ii) varias fuerzas. b) Un móvil aumenta su energía potencial mientras actúa sobre él una fuerza.

4) Un automóvil arranca sobre una carretera recta y horizontal, alcanza una cierta velocidad que mantiene constante durante un cierto tiempo y, finalmente, disminuye su velocidad hasta detenerse. a) Explique los cambios de energía que tienen lugar a lo largo del recorrido. b) El automóvil circula después por un tramo pendiente hacia abajo con el freno accionado y mantiene constante su velocidad. Razone los cambios energéticos que se producen.

5) Explique y razone la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones: a) El trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan sobre una partícula cuando se traslada desde un punto hasta otro es igual a la variación de su energía cinética. b) El trabajo realizado por todas las fuerzas conservativas que actúan sobre una partícula cuando se traslada desde un punto hasta otro es menor que la variación de su energía potencial.

6) Conteste razonadamente a las siguientes preguntas: a) Si la energía mecánica de una partícula permanece constante, ¿puede asegurarse que todas las fuerzas que actúan sobre la partícula son conservativas? b) Si la energía potencial de una partícula disminuye, ¿tiene que aumentar su energía cinética?

7) Sobre una partícula sólo actúan fuerzas conservativas. a) ¿Se mantiene constante su energía mecánica? Razone la respuesta. b) Si sobre la partícula actúan además fuerzas de rozamiento, ¿cómo afectarían a la energía mecánica?

8) a) ¿Qué se entiende por fuerza conservativa? Explique la relación entre fuerza y energía potencial. b) Sobre un cuerpo actúa una fuerza conservativa. ¿Cómo varía su energía potencial al desplazarse en la dirección y sentido de la fuerza? ¿Qué mide la variación de energía potencial del cuerpo al desplazarse desde un punto A hasta otro B? Razone las respuestas.

9) a) ¿Por qué la fuerza ejercida por un muelle que cumple la ley de Hooke se dice que es conservativa? b) ¿Por qué la fuerza de rozamiento no es conservativa?

10) Una partícula parte de un punto sobre un plano inclinado con una cierta velocidad y asciende, deslizándose por dicho plano inclinado sin rozamiento, hasta que se detiene y vuelve a descender hasta la posición de partida. a) Explique las variaciones de energía cinética, de energía potencial y de energía mecánica de la partícula a lo largo del desplazamiento. b) Repita el apartado anterior suponiendo que hay rozamiento.

11) a) Defina energía potencial a partir del concepto de fuerza conservativa. b) Explique por qué, en lugar de energía potencial en un punto, deberíamos hablar de variación de energía potencial entre dos puntos. Ilustre su respuesta con algunos ejemplos.

12) a) Explique qué son fuerzas conservativas. Ponga un ejemplo de fuerza conservativa y otro de fuerza que no lo sea. b) ¿Se puede afirmar que el trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es siempre igual a la variación de su energía cinética? Razone la respuesta y apóyese con algún ejemplo.

12) a) ¿Puede ser negativa la energía cinética de una partícula? ¿Y la energía potencial? En caso afirmativo explique el significado físico del signo. b) ¿Se cumple siempre que el aumento de la energía cinética es igual a la disminución de la energía potencial? Justifique la respuesta.

13) Conteste razonadamente a las siguientes preguntas: a) ¿Puede asociarse una energía potencial a una fuerza de rozamiento? b) ¿Qué tiene más sentido físico, la energía potencial en un punto o la variación de energía potencial entre dos puntos?

14) a) Principio de conservación de la energía mecánica. b) Desde el borde de un acantilado de altura h se deja caer libremente un cuerpo. ¿Cómo cambian sus energías cinética y potencial? Justifique la respuesta.

15) a) Explique la relación entre fuerza conservativa y variación de energía potencial. b) Un cuerpo cae libremente sobre la superficie terrestre. ¿Depende la aceleración de caída de las propiedades de dicho cuerpo? Razone la respuesta.

16) a) Conservación de la energía mecánica. b) Un cuerpo desliza hacia arriba por un plano inclinado que forma un ángulo α con la horizontal. Razone qué trabajo realiza la fuerza peso del cuerpo al desplazarse éste una distancia d sobre el plano.

17) a) Explique el principio de conservación de la energía mecánica y en qué condiciones se cumple. b) Un automóvil desciende por un tramo pendiente con el freno accionado y mantiene constante su velocidad. Razone los cambios energéticos que se producen.

18) a) Explique qué son fuerzas conservativas. Ponga un ejemplo de fuerza conservativa y otro de fuerza que no lo sea. b) ¿Se puede afirmar que el trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es siempre igual a la variación de su energía cinética? ¿Es igual a la variación de su energía potencial? Razone las respuestas.

19) a) Conservación de la energía mecánica. b) Se lanza hacia arriba por un plano inclinado un bloque con una velocidad v_0. Razone cómo varían su energía cinética, su energía potencial y su energía mecánica cuando el cuerpo sube y, después, baja hasta la posición de partida. Considere los casos: i) que no haya rozamiento; ii) que lo haya.

20) a) Explique el significado de "fuerza conservativa" y "energía potencial" y la relación entre ambos. b) Si sobre una partícula actúan tres fuerzas conservativas de distinta naturaleza y una no conservativa, ¿cuántos términos de energía potencial hay en la ecuación de la energía mecánica de esa partícula? ¿Cómo aparece en dicha ecuación la contribución de la fuerza no conservativa?

21) a) Explique qué es la energía mecánica de una partícula y en qué casos se conserva. b) Un objeto se lanza hacia arriba por un plano inclinado con rozamiento. Explique cómo cambian las energías cinética, potencial y mecánica del objeto durante el ascenso.

22) a) Energía potencial asociada a una fuerza conservativa. b) Si la energía mecánica de una partícula es constante, ¿debe ser necesariamente nula la fuerza resultante que actúa sobre la misma? Razone la respuesta.

Problemas de «Vibraciones»

1) Una partícula sobre un muelle oscila con un período de 0,80 s y una amplitud de 0,10 m. Al tiempo $t = 0$, está a 5 cm de la posición de equilibrio y moviéndose hacia $-A$. Determina: a) la ecuación del movimiento oscilatorio; b) la posición y la dirección del movimiento en el instante de tiempo $t = 2{,}0$ s. [a) $x = 0{,}10\cdot\cos(2{,}5\pi t + \tfrac{2}{3}\pi)$; b) $x = +0{,}05$ m; $v = +0{,}68$ m/s]

2) Una partícula, de masa 0,500 kg, oscila sobre un muelle y se observa que se encuentra en el punto $x = 0{,}15$ m en el tiempo inicial $t = 0$. Alcanza el desplazamiento máximo de 0,25 m en el tiempo $t = 0{,}300$ s. Determina: a) la ecuación del movimiento y dibuja la gráfica posición-tiempo; b) el instante, durante el primer ciclo, en que la masa pasa por el punto $x = 0{,}20$ m. [a) $x = 0{,}25\cdot\cos(\pi t - 0{,}3\pi)$; b) 0,1·s; 0,5·s]

3) Una partícula de 0,5 kg que describe un movimiento armónico simple de frecuencia $\frac{5}{\pi}$ Hz, tiene inicialmente una energía cinética de 0,2 J y una energía potencial de 0,8 J. Calcule: a) la posición y velocidad inicial, así como la amplitud de la oscilación y la velocidad máxima. b) Haga un análisis de las transformaciones de energía que tienen lugar en un ciclo completo. c) ¿Cuál sería el desplazamiento en el instante en que las energías cinética y potencial son iguales?. [a) $x = 0{,}179$ m; $v = -0{,}892$ m/s; $A = 0{,}20$ m; 2,0 m/s; c) $x = 0{,}1414$ m]

4) Un cuerpo realiza un movimiento vibratorio armónico simple. a) Escriba la ecuación del movimiento si la aceleración máxima es $5\cdot\pi^2$ cm/s^2, el período de las oscilaciones 2 s y la elongación del cuerpo al iniciarse el movimiento 2,5 cm y siendo la velocidad negativa. b) Represente gráficamente la elongación y la velocidad en función del tiempo y comente la gráfica. [a) $x = 5\cdot\cos(\pi\cdot t + \pi/3)$ cm; b) $v = -5\cdot\pi\cdot\text{sen}(\pi\cdot t + \pi/3)$ cm/s]

5) Una masa de 200 g cuelga de un muelle colocado verticalmente de k = 10 N/m. La masa se estira hacia abajo hasta un punto donde el muelle está a 30 cm de su longitud sin estirar y sin la masa. En esa posición estirada se suelta. Determina: a) la distancia de la posición de equilibrio; b) la amplitud de las oscilaciones; c) la posición de la masa a los 3 s y respecto a la posición de equilibrio; d) la velocidad de la masa a los 3s. [a) Δl = 19,6 cm; b) A = 10,4 cm; c) y = 7,4 cm por encima de la posición de equilibrio; b) v = 51,6 cm/s]

6) Un objeto de 0,2 kg, unido al extremo de un resorte, efectúa oscilaciones armónicas de 0,1 π s de período y su energía cinética máxima es de 0,5 J. a) Escriba la ecuación de movimiento del objeto y determine la constante elástica del resorte. b) Explique cómo cambiarían las características del movimiento si: i) se sustituye el resorte por otro de constante elástica doble; ii) se sustituye el objeto por otro de masa doble. [a) k = 80 N/m; x = 0,1118·cos (20·t); b)]

7) a) ¿Qué características debe tener una fuerza para que al actuar sobre un cuerpo le produzca un movimiento armónico simple?. b) Represente gráficamente el movimiento armónico simple de una partícula dado por: $y = 5 \cos (10 t + \pi/2)$ (S I) y otro movimiento armónico que tenga una amplitud doble y una frecuencia mitad que el anterior.

8) Una partícula de 50 g vibra a lo largo del eje X, alejándose como máximo 10 cm a un lado y a otro de la posición de equilibrio (x = 0). El estudio de su movimiento ha revelado que existe una relación sencilla entre la aceleración y la posición que ocupa en cada instante: $a = -16 \cdot \pi^2 x$. a) Escriba las expresiones de la posición y de la velocidad de la partícula en función del tiempo, sabiendo que este último se comenzó a medir cuando la partícula pasaba por la posición x = 10 cm. b) Calcule las energías cinética y potencial de la partícula cuando se encuentra a 5 cm de la posición de equilibrio. [a) $x = 0{,}10 \cdot \cos (4\pi t)$; $v = -0{,}4\pi \cdot \text{sen} (4\pi t)$; b) E_c = 0,0296 J; E_p = 0,00987 J]

9) Una partícula de 0,2 kg describe un movimiento armónico simple a lo largo del eje x, de frecuencia 20 Hz. En el instante inicial la partícula pasa por el origen, moviéndose hacia la derecha, y su velocidad es máxima. En otro instante de la oscilación la energía cinética es 0,2 J y la energía potencial es 0,6 J. a) Escriba la ecuación de movimiento de la partícula y calcule su aceleración máxima. b) Explique, con ayuda de una gráfica, los cambios de energía cinética y de energía potencial durante una oscilación. [a) $x = 0{,}0005 \cdot \cos (40\pi t - ½\pi)$; $a_{máx} = 8$ m/s^2]

10) Un movimiento armónico simple viene descrito por la ecuación $x(t) = A \cdot \text{sen} (\omega t + \delta)$. a) Escriba la velocidad y la aceleración de la partícula en función del tiempo y explique cómo varían a lo largo de una oscilación. b) Deduzca las expresiones de las energías cinética y potencial en función de la posición y explique sus cambios a lo largo de la oscilación.

11) Un cuerpo realiza un movimiento vibratorio armónico simple. a) Escriba la ecuación del movimiento si la aceleración máxima es $10 \cdot \pi^2$ cm/s^2, el período de las oscilaciones T = 1·s y la elongación del cuerpo al iniciarse el movimiento 2 cm y la velocidad positiva. b) Represente gráficamente la elongación y la velocidad en función del tiempo y comente la gráfica. [a) $x = 2{,}5 \cdot \cos (2\pi \cdot t – 0{,}20\pi)$ cm; b) $v = -5 \cdot \pi \cdot \text{sen} (2\pi \cdot t – 0{,}20\pi)$ cm/s]

12) a) Describa el movimiento armónico simple y comente sus características cinemáticas y dinámicas. b) Una masa oscila verticalmente suspendida de un muelle. Describa los tipos de energía que intervienen y sus respectivas transformaciones.

13) Un cuerpo, situado sobre una superficie horizontal lisa y unido al extremo de un resorte, efectúa un movimiento armónico simple y los valores máximos de su velocidad y aceleración son 0,6 m/s y 7,2 m/s^2 respectivamente. a) Determine el período y la amplitud del movimiento. b) Razone cómo variaría la energía mecánica del cuerpo si se duplicara: i) la frecuencia; ii) la aceleración máxima. [a) T = 0,5236 s; A = 0,05 m; b) i) $E' = 4 \cdot E_t$]

14) Un bloque de 0,5 kg cuelga del extremo inferior de un resorte de constante elástica k = 72 N/m. Al desplazar el bloque verticalmente hacia abajo de su posición de equilibrio comienza a oscilar, pasando por el punto de equilibrio con una velocidad de 6 m/s. a) Razone los cambios energéticos que se producen en el proceso. b) Determine la amplitud y la frecuencia de la oscilación. [a) La E_c oscila entre 0 y 9 J; la E_p oscila entre 2,45 J y 11,45 J; la E_t = 11,45 J; b) A = 0,5 m; ω = 12 rad/s]

Preguntas modelos de dinámica

20) Un ciclista va a realizar un giro llamado el “rizo de la muerte” en el que realiza un giro por una carretera colocada perpendicularmente. Si el radio del rizo es de 2,7 m, ¿cuál es la velocidad menor que puede tener el ciclista para que pueda permanecer en contacto con el rizo?. [5,14 m/s]

21) Un coche viaja a una velocidad constante de 20 m/s por una carretera circular llana de radio 190 m. ¿Cuál es el valor mínimo del coeficiente μ_s estático entre los neumáticos del coche y la carretera para prevenir que el coche se deslice?. [0,21]

22) En una carretera en la que no hay fricción, por ejemplo, sobre hielo, un coche se mueve con una velocidad constante de 20 m/s alrededor de una curva con peralte. Si el radio es de 190 m ¿cuál es el ángulo que deberá tener el peralte si no hay rozamiento?. [12º]

24) a) Calcula la aceleración a_A con la que cae un objeto A, de masa $m_A = 5$ kg, que está en la rampa de un plano inclinado de 20º con la horizontal, siendo el coeficiente de rozamiento de $\mu_A = 0{,}20$. b) Calcula la aceleración a_B con la que cae por el plano inclinado si se pone un segundo objeto B, de masa $m_B = 10$ kg, y de coeficiente de rozamiento $\mu_B = 0{,}15$. c) Calcula la aceleración con la que cae el objeto A si está por encima y pegado el objeto B. d) Determina el tiempo que tarda en caer una distancia de 2 m el objeto A si parte del reposo. [a) $a_A = 1{,}51$ m/s^2; b) $a_B = 1{,}97$ m/s^2; c) $a = 1{,}81$ m/s^2; d) 1,50 s]

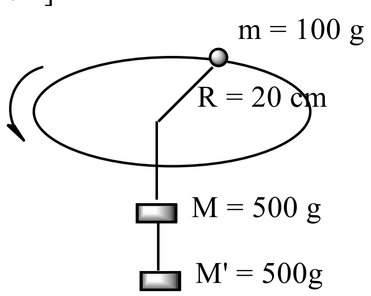
33) Un proyectil explota en el punto más alto de su trayectoria resultando dos fragmentos A y B. El fragmento A, de masa 2 kg, sale horizontalmente con una velocidad doble a la que tenía el proyectil en el momento de la explosión (v_{CM}). Determine la velocidad de salida del fragmento B e indique cuál de los dos fragmentos alcanza antes el suelo. Haz un esquema de las trayectorias. (Resolver el problema para valores de 1, 2 y 4 kg de la masa del fragmento B). [$v_A = 2v_{CM}$; $v_{B(1)} = -v_{CM}$; $v_{B(2)} = 0$; $v_{B(4)} = ½\cdot v_{CM}$; $t_A = t_B$]

35) Una cañón, de masa 1.300 kg, lanza una bala de masa 72 kg en una dirección horizontal con una velocidad relativa al cañón de 55 m/s. ¿Cuál es la velocidad de retroceso del cañón respecto de la Tierra y la velocidad de la bala respecto de la Tierra?.[-2,9 y 52 m/s]

36) Una bala de masa $m_b = 3{,}50$ g se dispara horizontalmente. La bala atraviesa un objeto de masa $m_1 = 1{,}20$ kg, que está en reposo, y luego se incrusta en otro objeto de masa $m_2 = 1{,}80$ kg, que también está en reposo. El primer objeto adquiere una velocidad de $v'_1 = 0{,}630$ m/s y el segundo, con la bala en su interior, adquiere una velocidad de $v''_2 = 1{,}40$ m/s. Calcula: a) la velocidad de la bala inmediatamente después de salir del primer bloque; b) la velocidad inicial de la bala. [$v'_b = 721$ m/s; b) $v_b = 937$ m/s]

37) Dos bolas, de masas $m_1 = 1$ kg y $m_2 = 2$ kg, impactan mediante una colisión inelástica y oblicua a la línea de impacto. Si consideramos la línea de impacto el eje X las velocidades son: $\vec{v}_1 = 3\frac{m}{s}\cdot\cos 30^\circ\,\vec{i} + 3\frac{m}{s}\cdot\operatorname{sen} 30^\circ\,\vec{j}$, para la primera y $\vec{v}_2 = -1\frac{m}{s}\cdot\cos 45^\circ\,\vec{i} - 1\frac{m}{s}\cdot\operatorname{sen} 45^\circ\,\vec{j}$, para la segunda. El coeficiente de restitución vale $e = 0{,}75$. Determine las velocidades de las bolas después del impacto así como los ángulos que forman con la línea de impacto. [$v'_1 = 1{,}96$ m/s a 130º y $v'_2 = 1{,}41$ m/s a 329,1º]

48) Una masa de 100 g gira describiendo círculos de radio 20 cm sobre una mesa sin rozamiento. La cuerda que lo sujeta pasa a través de un hueco en el centro de la mesa y está unido a dos pesas de 500 g cada una. a) Calcule la velocidad que debe llevar la masa m girando para soportar a las dos pesas. b) Suponemos que se corta la cuerda que sujeta la masa M' y cae mientras la masa m sigue girando, cuál será la nueva velocidad de giro de m y su nuevo radio de giro. Dato: $g = 9{,}8$ m/s^2. [a) $v = 4{,}427$ m/s; b) $v' = 3{,}5138$ m/s; $R' = 25{,}2$ cm]



49) Desde el suelo se lanza un proyectil de 10 kg con una velocidad inicial de 100 m/s y formando un ángulo de 60º con la horizontal. En el punto más alto de su trayectoria explota en dos fragmentos A y B. El fragmento A, de 2 kg, sale horizontalmente con una velocidad triple a la que tenía el proyectil en el momento de la explosión. Determine: a) la velocidad de salida de los fragmentos después de la explosión; b) el alcance horizontal de cada fragmento desde el lugar de la explosión. Dato: $g = 9,8\ m/s^2$. [a) $v_{Ax} = 150$ m/s; $v_{Bx} = 25$ m/s; b) $t_{caer} = 8,837$ s; $\Delta x_A = 1.325,55$ m; $\Delta x_B = 220,925$ m]

1) Una partícula sobre un muelle oscila con un período de 0,80 s y una amplitud de 0,10 m. Al tiempo t = 0, está a 5 cm de la posición de equilibrio y moviéndose hacia –A. Determina: a) la ecuación del movimiento oscilatorio; b) la posición y la dirección del movimiento en el instante de tiempo t = 2,0 s. [a) $x = 0,10\cdot\cos(2,5\pi t + \frac{2}{3}\pi)$; b) $x = +0,05$ m; $v = +0,68$ m/s]

2) Una partícula, de masa 0,500 kg, oscila sobre un muelle y se observa que se encuentra en el punto x = 0,15 m en el tiempo inicial t = 0. Alcanza el desplazamiento máximo de 0,25 m en el tiempo t = 0,300 s. Determina: a) la ecuación del movimiento y dibuja la gráfica posición-tiempo; b) el instante, durante el primer ciclo, en que la masa pasa por el punto x = 0,20 m. [a) $x = 0,25\cdot\cos(\pi t - 0,3\pi)$; b) $0,1\cdot s$; $0,5\cdot s$]

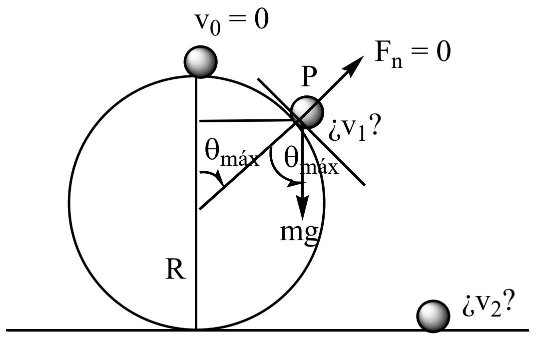
Preguntas modelo de trabajo y energía

10) Un bloque de 10 kg se lanza hacia arriba por un plano inclinado de 30º, con la horizontal, con una velocidad de 10 m/s. El bloque vuelve al punto de partida con una velocidad de 5 m/s. Calcula: a) el trabajo de rozamiento total, en subir y bajar; b) la longitud que recorre en subir; c) el coeficiente de rozamiento con el plano; d) la deformación máxima y final de un resorte de constante elástica 500 N/m, colocado en dicho punto de partida y con el que choca el bloque al volver. [a) -375 J; b) 6,38 m; c) $\mu = 0,346$; d) 0,7475 m y 0,0386 m]

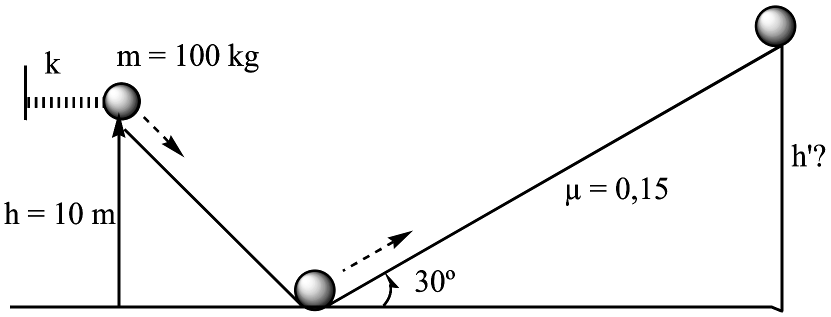
11) Una bola pequeña de metal es lanzada por un plano inclinado desde una altura sobre el suelo de 3,00 m. Al final del plano, siguiendo un camino curvado, es proyectado verticalmente hacia arriba hasta una altura de 4,00 m sobre el suelo. Si ignoramos la fricción y la resistencia del aire, encuentra la velocidad inicial de la bola. [4,43 m/s]

12) Un cohete de 3 kg es lanzado verticalmente hacia arriba con suficiente velocidad inicial para alcanzar una altura máxima de 100 m. Si la resistencia del aire realiza un trabajo de -800 J sobre el cohete, ¿qué altura alcanzaría el cohete sin resistencia del aire?. [127,5 m]

26) Un objeto, de masa 1 kg, se encuentra en reposo sobre una esfera de radio R = 3 m. El objeto se desliza, con velocidad inicial cero, sin rozamiento hasta que se separa de la esfera en el punto P, cuando $F_n = 0$, siendo el ángulo que forma con la vertical $\theta_{máx}$. Calcule: a) el valor del ángulo $\theta_{máx}$; b) la energía cinética de la masa en el punto P y la velocidad v_1 en ese punto; c) la energía cinética cuando choca con el suelo y la velocidad v_2. Dato: $g = 9,8\ m/s^2$. [a) $\theta_{máx} = 48,19º$; b) $E_c = 9,8$ J; $v_1 = 4,43$ m/s ; c) 58,8 J; $v_2 = 10,84$ m/s]



27) Un muelle (k = 80.000 N/m), colocado horizontalmente, se encuentra comprimido 50 cm con un objeto de 100 kg, y estando todo el sistema a 10 m de altura. Cuando se suelta el muelle el objeto cae, los 10 m de altura, por una rampa por la que no tiene rozamiento. Al llegar el objeto a la parte más baja de la rampa se encuentra que ha de subir por un plano inclinado, de 30º con la horizontal, pero cuya superficie ejerce un rozamiento de coeficiente dinámico 0,15. Determina hasta qué altura del plano inclinado subirá. Dato: $g = 9,8\ m/s^2$. [16 m]



Preguntas modelo de teoría de Trabajo y Energía

1) a) Energía potencial asociada a una fuerza conservativa. b) Una partícula se desplaza bajo la acción de una fuerza conservativa. ¿Aumenta o disminuye su energía potencial? ¿Y su energía cinética? Razone las respuestas.

2) a) ¿Qué trabajo se realiza al sostener un cuerpo durante un tiempo t? b) ¿Qué trabajo realiza la fuerza peso de un cuerpo si éste se desplaza una distancia d por una superficie horizontal? Razone las respuestas.

3) Comente las siguientes afirmaciones: a) Un móvil mantiene constante su energía cinética mientras actúa sobre él: i) una fuerza; ii) varias fuerzas. b) Un móvil aumenta su energía potencial mientras actúa sobre él una fuerza.

4) Un automóvil arranca sobre una carretera recta y horizontal, alcanza una cierta velocidad que mantiene constante durante un cierto tiempo y, finalmente, disminuye su velocidad hasta detenerse. a) Explique los cambios de energía que tienen lugar a lo largo del recorrido. b) El automóvil circula después por un tramo pendiente hacia abajo con el freno accionado y mantiene constante su velocidad. Razone los cambios energéticos que se producen.

5) Explique y razone la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones: a) El trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan sobre una partícula cuando se traslada desde un punto hasta otro es igual a la variación de su energía cinética. b) El trabajo realizado por todas las fuerzas conservativas que actúan sobre una partícula cuando se traslada desde un punto hasta otro es menor que la variación de su energía potencial.

6) Conteste razonadamente a las siguientes preguntas: a) Si la energía mecánica de una partícula permanece constante, ¿puede asegurarse que todas las fuerzas que actúan sobre la partícula son conservativas? b) Si la energía potencial de una partícula disminuye, ¿tiene que aumentar su energía cinética?

7) Sobre una partícula sólo actúan fuerzas conservativas. a) ¿Se mantiene constante su energía mecánica? Razone la respuesta. b) Si sobre la partícula actúan además fuerzas de rozamiento, ¿cómo afectarían a la energía mecánica?

8) a) ¿Qué se entiende por fuerza conservativa? Explique la relación entre fuerza y energía potencial. b) Sobre un cuerpo actúa una fuerza conservativa. ¿Cómo varía su energía potencial al desplazarse en la dirección y sentido de la fuerza? ¿Qué mide la variación de energía potencial del cuerpo al desplazarse desde un punto A hasta otro B? Razone las respuestas.

9) a) ¿Por qué la fuerza ejercida por un muelle que cumple la ley de Hooke se dice que es conservativa? b) ¿Por qué la fuerza de rozamiento no es conservativa?

10) Una partícula parte de un punto sobre un plano inclinado con una cierta velocidad y asciende, deslizándose por dicho plano inclinado sin rozamiento, hasta que se detiene y vuelve a descender hasta la posición de partida. a) Explique las variaciones de energía cinética, de energía potencial y de energía mecánica de la partícula a lo largo del desplazamiento. b) Repita el apartado anterior suponiendo que hay rozamiento.

11) a) Defina energía potencial a partir del concepto de fuerza conservativa. b) Explique por qué, en lugar de energía potencial en un punto, deberíamos hablar de variación de energía potencial entre dos puntos. Ilustre su respuesta con algunos ejemplos.

12) a) Explique qué son fuerzas conservativas. Ponga un ejemplo de fuerza conservativa y otro de fuerza que no lo sea. b) ¿Se puede afirmar que el trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es siempre igual a la variación de su energía cinética? Razone la respuesta y apóyese con algún ejemplo.

12) a) ¿Puede ser negativa la energía cinética de una partícula? ¿Y la energía potencial? En caso afirmativo explique el significado físico del signo. b) ¿Se cumple siempre que el aumento de la energía cinética es igual a la disminución de la energía potencial? Justifique la respuesta.

13) Conteste razonadamente a las siguientes preguntas: a) ¿Puede asociarse una energía potencial a una fuerza de rozamiento? b) ¿Qué tiene más sentido físico, la energía potencial en un punto o la variación de energía potencial entre dos puntos?
14) a) Principio de conservación de la energía mecánica. b) Desde el borde de un acantilado de altura h se deja caer libremente un cuerpo. ¿Cómo cambian sus energías cinética y potencial? Justifique la respuesta.
15) a) Explique la relación entre fuerza conservativa y variación de energía potencial. b) Un cuerpo cae libremente sobre la superficie terrestre. ¿Depende la aceleración de caída de las propiedades de dicho cuerpo? Razone la respuesta.
16) a) Conservación de la energía mecánica. b) Un cuerpo desliza hacia arriba por un plano inclinado que forma un ángulo α con la horizontal. Razone qué trabajo realiza la fuerza peso del cuerpo al desplazarse éste una distancia d sobre el plano.
17) a) Explique el principio de conservación de la energía mecánica y en qué condiciones se cumple. b) Un automóvil desciende por un tramo pendiente con el freno accionado y mantiene constante su velocidad. Razone los cambios energéticos que se producen.
18) a) Explique qué son fuerzas conservativas. Ponga un ejemplo de fuerza conservativa y otro de fuerza que no lo sea. b) ¿Se puede afirmar que el trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es siempre igual a la variación de su energía cinética? ¿Es igual a la variación de su energía potencial? Razone las respuestas.
19) a) Conservación de la energía mecánica. b) Se lanza hacia arriba por un plano inclinado un bloque con una velocidad v_0. Razone cómo varían su energía cinética, su energía potencial y su energía mecánica cuando el cuerpo sube y, después, baja hasta la posición de partida. Considere los casos: i) que no haya rozamiento; ii) que lo haya.
20) a) Explique el significado de "fuerza conservativa" y "energía potencial" y la relación entre ambos. b) Si sobre una partícula actúan tres fuerzas conservativas de distinta naturaleza y una no conservativa, ¿cuántos términos de energía potencial hay en la ecuación de la energía mecánica de esa partícula? ¿Cómo aparece en dicha ecuación la contribución de la fuerza no conservativa?
21) a) Explique qué es la energía mecánica de una partícula y en qué casos se conserva. b) Un objeto se lanza hacia arriba por un plano inclinado con rozamiento. Explique cómo cambian las energías cinética, potencial y mecánica del objeto durante el ascenso.
22) a) Energía potencial asociada a una fuerza conservativa. b) Si la energía mecánica de una partícula es constante, ¿debe ser necesariamente nula la fuerza resultante que actúa sobre la misma? Razone la respuesta.

Preguntas modelo de movimiento vibratorio armónico simple

10) Un movimiento armónico simple viene descrito por la ecuación $x(t) = A\cdot \text{sen}\,(\omega t + \delta)$. a) Escriba la velocidad y la aceleración de la partícula en función del tiempo y explique cómo varían a lo largo de una oscilación. b) Deduzca las expresiones de las energías cinética y potencial en función de la posición y explique sus cambios a lo largo de la oscilación.
11) Un cuerpo realiza un movimiento vibratorio armónico simple. a) Escriba la ecuación del movimiento si la aceleración máxima es $10\cdot\pi^2$ cm/s^2, el período de las oscilaciones T = 1·s y la elongación del cuerpo al iniciarse el movimiento 2 cm y la velocidad positiva. b) Represente gráficamente la elongación y la velocidad en función del tiempo y comente la gráfica. [a) $x = 2{,}5\cdot\cos\,(2\pi\cdot t - 0{,}20\pi)$ cm; b) $v = -5\cdot\pi\cdot\text{sen}\,(2\pi\cdot t - 0{,}20\pi)$ cm/s]