Problemas resueltos de «Dinámica»

1) El vector de posición, de una partícula en movimiento, viene dado por: $\vec{r} = t^2\,\vec{i} + 2t\,\vec{j}\quad(\mathrm{SI})$. Calcule a los 3 s del movimiento: a) la velocidad de la partícula, así como el módulo y el vector unitario de la misma; b) la aceleración y su módulo; c) la aceleración tangencial y su módulo; d) la aceleración normal y su módulo; e) la ecuación de la trayectoria. [a) $\vec{v} = 6\,\frac{m}{s}\,\vec{i} + 2\,\frac{m}{s}\,\vec{j}$; $|\vec{v}| = \sqrt{40}\,\frac{m}{s}$; $\vec{u}_t = \frac{6}{\sqrt{40}}\,\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{40}}\,\vec{j}$; b) $\vec{a} = 2\,\frac{m}{s^2}\,\vec{i}$; $|\vec{a}| = 2\,\frac{m}{s^2}$; c) $\vec{a}_t = 1{,}8\,\frac{m}{s^2}\,\vec{i} + 0{,}6\,\frac{m}{s^2}\,\vec{j}$; $|\vec{a}_t| = 1{,}897\,\frac{m}{s^2}$; d) $|\vec{a}_n| = 0{,}632\,\frac{m}{s^2}$; $\vec{a}_n = 0{,}2\,\frac{m}{s^2}\,\vec{i} - 0{,}6\,\frac{m}{s^2}\,\vec{j}$; e) $y = 2x^{1/2}$].

Respuesta:

La ecuación de la trayectoria se obtiene eliminando t en las componentes de la posición $x = t^2$; $y = 2t$; siendo $y = 2x^{1/2}$.

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{v} = |\vec{v}|\,\vec{u}_t = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(t^2\,\vec{i} + 2t\,\vec{j}\right) = 2t\,\vec{i} + 2\,\vec{j} \\ |\vec{v}| = \sqrt{(2t)^2 + (2)^2} = \sqrt{4t^2+4} \end{array}\right\} \quad \vec{u}_t = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{2t\,\vec{i} + 2\,\vec{j}}{\sqrt{4t^2+4}} = \frac{2t}{\sqrt{4t^2+4}}\,\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{4t^2+4}}\,\vec{j}$$

$$\vec{v}_{(t=3s)} = 6\,\tfrac{m}{s}\,\vec{i} + 2\,\tfrac{m}{s}\,\vec{j} \quad \left\{ |\vec{v}|_{(t=3s)} = \sqrt{\left(6\,\tfrac{m}{s}\right)^2 + \left(2\,\tfrac{m}{s}\right)^2} = \sqrt{40}\,\tfrac{m}{s} \right.$$

$$\vec{u}_{t(t=3s)} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{6\,\frac{m}{s}\,\vec{i} + 2\,\frac{m}{s}\,\vec{j}}{\sqrt{40}\,\frac{m}{s}} = \frac{6}{\sqrt{40}}\,\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{40}}\,\vec{j}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2t\,\vec{i} + 2\,\vec{j}\right) = 2\,\tfrac{m}{s^2}\,\vec{i} \quad \left\{ |\vec{a}| = 2\,\tfrac{m}{s^2} \right.$$

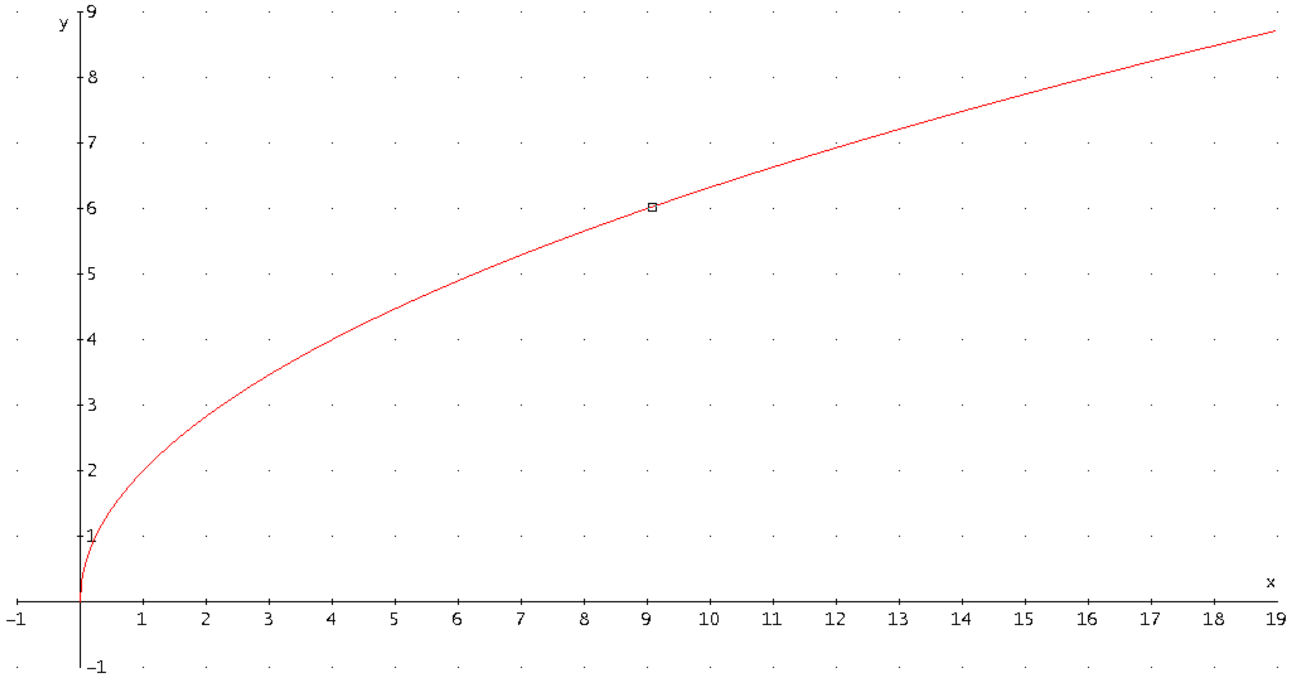
$$\vec{a}_t = |\vec{a}_t|\,\vec{u}_t \left\{\begin{array}{l} |\vec{a}_t| = \dfrac{d|\vec{v}|}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\sqrt{4t^2+4}\right) = \dfrac{8t}{2\sqrt{4t^2+4}} \\ |\vec{a}_t| = \vec{a}\cdot\vec{u}_t = 2\,\vec{i}\cdot\left(\dfrac{2t}{\sqrt{4t^2+4}}\,\vec{i} + \dfrac{2}{\sqrt{4t^2+4}}\,\vec{j}\right) = \dfrac{4t}{\sqrt{4t^2+4}} \end{array}\right\} \left\{ |\vec{a}_t|_{(t=3s)} = \frac{12}{\sqrt{40}}\,\tfrac{m}{s^2} = 1{,}897\,\tfrac{m}{s^2} \right.$$

$$\vec{a}_{t(t=3s)} = |\vec{a}_t|_{(t=3s)}\,\vec{u}_{t(t=3s)} = \frac{12}{\sqrt{40}}\,\tfrac{m}{s^2}\cdot\left(\frac{6}{\sqrt{40}}\,\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{40}}\,\vec{j}\right) = \frac{72}{40}\,\tfrac{m}{s^2}\,\vec{i} + \frac{24}{40}\,\tfrac{m}{s^2}\,\vec{j} = 1{,}8\,\tfrac{m}{s^2}\,\vec{i} + 0{,}6\,\tfrac{m}{s^2}\,\vec{j}$$

$$|\vec{a}_t|_{(t=3s)} = \sqrt{\left(1{,}8\,\tfrac{m}{s^2}\right)^2 + \left(0{,}6\,\tfrac{m}{s^2}\right)^2} = 1{,}897\,\tfrac{m}{s^2}$$

$$\vec{a}_{n(t=3s)} = \vec{a}_{(t=3s)} - \vec{a}_{t(t=3s)} = 2\,\vec{i} - \left(1{,}8\,\tfrac{m}{s^2}\,\vec{i} + 0{,}6\,\tfrac{m}{s^2}\,\vec{j}\right) = 0{,}2\,\tfrac{m}{s^2}\,\vec{i} - 0{,}6\,\tfrac{m}{s^2}\,\vec{j}$$

$$|\vec{a}_n|_{(t=3s)} = \sqrt{\left(0{,}2\,\tfrac{m}{s^2}\right)^2 + \left(-0{,}6\,\tfrac{m}{s^2}\right)^2} = 0{,}632\,\tfrac{m}{s^2}$$



2) Desde el suelo se dispara un proyectil con una velocidad de 80 m/s formando un ángulo de 45º con la horizontal. Calcula: a) tiempo de vuelo; b) alcance máximo; c) vector de posición cuando lleva la mitad de tiempo de vuelo; d) ecuación de la trayectoria. [a) 11,5 s; b) 653 m; c) r_x = 326,5 m y r_y = 163,1 m; d) y = x - 0,00153·x^2]

Respuesta:

$$\begin{cases} \text{Tiempo de vuelo: } \left(r_{0x};r_{0y}\right)_{\text{inicial}} \rightarrow \left(r_x;0\right)_{\text{suelo}} \\ 0 = r_y = v_{0y}t_{\text{vuelo}} - \frac{1}{2}gt_{\text{vuelo}}^2 = t_{\text{vuelo}}\left(v_{0y} - \frac{1}{2}gt_{\text{vuelo}}\right) \Rightarrow v_{0y} - \frac{1}{2}gt_{\text{vuelo}} = 0 \\ t_{\text{vuelo}} = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2\times 80\,\frac{m}{s}\times \text{sen}\,45^o}{9,8\,\frac{m}{s^2}} = 11,54\text{ s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Alcance: } \left(r_{0x};r_{0y}\right)_{\text{inicial}} \xrightarrow{t_{\text{vuelo}}} \left(r_x;0\right)_{\text{suelo}} \\ r_{x(\text{alcance})} = v_{0x}t_{\text{vuelo}} = v_0\cos\alpha\times t_{\text{vuelo}} = 80\,\frac{m}{s}\times\cos 45^o\times 11,54\text{ s} = 653,06\text{ m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} \quad \begin{cases} r_x = v_{0x}t \\ r_y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \\ r_x = v_{0x}\frac{t_{\text{vuelo}}}{2} = v_{0x}\frac{v_{0y}}{g} = \frac{1}{2}r_{x(\text{alcance})} = \frac{1}{2}\times 653,06\text{ m} = 326,53\text{ m} \\ r_y = v_{0y}\frac{t_{\text{vuelo}}}{2} - \frac{1}{2}g\left(\frac{t_{\text{vuelo}}}{2}\right)^2 = v_{0y}\frac{v_{0y}}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_{0y}}{g}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{v_{0y}^2}{g} = 163,26\text{ m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = v_{0x} t \\ y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \begin{cases} y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2} x^2 \\ y = \frac{80 \times \text{sen } 45^{\circ}}{80 \times \cos 45^{\circ}} x - \frac{1}{2} \frac{9,8}{\left(80 \times \cos 45^{\circ}\right)^2} x^2 = x - 0,00153 x^2 \end{cases}$$

3) Un proyectil es lanzado hacia arriba formando un ángulo con la horizontal. Prueba que el tiempo de vuelo del proyectil desde el suelo a su altura máxima es igual al tiempo de vuelo desde su altura máxima al suelo. Dato: La altura máxima se alcanza cuando v_y sea cero y cuando llegue al suelo el valor de r_y es cero.

Respuesta:

$$\begin{cases} \text{Desde suelo a la altura máxima } r_{y(\text{máxima})} \\ v_y = 0 = v_{0y} - g t \\ t = \frac{v_{0y}}{g} \\ r_{y(\text{máxima})} = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} \frac{\left(v_{0y}\right)^2}{g} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{Desde la altura máxima al suelo } \left(r_y = 0;\ v'_{0y} = 0\right) \\ r_y - r_{y(\text{máxima})} = v'_{0y} t' - \frac{1}{2} g t'^2 \\ 0 - \frac{1}{2} \frac{\left(v_{0y}\right)^2}{g} = -\frac{1}{2} g t'^2 \\ t' = \frac{v_{0y}}{g} \end{cases}$$

4) Una partícula describe una circunferencia de 5 m de radio con velocidad constante de 2 ms^{-1}. En un instante dado frena, con una aceleración constante de 0,5 m/s^2 hasta pararse. Calcula: a) la aceleración de la partícula antes de empezar a frenar; b) la aceleración 2 s después de empezar a frenar; c) la aceleración angular mientras frena; d) tiempo que tarda en parar; e) la distancia que recorre y el número de vueltas que da desde que empieza a frenar hasta que se para. [a) 0,8 m/s^2; b) 0,53 m/s^2; c) -0,1 rad/s^2; d) 4 s; e) 4 m y 0,127 vueltas]

Respuesta:

$$\begin{cases} v = 2 \frac{m}{s} \\ R = 5\,m \end{cases} \left\{ a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\left(2 \frac{m}{s}\right)^2}{5\,m} = 0,8 \frac{m}{s^2} \right. \quad \begin{cases} v_0 = 2 \frac{m}{s} \\ a_t = -0,5 \frac{m}{s^2} \\ t = 2\,s \end{cases} \begin{cases} v = v_0 + a_t t = 2 \frac{m}{s} - 0,5 \frac{m}{s^2} \times 2\,s = 1 \frac{m}{s} \\ a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\left(1 \frac{m}{s}\right)^2}{5\,m} = 0,2 \frac{m}{s^2} \\ a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = 0,53 \frac{m}{s^2} \end{cases}$$

$$\left\{ \alpha = \frac{a_t}{R} = \frac{-0,5 \frac{m}{s^2}}{5\,m} = -0,1 \frac{rad}{s^2} \right\} \left\{ t = \frac{v - v_0}{a_t} = \frac{0 - 2 \frac{m}{s}}{-0,5 \frac{m}{s^2}} = 4\,s \right\}$$

$$\begin{cases} \Delta s = v_0 t + \frac{1}{2} a_t t^2 = 2 \frac{m}{s} \times 4\,s + \frac{1}{2} \times \left(-0,5 \frac{m}{s^2}\right) \times \left(4\,s\right)^2 = 4\,m \\ \Delta\theta = \frac{\Delta s}{R} = \frac{4\,m}{5\,m} = \frac{4}{5} rad \times \frac{1\,\text{vuelta}}{2\pi\,rad} = 0,127\ \text{vuelta} \end{cases}$$

5) Un volante parte del reposo con aceleración constante. Después de dar 100 vueltas la velocidad es de 300 rpm, calcula: a) la aceleración angular; b) la aceleración tangencial de un punto situado a 20 cm del eje. [a) 0,785 rad/s^2; b) 0,157 m/s^2]

Respuesta:

$$\left\{\begin{array}{l}\Delta\theta = 100\,\text{vueltas}\times 2\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{vuelta}} = 200\pi\,\text{rad}\\ \omega = 300\,\frac{\text{rev}}{\text{min}}\times\dfrac{2\pi}{60}\,\frac{\frac{\text{rad}}{\text{rev}}}{\frac{\text{s}}{\text{min}}} = 10\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}\alpha = \dfrac{\omega-\omega_0}{t} = \dfrac{\omega^2-(\omega_0)^2}{2\Delta\theta} = \dfrac{\left(10\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2-0}{2\times 200\pi\,\text{rad}} = \dfrac{\pi}{4}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\\ a_t = \alpha R = \dfrac{\pi}{4}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\times 0{,}20\,\text{m} = 0{,}05\pi\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\end{array}\right.$$

6) Una persona de 95 kg está situada sobre una báscula en un ascensor. Determina el peso aparente en los casos: a) el ascensor sube con una aceleración de 1,80 m/s^2; b) el ascensor sube a velocidad constante; c) el ascensor baja con una aceleración de 1,30 m/s^2. [a) 1.102 N; b) 931 N; c) 807,5 N]

Respuesta

La lectura de la balanza es la magnitud de la fuerza normal ejercida por la balanza sobre la persona, que está en reposo relativo respecto del ascensor, por lo que tienen, la persona y el ascensor, la misma aceleración y la misma velocidad. Sobre la persona actúan dos fuerzas, la fuerza de la gravedad, dirigida hacia abajo, y la fuerza normal desde la balanza dirigida hacia arriba. La suma de las dos nos dará la aceleración observada.

Considera el sistema inercial en la superficie de la Tierra

$$\vec{F}_{neta} = \vec{P}+\vec{F}_n = m\vec{a} \quad \left\{F_{y(neta)} = -P_y + F_n = ma_y\right\} \quad \left\{\begin{array}{l}F_n = P_y + ma_y = mg + ma_y\\ F_n = m\left(g+a_y\right)\end{array}\right\}$$

$$a_y = +1{,}80\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \left\{\begin{array}{l}F_n = m\left(g+a_y\right)\\ F_n = 95\,\text{kg}\times\left(9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}+1{,}80\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 1.102\,\text{N}\end{array}\right.$$

$$a_y = 0\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \left\{\begin{array}{l}F_n = m\left(g+a_y\right)\\ F_n = 95\,\text{kg}\times 9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 931\,\text{N}\end{array}\right.$$

$$a_y = -1{,}30\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \left\{\begin{array}{l}F_n = m\left(g+a_y\right)\\ F_n = 95\,\text{kg}\left(9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}-1{,}30\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 807{,}5\,\text{N}\end{array}\right.$$

Considera el sistema no inercial en el suelo del ascensor:

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{F}'_{\text{no-inercial}} = \vec{F}+\vec{F}_{\text{inercial}}\\ \vec{F}_{neta} = \vec{P}'_{\text{aparente}}+\vec{F}_n = 0\end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l}F_n = -P'_{\text{aparente}}\\ \vec{P}'_{\text{aparente}} = \vec{P}+\vec{F}_{\text{inercial}}\\ P'_{\text{aparente}} = -mg - ma_{\text{inercial}}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}F_n = -P'_{\text{aparente}} = mg + ma_{\text{inercial}}\\ F_n = m\left(g + a_{\text{inercial}}\right)\end{array}\right\}$$

$$a_{\text{inercial}} = +1{,}80\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \left\{F_n = 95\,\text{kg}\times\left(9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}+1{,}80\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 1102\,\text{N}\right.$$

$$a_{\text{inercial}} = 0\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \left\{F_n = 95\,\text{kg}\times 9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 931\,\text{N}\right.$$

$$a_{\text{inercial}} = -1{,}30\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \left\{F_n = 95\,\text{kg}\left(9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}-1{,}30\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 807{,}5\,\text{N}\right.$$

7) Un ascensor está subiendo con una persona, de masa 60 kg, situada sobre una báscula. El ascensor partió del reposo y la tensión del cable que está tirando del mismo es de 9.410 N. La masa del ascensor y de la báscula es de 815 kg. Determine: a) la aceleración de subida del ascensor; b) la lectura, sobre la escala de la báscula, durante la subida. [a) 0,95 m/s^2; b) 645 N]

Respuesta:

$$\vec{F}_{neta} = \vec{T} + \vec{P} = m\vec{a} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{T} = 9410\text{ N}\vec{j} \\ \vec{P} = -\left[(60+815)\text{ kg} \times 9{,}8\,\frac{m}{s^2} \right]\vec{j} \\ \vec{P} = -8575\text{ N}\vec{j} \end{array} \right\} \left\{ \vec{a} = \frac{\vec{T}+\vec{P}}{m} = \frac{9410\text{ N}\vec{j} - 8575\text{ N}\vec{j}}{(60+815)\text{ kg}} = 0{,}95\,\frac{m}{s^2}\vec{j} \right\}$$

$$a_y = +0{,}95\,\frac{m}{s^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{neta(persona)} = \vec{P} + \vec{F}_n = m\vec{a} \\ F_{y(neta)} = -mg + F_n = ma_y \\ F_n = m(g + a_y) \\ F_n = 60\text{ kg} \times \left(9{,}8\,\frac{m}{s^2} + 0{,}95\,\frac{m}{s^2}\right) = 645\text{ N} \end{array} \right.$$

8) Desde lo alto de un ascensor de 3 m de altura se deja caer un objeto, y al mismo instante arranca el ascensor para subir con una aceleración de 2 m/s^2. Calcule: a) el tiempo que tarda el objeto en llegar al suelo del ascensor; b) la longitud recorrida hasta chocar con el suelo. [a) 0,71 s; b) 2,49 m]

Respuesta:

Como el ascensor y el objeto se mueven en línea recta vertical consideramos que lo hacen por el eje OY y el origen del sistema de referencia es el suelo del ascensor. Luego para determinar el tiempo en chocar planteamos las ecuaciones de movimiento del objeto y del ascensor.

Si el ascensor sube con velocidad constante, todo objeto contenido en su interior sube con la misma velocidad, por lo que el objeto que cae tiene la misma velocidad inicial

$$y = y_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} y_{objeto} = 3 - \tfrac{1}{2}\cdot 9{,}8t^2 \\ y_{ascensor} = \tfrac{1}{2}\cdot 2t^2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} y_{objeto} = y_{ascensor} \\ 3 - \tfrac{1}{2}\cdot 9{,}8t^2 = \tfrac{1}{2}\cdot 2t^2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 3 = 5{,}9t^2 \\ t = 0{,}71\text{s} \end{array} \right.$$

$$\Delta y_{ascensor} = y_{ascensor} - 0 = t^2 = 0{,}51\text{m}$$

$$\Delta y_{objeto} = y_{objeto} - 3 = -2{,}49\text{ m}$$

9) Un objeto, de masa 2 kg, se suspende del techo de un vagón de ferrocarril que lleva un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado de aceleración 3 m/s^2. Si la cuerda que sujeta al objeto es inextensible y consideramos que su peso es nulo. Calcule: a) el ángulo, que la cuerda forma con la vertical; b) la tensión de la cuerda. [a) 17º; b) 20,5 N]

Respuesta:

El objeto está sometido a dos fuerzas el peso y la tensión de la cuerda. El peso es vertical hacia abajo y la tensión forma un ángulo con la vertical. El movimiento del vagón en el sentido OX:

$$\vec{F}_{neta} = \vec{T} + \vec{P} = m\vec{a} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{T} = T_x\,\vec{i} + T_y\,\vec{j} = T\,\text{sen}\,\alpha\,\vec{i} + T\cos\alpha\,\vec{j} \\ \vec{P} = -mg\,\vec{j} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} F_{x(neta)} = T\,\text{sen}\,\alpha = ma_x \\ F_{y(neta)} = T\cos\alpha - mg = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T\,\text{sen}\,\alpha = ma_x \\ T\cos\alpha = mg \end{array} \right\} \quad \left\{ \tan\alpha = \frac{ma_x}{mg} \right\} \quad \left\{ \alpha = \arctan\frac{a_x}{g} = \arctan\frac{3\,\frac{m}{s^2}}{9{,}8\,\frac{m}{s^2}} = 17^{o} \right.$$

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{2\text{ kg} \times 9{,}8\,\frac{m}{s^2}}{\cos 17^{o}} = 20{,}5\text{ N}$$

10) Un bloque en reposo sobre una superficie horizontal pesa 425 N. Una fuerza aplicada al bloque tiene una magnitud de 142 N, estando dirigida hacia arriba formando un ángulo con la horizontal. El bloque empieza a moverse cuando el ángulo es de 60º. Determina el coeficiente de fricción estático entre el bloque y la superficie. [0,235]

Respuesta:

El objeto está sometido a cuatro fuerzas: el **peso**, la **fuerza** de contacto ejercida por la superficie y que es perpendicular, la **fuerza de fricción** estática que se dirige en sentido contrario al posible movimiento y la **fuerza** de contacto aplicada.

Para iniciar el movimiento:

$$\vec{F}_{neta} = \vec{T} + \vec{P} + \vec{F}_n + \vec{f}_{roz} = m\vec{a} = 0 \quad \begin{Bmatrix} \vec{T} = T\cos\alpha\,\vec{i} + T\operatorname{sen}\alpha\,\vec{j} \\ \vec{P} = -P\vec{j} \\ \vec{F}_n = \left(P - T\operatorname{sen}\alpha\right)\vec{j} \\ \vec{f}_{s,máx} = -\mu_s\left(P - T\operatorname{sen}\alpha\right)\vec{i} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{x(neta)} = T\cos\alpha - \mu_s\left(P - T\operatorname{sen}\alpha\right) = ma_x = 0 \\ F_{y(neta)} = T_y + F_n - P = 0 \end{Bmatrix}$$

$$T\cos\alpha = \mu_s\left(P - T\operatorname{sen}\alpha\right) \quad \left\{ \mu_s = \frac{T\cos\alpha}{\left(P - T\operatorname{sen}\alpha\right)} = \frac{142\text{ N}\times\cos 60^o}{\left(425\text{ N} - 142\text{ N}\times\operatorname{sen}60^o\right)} = 0{,}235 \right.$$

11) Un patinador sobre hielo lleva una velocidad inicial de 7,60 m/s. Se desprecia la resistencia del aire. Calcula: a) la desaceleración causada por la fricción cinética, si el coeficiente de fricción cinética entre el hielo y el filo de los patines es de 0,100; b) ¿cuánta distancia recorrerá hasta que se pare?. [a) 0,98 m/s^2; b) 29,5 m]

Respuesta:

Iniciado el movimiento: $\vec{P} + \vec{F}_n + \vec{f}_{roz} = m\vec{a} \quad \begin{Bmatrix} \vec{P} = -P\vec{j} \\ \vec{F}_n = P\vec{j} \\ \vec{f}_k = -\mu_k F_n\,\vec{i} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -\mu_k mg = ma_x \\ a_x = -\mu_k g = -0{,}1\times 9{,}8\,\frac{m}{s^2} = -0{,}98\,\frac{m}{s^2} \end{Bmatrix}$

$$\Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a_x} = \frac{0 - \left(7{,}60\,\frac{m}{s}\right)^2}{2\times\left(-0{,}98\,\frac{m}{s^2}\right)} = 29{,}5\text{ m}$$

12) A un bloque de 121 kg le aplicamos una fuerza de 661 N formando un ángulo de 20º por encima de la horizontal. El coeficiente de fricción estático entre el bloque y la superficie es de 0,410. ¿Cuál es la cantidad mínima de masa que se ha de poner encima del bloque para impedir que se mueva?. [56,7 kg]

Respuesta:

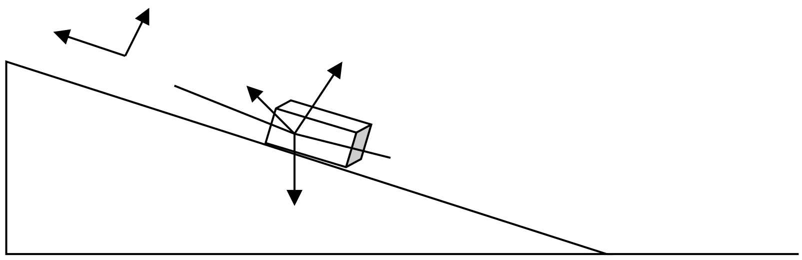
Para iniciar el movimiento: $\vec{F}_{neta} = \vec{T} + \vec{P} + \vec{F}_n + \vec{f}_{roz} = m\vec{a} = 0$

$$\begin{Bmatrix} \vec{T} = T\cos\alpha\,\vec{i} + T\operatorname{sen}\alpha\,\vec{j} \\ \vec{P} = -P\vec{j} \\ \vec{F}_n = \left(P - T\operatorname{sen}\alpha\right)\vec{j} \\ \vec{f}_{s,máx} = -\mu_s\left(P - T\operatorname{sen}\alpha\right)\vec{i} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} F_{x(neta)} = T\cos\alpha - \mu_s\left(P - T\operatorname{sen}\alpha\right) = ma_x = 0 \\ F_{y(neta)} = T_y + F_n - P = 0 \end{Bmatrix}$$

$$T\cos\alpha = \mu_s\left(P - T\operatorname{sen}\alpha\right) \quad \left\{ \begin{array}{l} P = \dfrac{T\cos\alpha}{\mu_s} + T\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{661\text{ N}\times\cos 20^o}{0{,}410} + 661\text{ N}\times\operatorname{sen}20^o = 1741\text{ N} \\ m = \dfrac{1741\text{ N}}{9{,}8\,\frac{m}{s^2}} = 177{,}66\text{ kg} \\ m' = 177{,}66\text{ kg} - 121\text{ kg} = 56{,}7\text{ kg} \end{array} \right.$$

13) Un bloque de masa 10 kg es empujado hacia arriba en un plano inclinado, de 30º con la horizontal, con una fuerza de 73 N y que forma un ángulo de 10º con la tangente al plano inclinado. Si el sistema no tiene rozamiento determina la fuerza que ejerce el plano sobre el bloque y la aceleración a lo largo del plano. [72,2 N y 2,3 m/s²]

Respuesta: El bloque está sometido a tres fuerzas, la fuerza peso que se dirige hacia abajo verticalmente, la fuerza normal que es perpendicular al plano inclinado y la fuerza aplicada. Consideramos que el eje OX está dirigido tangente al plano



$$\vec{F}_{neta} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{F}_n = m\vec{a} \quad \begin{Bmatrix} F\cos\theta - P\,\mathrm{sen}\,\theta = ma_x \\ F_n + F\,\mathrm{sen}\,\theta - P\cos\theta = 0 \end{Bmatrix}$$

$$a_x = \frac{F\cos\theta - P\,\mathrm{sen}\,\theta}{m} = \frac{73\,\mathrm{N}\times\cos 10º - 98\,\mathrm{N}\times\mathrm{sen}\,30º}{10\,\mathrm{kg}} = 2,3\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$F_n = P\cos\theta - F\,\mathrm{sen}\,\theta = 98\,\mathrm{N}\times\cos 30º - 73\,\mathrm{N}\times\mathrm{sen}\,10º = 72,2\,\mathrm{N}$$

14) Sobre una mesa horizontal tenemos una masa de 10 kg. Si partiendo del reposo con un coeficiente de rozamiento cinético 0,25 y adquiere una velocidad de 12 m/s, en 36 m de movimiento rectilíneo, ¿cuál es el valor de la fuerza horizontal aplicada?. [44,5 N]

Respuesta:

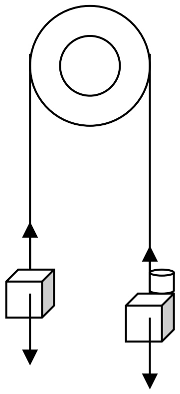
Las fuerzas aplicadas sobre la masa son la fuerza de contacto, el peso, la fuerza normal y la fuerza de rozamiento.^

$$\vec{F}_{neta} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{F}_n + \vec{f}_{roz} = m\vec{a}$$

$$\begin{Bmatrix} \vec{F}_{neta} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{F}_n + \vec{f}_{roz} = m\vec{a} \\ a_x = \dfrac{v^2 - v_0^2}{2\Delta x} = \dfrac{\left(12\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 - 0}{2\times 36\,\mathrm{m}} = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{F} = F\vec{i} \\ \vec{P} = -P\vec{j} \\ \vec{F}_n = P\vec{j} \\ \vec{f}_k = -\mu_k F_n\,\vec{i} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{x(neta)} = F - \mu_k mg = ma_x \\ F = ma_x + \mu_k mg = m\left(a_x + \mu_k g\right) \\ F = 10\,\mathrm{kg}\times\left(2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + 0,25\times 9,8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = 44,5\,\mathrm{N} \end{Bmatrix}$$

15) Dos cuerpos de 0,5 kg cada uno cuelgan de los extremos de un hilo que pasa por una polea. ¿Qué masa hay que añadir a uno de ellos para que el otro recorra 1 m en 2s? y ¿qué tensión soportará la cuerda?. [0,054 kg y 5,15 N]

Respuesta:



Aplicando la segunda ley de Newton a cada bloque, considerando el hecho de que la tensión de la cuerda T tiene la misma magnitud en todas las partes de la cuerda, $T_1 = T_2$, y que las aceleraciones tienen la misma magnitud porque la cuerda no se estira. Elegimos como dirección positiva hacia arriba y negativa hacia abajo.

$$\left\{\begin{array}{l}\Delta y = \frac{1}{2}at^2 \\ a = \dfrac{2\cdot\Delta y}{t^2} = \dfrac{2\times 1\text{ m}}{(2\text{ s})^2} = 0,5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}\text{Caída de las masas:}\quad F'_{neta} = T-(m+m')g = -(m+m')a_y \\ \text{Subida de la masa:}\quad F_{neta} = T - mg = ma_y\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}-T+(m+m')g = (m+m')a_y \\ T - mg = ma_y \\ \hline m'g = (2m+m')a_y\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}m'g = 2ma_y + m'a_y \\ m' = \dfrac{2ma_y}{g-a_y} = \dfrac{2\times 0,5\text{ kg}\times 0,5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{9,8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 0,5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0,054\text{ kg} \\ T = mg + ma_y = m\left(g+a_y\right) = 5,15\text{ N}\end{array}\right.$$

16) Sobre un objeto, de masa de 500 g, se aplican simultáneamente dos fuerzas. Si la velocidad inicial del objeto es $\vec{v}_0 = 3\frac{\text{m}}{\text{s}}\,\vec{i} - 4\frac{\text{m}}{\text{s}}\,\vec{j}$ y las fuerzas son $\vec{F}_1 = 2\text{ N}\,\vec{i} + 7\text{ N}\,\vec{j}$ y $\vec{F}_2 = 3\text{ N}\,\vec{i} + 4\text{ N}\,\vec{j}$, determina: a) ¿Cuánto vale el módulo de la aceleración que adquiere la masa?; b) Si la masa se encuentra inicialmente en el punto (0,0) m con una determinada velocidad inicial, ¿qué posición ocupará al cabo de 3 s?. [a) 24,2m/s^2; b) r_x = 54 m; r_y = 87 m]

Respuesta:

$$\vec{F}_{neta} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \left(2\text{ N}\vec{i} + 7\text{ N}\vec{j}\right) + \left(3\text{ N}\vec{i} + 4\text{ N}\vec{j}\right) = (2+3)\text{ N}\vec{i} + (7+4)\text{ N}\vec{j} = 5\text{ N}\vec{i} + 11\text{ N}\vec{j}$$

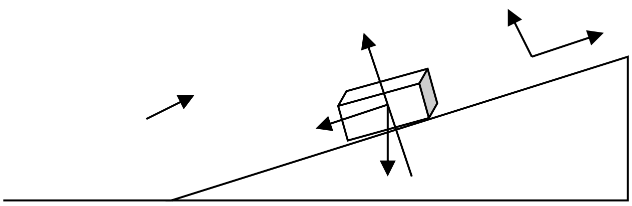
$$\vec{F}_{neta} = m\vec{a}\quad\left\{\vec{a} = \frac{\vec{F}_{neta}}{m} = \frac{5\text{ N}\vec{i} + 11\text{ N}\vec{j}}{0,5\text{ kg}} = 10\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\vec{i} + 22\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\vec{j}\right\}\left\{|\vec{a}| = \sqrt{\left(10\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^2 + \left(22\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^2} = 24,17\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\right.$$

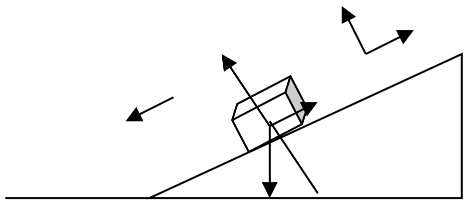
$$\left\{\begin{array}{l}\vec{v}_0 = 3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\vec{i} - 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\vec{j} \\ \vec{r} = \vec{v}_0 t + \dfrac{1}{2}\vec{a}t^2\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}\vec{r} = \left(3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\vec{i} - 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\vec{j}\right)\times 3\text{ s} + \dfrac{1}{2}\times\left(10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\vec{i} + 22\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\vec{j}\right)\times(3\text{ s})^2 \\ \vec{r} = 54\text{ m}\,\vec{i} + 87\text{ m}\,\vec{j}\end{array}\right.$$

17) Un bloque de masa 0,200 kg sube por un plano inclinado de 30º con la horizontal. La velocidad inicial de subida fue de 12,0 m/s y el coeficiente de rozamiento cinético μ_k es 0,16. Determina: a) la distancia que recorrerá en la subida y la altura sobre el plano; b) la velocidad del bloque cuando al caer llegue a la parte más baja del plano inclinado. [a) 11,5 m y 5,76 m; b) 9,03 m/s]

Respuesta:

Cuando el bloque está subiendo por el plano inclinado está sometido a tres fuerzas, la fuerza peso que está dirigida hacia abajo, la fuerza normal que es perpendicular al plano inclinado y la fuerza de rozamiento que se dirige en sentido contrario al movimiento.





Movimiento de subida:

$$\vec{F}_{neta} = \vec{P} + \vec{F}_n + \vec{f}_{roz} = m\vec{a} \quad \begin{cases} \vec{P} = -P\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\vec{i} - P\cos\alpha\,\vec{j} \\ \vec{F}_n = P\cos\alpha\,\vec{j} \\ \vec{f}_k = -\mu_k F_n\,\vec{i} = -\mu_k P\cos\alpha\,\vec{i} \end{cases} \left\} \begin{cases} F_{x(neta)} = -P\,\mathrm{sen}\,\alpha - \mu_k P\cos\alpha = ma_x \\ a_x = -g\,\mathrm{sen}\,\alpha - \mu_k g\cos\alpha \\ a_x = -g\left(\mathrm{sen}\,\alpha + \mu_k\cos\alpha\right) = -6{,}25\ \tfrac{m}{s^2} \end{cases}\right.$$

$$\Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a_x} = \frac{0 - \left(12\ \tfrac{m}{s}\right)^2}{2\times\left(-6{,}25\ \tfrac{m}{s^2}\right)} = 11{,}52\ m \quad \Rightarrow \quad h = \Delta x \cdot \mathrm{sen}\,30º = 11{,}52\ m \times 0{,}5 = 5{,}760\ m$$

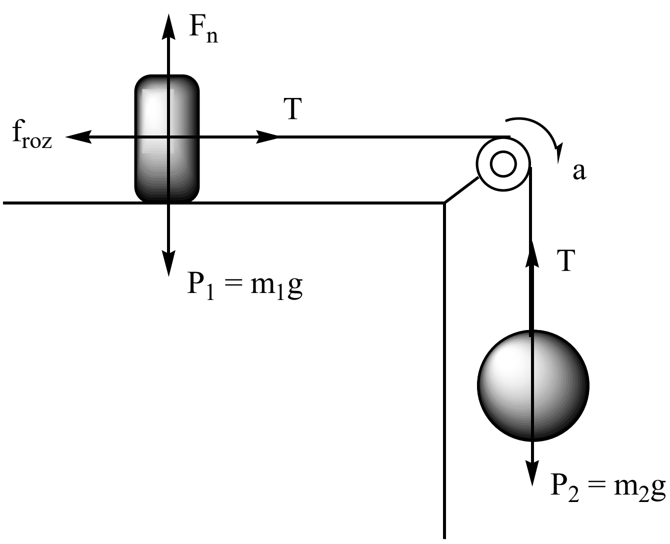
Movimiento de bajada:

$$\vec{F}_{neta} = \vec{P} + \vec{F}_n + \vec{f}_{roz} = m\vec{a} \quad \begin{cases} \vec{P} = -P\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\vec{i} - P\cos\alpha\,\vec{j} \\ \vec{F}_n = P\cos\alpha\,\vec{j} \\ \vec{f}_k = +\mu_k F_n\,\vec{i} = +\mu_k P\cos\alpha\,\vec{i} \end{cases} \left\} \begin{cases} F_{x(neta)} = -P\,\mathrm{sen}\,\alpha + \mu_k P\cos\alpha = ma_x \\ a_x = -g\,\mathrm{sen}\,\alpha + \mu_k g\cos\alpha \\ a_x = -g\left(\mathrm{sen}\,\alpha - \mu_k\cos\alpha\right) = -3{,}54\ \tfrac{m}{s^2} \end{cases}\right.$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a_x\Delta x \quad \left\{ v = \sqrt{0 + 2\times\left(-3{,}54\ \tfrac{m}{s^2}\right)\times\left(-11{,}52\ m\right)} = 9{,}0\ \tfrac{m}{s} \right.$$

18) Sobre una mesa horizontal hay un cuerpo de 10 kg, que está unido mediante un hilo y una polea a otro de 5 kg que está colgando verticalmente. El coeficiente de rozamiento cinético del cuerpo con la mesa es $\mu_k = 0{,}20$. Calcula: a) la aceleración del sistema y dibuja las fuerzas existentes; b) la masa mínima que ha de tener un cuerpo para que al colocarlo sobre el de 10 kg éste no se mueva. [a) 1,96 m/s^2; b) 15 kg]

Respuesta:



$$m_1 \begin{cases} T - f_{roz} = m_1 a \\ F_n - P_1 = 0 \\ f_{roz} = \mu_k F_n \end{cases} \quad T - \mu_k P_1 = m_1 a$$

$$m_2 \left\{ P_2 - T = m_2 a \right\} \quad P_2 - T = m_2 a$$

$$\begin{cases} T - \mu_k P_1 = m_1 a \\ P_2 - T = m_2 a \end{cases} \quad P_2 - \mu_k P_1 = \left(m_1 + m_2\right)a$$

Aplicando la segunda ley de Newton a cada bloque, considerando el hecho de que la tensión de la cuerda T tiene la misma magnitud en todas las partes de la cuerda, $T_1 = T_2$, y que las aceleraciones tienen la misma magnitud porque la cuerda no se estira. Elegimos como dirección positiva para m_1 hacia la derecha y para m_2 hacia arriba.

Iniciado el movimiento:

$$\vec{T}+\vec{P}_1+\vec{F}_n+\vec{f}_{roz}=m_1\vec{a}\quad \left\{\begin{matrix} F_{x(neta)}=T-f_k=T-\mu_k m_1 g=m_1 a \\ F_{y(neta)}=F_n-m_1 g=0 \end{matrix}\right\}\quad T-\mu_k m_1 g=m_1 a$$

$$\vec{T}+\vec{P}_2=m_2\vec{a}\qquad \left\{F_{y(neta)}=T-m_2 g=-m_2 a\right\}\quad T-m_2 g=-m_2 a$$

$$\left\{\begin{matrix} T-\mu_k m_1 g=m_1 a \\ T-m_2 g=-m_2 a \\ \hline -\mu_k m_1 g+m_2 g=(m_1+m_2)a \end{matrix}\right\} a=\frac{(m_2-\mu_k m_1)}{(m_1+m_2)}g=\frac{(5\text{ kg}-0,20\times 10\text{ kg})}{(10\text{ kg}+5\text{ kg})}\times 9,8\,\tfrac{m}{s^2}=1,96\,\tfrac{m}{s^2}$$

Para que no se mueva:

$$\vec{T}'+\vec{P}_2=m_2\vec{a}=0\qquad \left\{F_{y(neta)}=T'-m_2 g=0\right\}\quad T'=m_2 g=5\text{ kg}\times 9,8\,\tfrac{m}{s^2}=49\text{ N}$$

$$\vec{T}'+\vec{P}_1'+\vec{F}_n'+\vec{f}_{roz}=(m_1+m')\vec{a}=0\quad \left\{\begin{matrix} F_{x(neta)}=T'-f_k=T'-\mu_k(m_1+m')g=0 \\ F_{y(neta)}=F_n'-(m_1+m')g=0 \end{matrix}\right\}$$

$$T'=\mu_k(m_1+m')g=\mu_k m_1 g+\mu_k m' g\quad \left\{m'=\frac{T'-\mu_k m_1 g}{\mu_k g}=\frac{49\text{ N}-0,20\times 10\text{ kg}\times 9,8\,\tfrac{m}{s^2}}{0,20\times 9,8\,\tfrac{m}{s^2}}=15\text{ kg}\right.$$

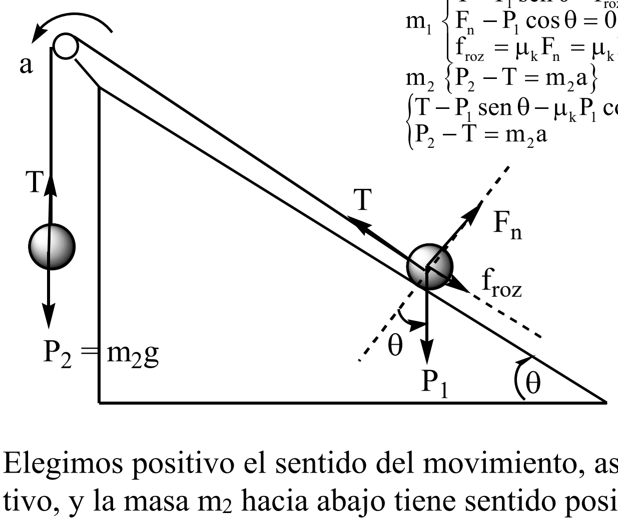
19) Un objeto, de masa m_1, colocado sobre un plano inclinado, de ángulo θ, está unido mediante un hilo y una polea a otro objeto, de masa m_2, que está colgando verticalmente por la parte vertical del plano inclinado. El coeficiente de rozamiento del objeto con la mesa es μ_k. Haz un esquema y dibuja todas las fuerzas existentes. En función de los parámetros dados, determine: a) la aceleración del sistema; b) la condición que ha de cumplir el sistema para que no se mueva o lo haga sin aceleración. [a) $a = (P_2 - P_1\cdot\text{sen}\theta - \mu_k\cdot P_1\cdot\cos\theta)/(m_1 + m_2)$; b) $P_2 = P_1\cdot\text{sen}\theta + \mu_k\cdot P_1\cdot\cos\theta$]

Respuesta:

$$m_1\left\{\begin{matrix} T-P_1\,\text{sen}\,\theta-f_{roz}=m_1 a \\ F_n-P_1\cos\theta=0 \\ f_{roz}=\mu_k F_n=\mu_k P_1\cos\theta \end{matrix}\right\}\quad T-P_1\,\text{sen}\,\theta-\mu_k P_1\cos\theta=m_1 a$$

$$m_2\left\{P_2-T=m_2 a\right\}\quad P_2-T=m_2 a$$

$$\left\{\begin{matrix} T-P_1\,\text{sen}\,\theta-\mu_k P_1\cos\theta=m_1 a \\ P_2-T=m_2 a \end{matrix}\right\}\quad P_2-P_1\,\text{sen}\,\theta-\mu_k P_1\cos\theta=(m_1+m_2)a$$



Elegimos positivo el sentido del movimiento, así la masa m_1 que se mueve hacia arriba tiene sentido positivo, y la masa m_2 hacia abajo tiene sentido positivo.

Iniciado el movimiento:

$$m_1 \left\{ \begin{array}{l} T - P_1 \operatorname{sen}\theta - f_{roz} = m_1 a \\ F_n - P_1 \cos\theta = 0 \\ f_{roz} = \mu_k F_n = \mu_k P_1 \cos\theta \end{array} \right\} \quad T - P_1 \operatorname{sen}\theta - \mu_k P_1 \cos\theta = m_1 a$$

$$m_2 \left\{ P_2 - T = m_2 a \right\} \quad P_2 - T = m_2 a$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T - P_1 \operatorname{sen}\theta - \mu_k P_1 \cos\theta = m_1 a \\ P_2 - T = m_2 a \end{array} \right\} \quad P_2 - P_1 \operatorname{sen}\theta - \mu_k P_1 \cos\theta = (m_1 + m_2) a$$

La condición que ha de cumplir el sistema para que no se mueva o lo haga sin aceleración

$$a = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} m_2 g = m_1 g \operatorname{sen}\theta + \mu_k m_1 g \cos\theta \\ m_2 = m_1 \operatorname{sen}\theta + \mu_k m_1 \cos\theta \end{array} \right.$$

20) Un ciclista va a realizar un giro llamado el "rizo de la muerte" en el que realiza un giro por una carretera colocada perpendicularmente. Si el radio del rizo es de 2,7 m, ¿cuál es la velocidad menor que puede tener el ciclista para que pueda permanecer en contacto con el rizo?. [5,14 m/s]

Respuesta:

$$\vec{F}_{neta} = \vec{P} + \vec{F}_n = m\vec{a} \quad \left\{ \begin{array}{l} F_{y(neta)} = ma_y = m\left(-\frac{v_t^2}{r}\right) \\ -F_n - mg = m\left(-\frac{v_t^2}{r}\right) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 0 = F_n = m\left(\frac{v_t^2}{r}\right) - mg \\ v_t = \sqrt{rg} = \sqrt{2,7\ \text{m} \times 9,8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 5,14\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{array} \right.$$

21) Un coche viaja a una velocidad constante de 20 m/s por una carretera circular llana de radio 190 m. ¿Cuál es el valor mínimo del coeficiente μ_s estático entre los neumáticos del coche y la carretera para prevenir que el coche se deslice?. [0,21]

Respuesta:

La fuerza centrípeta que causa que el coche viaje en un círculo es la fuerza de fricción radial ejercida sobre los neumáticos por la carretera, aunque el coche se esté moviendo no se está deslizando radialmente y por eso la fuerza de fricción es f_s y no f_k

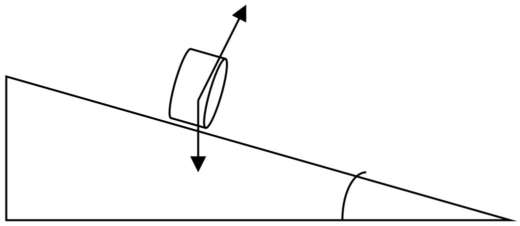
$$\left\{ v_m = 20\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}} \right\} \quad \left\{ a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{190\ \text{m}} = 2,1\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \right\} \quad \vec{F}_{neta} = m\vec{a} \left\{ \begin{array}{l} F_{radial(neta)} = -f_{s,máx} = -ma_c = -m\frac{v^2}{r} \\ F_{y(neta)} = F_n - mg = 0 \end{array} \right\}$$

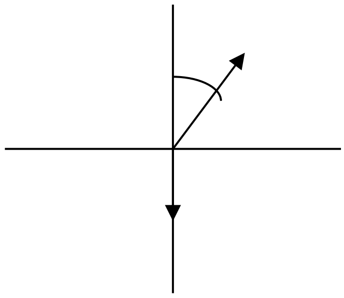
$$f_{s,máx} = \mu_s F_n = \mu_s mg = m\frac{v^2}{r} \quad \left\{ \mu_s = \frac{v^2}{gr} = \frac{\left(20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{9,8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 190\ \text{m}} = 0,21 \right.$$

22) En una carretera en la que no hay fricción, por ejemplo, sobre hielo, un coche se mueve con una velocidad constante de 20 m/s alrededor de una curva con peralte. Si el radio es de 190 m ¿cuál es el ángulo que deberá tener el peralte?. [12º]

Respuesta:

Las fuerzas que actúan sobre el coche son dos: la fuerza peso debida a la gravedad y la fuerza normal. Como la carretera está inclinada la fuerza normal tiene una componente horizontal que suministra la fuerza centrípeta necesaria.





$$\vec{F}_{neta} = \vec{P} + \vec{F}_n = m\vec{a}$$

$$\left\{\begin{array}{l} F_{y(neta)} = F_n \cos\theta - mg = ma_y = 0 \\ F_{x(neta)} = F_n \operatorname{sen}\theta = ma_x = m\dfrac{v^2}{r} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} F_n = \dfrac{mg}{\cos\theta} \\ \dfrac{mg}{\cos\theta}\operatorname{sen}\theta = m\dfrac{v^2}{r} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \tan\theta = \dfrac{v^2}{gr} = \dfrac{\left(20\,\frac{m}{s}\right)^2}{9{,}8\,\frac{m}{s^2}\times 190\text{ m}} = 0{,}2148 \\ \theta = \arctan 0{,}2148 = 12^o \end{array}\right.$$

23) En un cilindro de radio 2,1 m apoyamos un objeto, de masa 49 kg, que tiene un coeficiente de rozamiento con la pared del cilindro de 0,40. a) ¿Cuál es la velocidad mínima para que el objeto no se deslice hacia abajo?; b) ¿cuál es la fuerza centrípeta sobre el objeto?. [a) 7,2 m/s; b) 1200 N]

Respuesta:

Las fuerzas que actúan sobre el objeto son tres: la fuerza peso debida a la gravedad que se dirige hacia abajo, la fuerza normal que es perpendicular dirigida hacia el centro del giro y la fuerza de rozamiento.

$$\vec{P} + \vec{F}_{n(centrípeta)} + \vec{f}_{roz} = m\vec{a} = m\vec{a}_{centrípeta} \quad \left\{\begin{array}{l} F_{y(neta)} = -mg + f_{s,m} = 0 \\ F_{x(neta)} = F_{n(c)} = m\dfrac{v^2}{r} \end{array}\right\}$$

$$mg = f_{s,m} = \mu_s F_n = \mu_s m\frac{v^2}{r}\left\{\begin{array}{l} v = \sqrt{\dfrac{gr}{\mu_s}} = \sqrt{\dfrac{9{,}8\,\frac{m}{s^2}\times 2{,}1\text{ m}}{0{,}40}} = 7{,}17\,\frac{m}{s} \\ F_{n(c)} = m\dfrac{v^2}{r} = \dfrac{mg}{\mu_s} = \dfrac{49\text{ kg}\times 9{,}8\,\frac{m}{s^2}}{0{,}40} = 1200{,}5\text{ N} \end{array}\right.$$

24) a) Calcula la aceleración a_A con la que cae un objeto A, de masa m_A = 5 kg, que está en la rampa de un plano inclinado de 20º con la horizontal, siendo el coeficiente de rozamiento de μ_A = 0,20. b) Calcula la aceleración a_B con la que cae por el plano inclinado si se pone un segundo objeto B, de masa m_B =10 kg, y de coeficiente de rozamiento μ_B = 0,15. c) Calcula la aceleración con la que cae el objeto A si está por encima y pegado el objeto B. d) Determina el tiempo que tarda en caer una distancia de 2 m el objeto A si parte del reposo. [a) a_A = 1,51 m/s^2; b) a_B = 1,97 m/s^2; c) a = 1,81 m/s^2; d) 1,50 s]

Respuesta:

$$\vec{F}_{neta(A)} = \vec{P}_{(A)} + \vec{f}_{roz(A)} + \vec{F}_{n(A)} = m_A\vec{a}_A \left\{\begin{array}{l} P_A \cdot \operatorname{sen}\theta - f_{roz(A)} = m_A a_A \\ F_{n(A)} - P_A\cos\theta = 0 \\ f_{roz(A)} = \mu_A F_{n(A)} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} P_A \cdot \operatorname{sen}\theta - \mu_A P_A\cos\theta = m_A a_A \\ a_A = g\left(\operatorname{sen}\theta - \mu_A\cos\theta\right) = 1{,}51\,\frac{m}{s^2} \end{array}\right.$$

$$\vec{F}_{neta(B)} = \vec{P}_{(B)} + \vec{f}_{roz(B)} + \vec{F}_{n(B)} = m_B\vec{a}_B \quad \left\{\begin{array}{l} P_B \cdot \operatorname{sen}\theta - f_{roz(B)} = m_B a_B \\ F_{n(B)} - P_B \cos\theta = 0 \\ f_{roz(B)} = \mu_B F_{n(B)} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} P_B \cdot \operatorname{sen}\theta - \mu_B P_B \cos\theta = m_B a_B \\ a_B = g\left(\operatorname{sen}\theta - \mu_B \cos\theta\right) = 1{,}97\,\frac{m}{s^2} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} P_A \cdot \operatorname{sen}\theta - f_{roz(A)} + F_{A(empuje-B)} = m_A a'_A \\ P_B \cdot \operatorname{sen}\theta - f_{roz(B)} - F_{B(empuje-A)} = m_B a'_B \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \boxed{\vec{F}_{A(empuje-B)} = -\vec{F}_{B(empuje-A)} \quad \Rightarrow \quad F_{A(empuje-B)} = F_{B(empuje-A)}} \\ \boxed{a'_A = a'_B = a} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} P_A \cdot \operatorname{sen}\theta - f_{roz(A)} + F_{A(empuje-B)} = m_A a \\ P_B \cdot \operatorname{sen}\theta - f_{roz(B)} - F_{B(empuje-A)} = m_B a \end{array}\right.$$

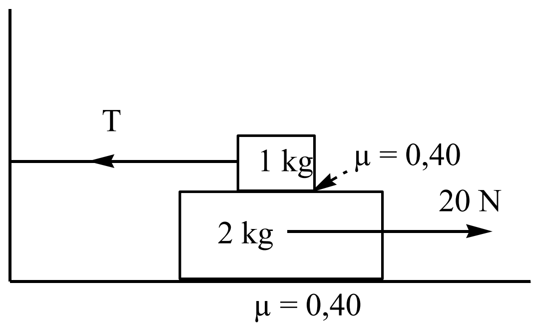
$$P_A \cdot \operatorname{sen}\theta + P_B \cdot \operatorname{sen}\theta - f_{roz(A)} - f_{roz(B)} = \left(m_A + m_B\right)a$$

$$P_A \cdot \operatorname{sen}\theta + P_B \cdot \operatorname{sen}\theta - \mu_A P_A \cos\theta - \mu_B P_B \cos\theta = \left(m_A + m_B\right)a$$

$$a = \frac{P_A \cdot \operatorname{sen}\theta + P_B \cdot \operatorname{sen}\theta - \mu_A P_A \cos\theta - \mu_B P_B \cos\theta}{m_A + m_B} = 1{,}81\,\frac{m}{s^2}$$

$$\Delta x = \tfrac{1}{2}at^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{\Delta x}{\frac{1}{2}a}} = 1{,}50\,s$$

25) Un objeto de masa 1 kg, está encima de otro objeto de masa 2 kg, y unido mediante una cuerda fija a una pared. Sobre el objeto de masa 2 kg se aplica una fuerza de 20 N, en sentido contrario a la pared. El coeficiente de rozamiento entre los dos objetos y entre el objeto de 2 kg y el suelo es el mismo $\mu = 0{,}40$. Calcula: a) la tensión de la cuerda unida al objeto de masa 1 kg; b) la aceleración del objeto de masa 2 kg. [a) 3,92 N; b) 2,16 m/s^2]



Respuesta:

El objeto de masa m_1 = 1 kg no se mueve, luego la fuerza neta sobre él es cero. Siendo la tensión de la cuerda igual a la fuerza de rozamiento que experimenta con el objeto m_2 que está debajo, de 2 kg.

$$\vec{F}_{neta(1)} = \vec{P}_1 + \vec{F}_{n(1)} + \vec{T} + \vec{f}_{roz(m_1-m_2)} = 0 \quad \left\{\begin{array}{l} F_{n(m_1)} = P_{m_1} \\ T = f_{roz(m_1-m_2)} = \mu F_{n(m_1)} = \mu m_1 g = 0{,}40 \times 1\,kg \times 9{,}8\,\frac{m}{s^2} = 3{,}92\,N \end{array}\right.$$

El objeto de 2 kg se mueve debido a la fuerza de 20 N pero se oponen al movimiento las dos fuerzas de rozamiento, la que tiene debido al objeto que está encima de 1 kg y no se mueve, y la del suelo.

$$\vec{F}_{neta(2)} = \vec{F} + \vec{P}_{m_2+m_1} + \vec{F}_{n(m_2+m_1)} + \vec{f}_{roz((m_2+m_1)-suelo)} + \vec{f}_{roz(m_2-m_1)} = m_2\vec{a}$$

$$\left\{\begin{array}{l} F - f_{roz((m_2+m_1)-suelo)} - f_{roz(m_2-m_1)} = m_2 a \\ F_{n(m_2+m_1)} = P_{m_2+m_1} = (m_2+m_1)g \\ f_{roz((m_2+m_1)-suelo)} = \mu F_{n(m_2+m_1)} = \mu(m_2+m_1)g = 11,76\,\mathrm{N} \\ f_{roz(m_2-m_1)} = \mu F_{n(m_1)} = \mu m_1 g = 3,92\,\mathrm{N} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} F - f_{roz((m_2+m_1)-suelo)} - f_{roz(m_2-m_1)} = m_2 a \\ 20\,\mathrm{N} - 11,76\,\mathrm{N} - 3,92\,\mathrm{N} = m_2 a \\ a = 2,16\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{array}\right.$$

26) Una bola se mueve con una velocidad de 2 m/s en sentido positivo del eje X. Otra bola, de igual masa, se mueve en sentido contrario con una velocidad de 1 m/s. Colisionan, pero no frontalmente, por lo que la segunda se desvía +90º con una velocidad de 1,41 m/s. Calcula la velocidad y la dirección de la primera bola después de la colisión. [1,73 m/s; -54,65º]

Respuesta:

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f \quad \left\{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_1' + \vec{v}_2' \\ 2\,\vec{i} - 1\,\vec{i} = \vec{v}_1' + 1,41\,\vec{j} \end{array}\right\} \left\{\vec{v}_1' = 1\,\vec{i} - 1,41\,\vec{j}\right\} \left\{\begin{array}{l} \alpha = \arctan\dfrac{v_{1y}'}{v_{1x}'} = \arctan\dfrac{-1,41}{1} = -54,65^{\circ} \\ |\vec{v}_1'| = \sqrt{(v_{1x}')^2 + (v_{1y}')^2} = \sqrt{1^2 + (-1,41)^2} = 1,73\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{array}\right.$$

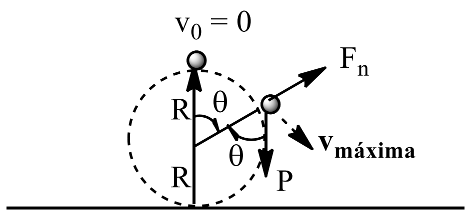
27) Una bala, de 25 g, se mueve horizontalmente con una velocidad de 1.200 m/s y atraviesa un objeto, de masa 350 kg y espesor 30 cm, y sale con una velocidad de 900 m/s. El objeto con el que choca se puede mover libremente sin rozamiento sobre una superficie horizontal. Calcula: a) el tiempo que tarda la bala en atravesar el objeto y la fuerza media que este ejerce sobre la bala; b) la velocidad del objeto después de que la bala haya salido. [a) $2,86\cdot10^{-4}$ s; -26.223,8 N; b) 0,021 m/s]

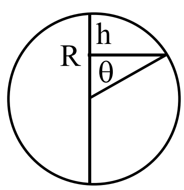
Respuesta:

$$\Delta x = v_m \Delta t = \frac{v+v_0}{2}\Delta t \quad \left\{\Delta t = \frac{2\Delta x}{v+v_0} = 2,86\cdot10^{-4}\,\mathrm{s}\right\} \quad F_{media} = m a_{media} = m\frac{v-v_0}{\Delta t} = -26.223,8\,\mathrm{N}$$

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f \quad \left\{m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'\right\} \quad \vec{v}_2' = \frac{m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_1')}{m_2} = 0,021\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,\vec{i}$$

28) Un objeto, de masa 2 kg, se encuentra en la parte superior de la esfera de radio R = 1 m. Se deja caer, sin rozamiento, por la esfera describiendo un arco de circunferencia, hasta que deja de estar en contacto con la esfera y cae libremente con una velocidad $v_{máx}$. Calcule: a) la aceleración tangencial, la velocidad y la fuerza normal de la esfera sobre el objeto, cuando el ángulo barrido en la caída sea de 10º; b) el ángulo total barrido en la caída hasta que deje de estar en contacto con la esfera, así como la velocidad $v_{máx}$ que posee en ese instante. [a) a_t = 1,7 m/s^2; v = 0,55 m/s; F_n = 18,71 N; b) $\theta_{máx}$ = 48,2º; $v_{máx}$ = 2,556 m/s]





h = R - R·cos θ

Respuesta:

Cuando el objeto cae, describiendo una circunferencia, en cada punto tiene una aceleración tangencial distinta y una aceleración normal distinta. Ello porque su velocidad aumenta conforme lo hace el ángulo barrido $\Delta\theta$, así como su aceleración tangencial. Por lo que no se pueden utilizar las ecuaciones del movimiento con aceleración constante.

La fuerza neta sobre el objeto, en cada instante, es la suma del peso P y de la fuerza normal F_n:

$$\vec{F}_{neta} = \vec{P} + \vec{F}_n = m\vec{a} = m\left(\vec{a}_t + \vec{a}_n\right) \quad \begin{cases} F_{neta(tangencial)} = P_t = P\,\text{sen}\,\theta = ma_t \\ F_{neta(normal)} = F_n - P_n = F_n - P\cos\theta = -ma_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{neta(tangencial)} = P_t = mg\,\text{sen}\,\theta = ma_t = m\dfrac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_t = g\,\text{sen}\,\theta} \\ a_t = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{ds}\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{dv}{ds}v = \dfrac{vdv}{Rd\theta} \quad \Rightarrow \quad vdv = gR\,\text{sen}\,\theta d\theta \\ \int_0^v vdv = \int_0^\theta gR\,\text{sen}\,\theta d\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}v^2 = gR\left[-\cos\theta\right]_0^\theta = gR\left(-\cos\theta + 1\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{v^2 = 2gR\left(1-\cos\theta\right)} \end{cases}$$

Se puede obtener también la velocidad en función del ángulo considerando que la velocidad de caída por la esfera sin rozamiento es la misma que la velocidad de caída libre en la que solamente interviene la gravedad.

$$\begin{cases} v^2 - v_0^2 = 2a\Delta y \\ v^2_{caída-libre} = 2a\Delta y = 2\cdot g\cdot h = 2g\left(R - R\cos\theta\right) = 2gR\left(1-\cos\theta\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{neta(normal)} = F_n - P\cos\theta = -ma_n \quad \Rightarrow \quad F_n = mg\cos\theta - ma_n = m\left[g\cos\theta - a_n\right] \\ F_n = m\left[g\cos\theta - \dfrac{v^2}{R}\right] = m\left[g\cos\theta - 2g\left(1-\cos\theta\right)\right] = \boxed{mg\left[3\cos\theta - 2\right]} \quad \left\{v^2 = 2gR\left(1-\cos\theta\right)\right\} \end{cases}$$

Resultados cuando el ángulo barrido es de 10º:

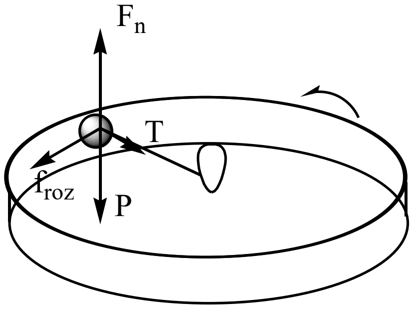
$$\begin{cases} a_t = g\,\text{sen}\,\theta = 9,8\,\tfrac{m}{s^2}\times\text{sen}\,10^\circ = 1,7\,\tfrac{m}{s^2} \\ v^2 = 2gR\left(1-\cos\theta\right) = 2\times 9,8\,\tfrac{m}{s^2}\times 1\,m\times\left(1-\cos 10^\circ\right) = 0,2977\,\tfrac{m^2}{s^2} \quad \Rightarrow \quad v = 0,55\,\tfrac{m}{s} \\ F_n = mg\left[3\cos\theta - 2\right] = 2\,kg\times 9,8\,\tfrac{m}{s^2}\times\left[3\cos 10^\circ - 2\right] = 18,71\,N \end{cases}$$

Resultados cuando deja de estar en contacto con la esfera ($F_n = 0$):

$$\begin{cases} F_n = mg\left[3\cos\theta - 2\right] \\ F_n = 0 = mg\left[3\cos\theta_{máx} - 2\right] \quad \Rightarrow \quad \cos\theta_{máx} = \dfrac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \theta_{máx} = \arccos\dfrac{2}{3} = 48,2^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2 = 2gR\left(1-\cos\theta\right) \\ v^2_{máx} = 2gR\left(1-\cos\theta_{máx}\right) = 2\times 9,8\,\tfrac{m}{s^2}\times 1\,m\times\left(1-\dfrac{2}{3}\right) = 6,5333 \quad \Rightarrow \quad v = 2,556\,\tfrac{m}{s} \end{cases}$$

29) Un objeto de masa 2 kg está atado al extremo de una cuerda, de 2 m de longitud, y el otro extremo de la cuerda está atado en el centro de una plataforma giratoria. La plataforma empieza a girar ($v_0 = 0$) rápidamente con el objeto colocado de tal forma que no gira con ella, pero sometido a la fuerza de rozamiento con la plataforma, siendo su sentido el opuesto al movimiento relativo del objeto con respecto a la plataforma. La tensión máxima que puede soportar la cuerda es de 100 N, y el coeficiente de rozamiento cinético entre el objeto y la plataforma es $\mu_k = 0{,}1$. Determine: a) la aceleración centrípeta máxima y la velocidad máxima, relativa a la plataforma, que puede alcanzar el objeto antes de que se rompa la cuerda; b) la aceleración tangencial de la plataforma y el tiempo que ha de transcurrir para que el objeto alcance la velocidad máxima, relativa a la plataforma. [a) $a_c = 50$ m/s^2; v = 10 m/s; b) $a_t = 0{,}98$ m/s^2; t = 10,2 s]



Respuesta:

El objeto tiene aceleración centrípeta y aceleración tangencial, debido a que las fuerzas que actúan sobre él no están equilibradas.

La fuerza centrípeta es igual a la tensión de la cuerda: $F_{centrípeta} = T$

La fuerza tangencial es igual a la fuerza de rozamiento: $F_{tangencial} = f_{roz} = \mu \cdot F_n$,

La fuerza de rozamiento tiene el sentido que se opone al movimiento relativo del objeto con respecto a la plataforma. La cuerda restringe el movimiento del objeto en la dirección centrípeta o normal.

Ecuaciones del movimiento

$$\vec{F}_{neta} = \vec{P} + \vec{F}_n + \vec{f}_{roz} + \vec{T} = m\vec{a} \quad \begin{Bmatrix} F_t = ma_t \\ F_c = ma_c \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} F_n - P = 0 \\ f_{roz} = \mu_k F_n \\ T = ma_{cent} \end{Bmatrix} \quad \begin{cases} F_t = f_{roz} = \mu_k F_n = \mu_k mg = ma_t \\ F_c = T = ma_c = m\dfrac{v^2}{R} \end{cases}$$

La velocidad aumenta debido a la fuerza tangencial que hace que aumente la aceleración tangencial, a_t. Si la velocidad aumenta hasta un valor en que $T = F_c = m\frac{v^2}{R}$, entonces está la cuerda en el límite de la rotura y el valor de la velocidad se dice que es el valor crítico, ya que si $T < F_c = m\frac{v^2}{R}$, la cuerda se rompe.

$$F_c = T = 100\,\mathrm{N} = ma_c \quad \Rightarrow \quad a_c = \frac{100\,\mathrm{N}}{2\,\mathrm{kg}} = 50\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$a_c = \frac{v_{crítica}^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v_{crítica} = \sqrt{a_c \cdot R} = \sqrt{50\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \times 2\,\mathrm{m}} = 10\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

El tiempo que tarda en adquirir esa velocidad es:

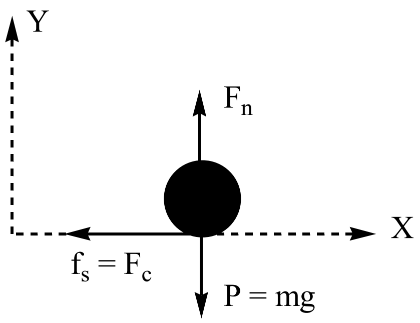
$$F_t = ma_t = f_{roz} = \mu_k mg = 0,1\times 2\,kg\times 9,8\,\tfrac{m}{s^2} = 1,96\,N \quad\Rightarrow\quad a_t = \frac{f_{roz}}{m} = \frac{1,96\,N}{2\,kg} = 0,98\,\tfrac{m}{s^2}$$

$$t = \frac{v-v_0}{a_t} = \frac{10\,\tfrac{m}{s}-0}{0,98\,\tfrac{m}{s^2}} = 10,2\,s$$

30) Un objeto de masa 80 kg está colocado a 3 m del centro de una plataforma giratoria que está rotando. Debido a la rotación su velocidad aumenta debido a la aceleración de 0,4 m/s^2, partiendo del reposo. El coeficiente de fricción estática entre el objeto y la plataforma es μ_s = 0,3. Determine la velocidad crítica para que el objeto empiece a deslizarse sobre la plataforma y el tiempo que ha de transcurrir. [2,97 m/s; 7,425 s]

Respuesta:

El objeto está sometido a tres fuerzas: el peso, la normal y la fuerza centrípeta. La fuerza de fricción estática es horizontal y proporciona la fuerza centrípeta. La fuerza de rozamiento tiene de magnitud $f_{roz} = \mu_s\cdot F_n$. Al ir aumentando la velocidad la fuerza centrípeta supera a la fuerza de rozamiento y el objeto empieza a deslizarse, por lo que el límite será cuando estas sean iguales.



Ecuaciones del movimiento

$$\vec{F}_{neta} = \vec{P}+\vec{F}_n+\vec{f}_{roz} = m\vec{a}\begin{cases}\text{Eje Y:} & F_n - P = 0\\ \text{Eje X:} & F_c = m\dfrac{v^2}{R} = f_{roz} = \mu_s F_n\end{cases}\Bigg\}\begin{cases} m\dfrac{v^2}{R} = \mu_s mg\\ v = \sqrt{\mu_s Rg}\end{cases}$$

$$v = \sqrt{\mu_s Rg} = \sqrt{0,3\times 3\,m\times 9,8\,\tfrac{m}{s^2}} = 2,97\,\frac{m}{s} \qquad \left\{ t = \frac{v-v_0}{a} = \frac{2,97\,\tfrac{m}{s}-0}{0,4\,\tfrac{m}{s^2}} = 7,425\,s \right.$$

31) Un objeto de masa m_1 = 3 kg, se está deslizando sobre una superficie horizontal con una velocidad de 2 m/s cuando experimenta una colisión directa con otro objeto de masa m_2 = 2 kg, que está en reposo. La colisión es perfectamente elástica. Determine: a) la velocidad de cada objeto justamente después de la colisión; b) la distancia entre los objetos cuando los objetos de paran después de deslizarse, sabiendo que el coeficiente de rozamiento cinético entre los objetos y la superficie horizontal es μ_k = 0,3. [a) v_1' = 0,4 m/s; v_2' = 2,4 m/s; b) 0,9523 m]

Respuesta:

Colisión elástica (e = 1) siendo la línea de impacto en el eje X y el plano de contacto el eje OY: se conserva el momento lineal y el coeficiente de restitución es la unidad (e = 1):

$$\begin{Bmatrix} \vec{p}_i = \vec{p}_f \\ e = 1 = -\dfrac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1} \end{Bmatrix} \begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \\ v_2' - v_1' = -v_2 + v_1 \quad \Rightarrow \quad v_2' = v_1' - v_2 + v_1 \end{cases}$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 \left(v_1' - v_2 + v_1 \right) \quad \Rightarrow \quad \left(m_1 - m_2 \right) v_1 + 2 m_2 v_2 = \left(m_1 + m_2 \right) v'$$

$$v_1' = \frac{\left(m_1 - m_2 \right) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{\left(3\,\text{kg} - 2\,\text{kg} \right) \times 2\,\frac{m}{s} + 2 \times 2\,\text{kg} \times 0}{5\,\text{kg}} = 0,4\,\tfrac{m}{s}$$

$$v_2' = v_1' - v_2 + v_1 = 0,4\,\tfrac{m}{s} - 0 + 2\,\tfrac{m}{s} = 2,4\,\tfrac{m}{s}$$

$$\vec{F}_{neta} = \vec{P} + \vec{F}_n + \vec{f}_{roz} = m\vec{a} \quad \begin{Bmatrix} -f_{roz} = m a_x \\ -\mu_k F_n = -\mu_k m g = m a_x \end{Bmatrix} \quad a_x = -\mu_k g = -0,3 \times 9,8\,\tfrac{m}{s^2} = -2,94\,\tfrac{m}{s^2}$$

$$\Delta x_1 = x_1 - 0 = \frac{v_1^2 - v_{0(1)}^2}{2a_x} = \frac{0 - \left(0,4\,\frac{m}{s} \right)^2}{2 \times \left(-2,94\,\frac{m}{s^2} \right)} = 0,0272\,\text{m}$$

$$\Delta x_2 = x_2 - 0 = \frac{v_2^2 - v_{0(2)}^2}{2a_x} = \frac{0 - \left(2,4\,\frac{m}{s} \right)^2}{2 \times \left(-2,94\,\frac{m}{s^2} \right)} = 0,9795\,\text{m}$$

$$x_2 - x_1 = 0,9795\,\text{m} - 0,0272\,\text{m} = 0,9523\,\text{m}$$

32) Un objeto cae desde una altura de 180 m y, al cabo de 3 s, explota dividiéndose en dos fragmentos de igual masa $m_1 = m_2$. El fragmento m_1 sale con velocidad horizontal al eje +X de 20 m/s. Calcule: a) la velocidad del fragmento m_2 cuando sale y su dirección; b) la posición del fragmento 1 cuando el fragmento 2 alcanza el suelo. [a) v_2 = 62,1 m/s y a 251º respecto a eje X; b) P_1(39,6 m; 116,7 m)].

Respuesta:

Las fuerzas externas no cambian como resultado de la explosión, con lo que el momento lineal se conserva:

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f \quad \begin{Bmatrix} \vec{p}_i = \left(m_1 + m_2 \right) \cdot \vec{v}_{CM} \\ \vec{p}_f = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 \end{Bmatrix} \{ m_1 = m_2 \} \begin{cases} 2m\vec{v}_{CM} = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 \\ 2\vec{v}_{CM} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} \vec{v}_{CM} = \vec{v}_{0(CM)} + \vec{a}t = -9,8\,\frac{m}{s^2}\,\vec{j} \times 3\,\text{s} = -29,4\,\frac{m}{s}\,\vec{j} \\ \vec{v}_1 = 20\,\frac{m}{s}\,\vec{i} \end{Bmatrix} \quad \begin{cases} y_{CM} = y_{0(CM)} + v_{0(CM)} t + \frac{1}{2} a t^2 \\ y_{CM} = 180\,\text{m} - \frac{1}{2} \times 9,8\,\frac{m}{s^2} \times \left(3\,\text{s} \right)^2 = 135,9\,\text{m} \end{cases}$$

La velocidad del fragmento 2:

$$\vec{v}_2 = 2\vec{v}_{CM} - \vec{v}_1 = -58,8\,\tfrac{m}{s}\,\vec{j} - 20\,\tfrac{m}{s}\,\vec{i} = -20\,\tfrac{m}{s}\,\vec{i} - 58,8\,\tfrac{m}{s}\,\vec{j}$$

$$\left| \vec{v}_2 \right| = \sqrt{\left(-20\,\tfrac{m}{s} \right)^2 + \left(-58,8\,\tfrac{m}{s} \right)^2} = 62,11\,\tfrac{m}{s} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \text{arctg}\,\frac{-58,8\,\frac{m}{s}}{-20\,\frac{m}{s}} = 251^\circ \quad \left(\text{cuadrante } 3^\circ \right)$$

Cuando alcanza el suelo el fragmento 2 ($r_{y(2)} = 0$) ha tardado un tiempo t que nos sirve para saber la posición del fragmento 1:

$$\left.\begin{cases} r_{y(2)} = r_{0y(2)} + v_{0y(2)}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ r_{y(2)} = 0 = 135{,}9 - 58{,}8t - 4{,}9t^2 \end{cases}\right\} \begin{cases} 4{,}9t^2 + 58{,}8t - 135{,}9 = 0 \\ t = \dfrac{-58{,}8 + \sqrt{58{,}8^2 + 4\times 4{,}9\times 135{,}9}}{2\times 4{,}9} = 1{,}98\,\mathrm{s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_{x(1)} = r_{0x(1)} + v_{0x(1)}t = 0 + 20\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \times 1{,}98\,\mathrm{s} = 39{,}6\,\mathrm{m} \\ r_{y(1)} = r_{0y(1)} + v_{0y(1)}t - \frac{1}{2}gt^2 = 135{,}9\,\mathrm{m} + 0\times(1{,}98\,\mathrm{s}) - \frac{1}{2}\times 9{,}8\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\times(1{,}98\,\mathrm{s})^2 = 116{,}7\,\mathrm{m} \end{cases}$$

33) Un proyectil explota en el punto más alto de su trayectoria resultando dos fragmentos A y B. El fragmento A, de masa 2 kg, sale horizontalmente con una velocidad doble a la que tenía el proyectil en el momento de la explosión (v_{CM}). Determine la velocidad de salida del fragmento B e indique cuál de los dos fragmentos alcanza antes el suelo. Haz un esquema de las trayectorias. (Resolver el problema para valores de 1, 2 y 4 kg de la masa del fragmento B). [$v_A = 2v_{CM}$; $v_{B(1)} = -v_{CM}$; $v_{B(2)} = 0$; $v_{B(4)} = ½\cdot v_{CM}$; $t_A = t_B$]

Respuesta:

Las fuerzas externas no cambian como resultado de la explosión, con lo que el momento lineal se conserva:

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f \quad \left.\begin{cases} \vec{p}_i = (m_A + m_B)\cdot \vec{v}_{CM} \\ \vec{p}_f = m_A\cdot\vec{v}_A + m_B\cdot\vec{v}_B \end{cases}\right\} \quad (m_A + m_B)\cdot\vec{v}_{CM} = m_A\cdot\vec{v}_A + m_B\cdot\vec{v}_B$$

$$\left.\begin{cases} \vec{v}_{CM} = v_{CM}\,\vec{i} \\ \vec{v}_A = 2v_{CM}\,\vec{i} \end{cases}\right\} \quad \vec{v}_B = \frac{(m_A + m_B)\cdot\vec{v}_{CM} - m_A\cdot\vec{v}_A}{m_B} = \frac{(m_A + m_B)\cdot v_{CM}\,\vec{i} - m_A\cdot 2v_{CM}\,\vec{i}}{m_B}\vec{v}_{CM} = \frac{m_B - m_A}{m_B}v_{CM}\,\vec{i}$$

$$\vec{v}_B = \frac{m_B - m_A}{m_B}v_{CM}\,\vec{i}$$

$$m_B = 1\,\mathrm{kg} \quad\Rightarrow\quad \vec{v}_B = \frac{1\,\mathrm{kg} - 2\,\mathrm{kg}}{1\,\mathrm{kg}}v_{CM}\,\vec{i} = -v_{CM}\,\vec{i}$$

$$\left.\begin{cases} r_{y(A)} = 0 = r_{0y(A)} + v_{0y(A)}t_A - \frac{1}{2}gt^2 = r_{0y(A)} + 0\cdot t_A - \frac{1}{2}gt_A^2 \quad\Rightarrow\quad t_A^2 = \dfrac{2r_{0y(A)}}{g} \\ r_{y(B)} = 0 = r_{0y(B)} + v_{0y(B)}t_B - \frac{1}{2}gt^2 = r_{0y(B)} + 0\cdot t_B - \frac{1}{2}gt_B^2 \quad\Rightarrow\quad t_B^2 = \dfrac{2r_{0y(B)}}{g} \end{cases}\right\} \begin{cases} r_{0y(A)} = r_{0y(B)} \\ t_A = t_B \end{cases}$$

$$m_B = 2\,\mathrm{kg} \quad\Rightarrow\quad \vec{v}_B = \frac{2\,\mathrm{kg} - 2\,\mathrm{kg}}{2\,\mathrm{kg}}v_{CM}\,\vec{i} = 0$$

$$m_B = 4\,\mathrm{kg} \quad\Rightarrow\quad \vec{v}_B = \frac{4\,\mathrm{kg} - 2\,\mathrm{kg}}{4\,\mathrm{kg}}v_{CM}\,\vec{i} = 0{,}5v_{CM}\,\vec{i}$$

34) Un patinador de 70 kg, en reposo sobre una pista de hielo, lanza un objeto de 10 kg con una velocidad horizontal de 10 m/s en el sentido positivo del eje OX. El coeficiente de rozamiento patín-hielo es de 0,1. Determinar: a) la velocidad del patinador 0,2 s después del lanzamiento; b) velocidad del objeto respecto del centro de masas patinador-objeto, en ese mismo instante. Dato: g = 10 m/s^2. [a) v_x = -1,23m/s; b) v_x = 9,83m/s; v_y = -1,715 m/s].

Respuesta:

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f \quad \left.\begin{cases} \vec{p}_i = 0 \\ \vec{p}_f = m_1\cdot\vec{v}_1 + m_2\cdot\vec{v}_2 \end{cases}\right\} \quad \begin{cases} \vec{v}_2 = \dfrac{-m_1\cdot\vec{v}_1}{m_2} = \dfrac{-10\,\mathrm{kg}}{70\,\mathrm{kg}}\times 10\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,\vec{i} = -\dfrac{100}{70}\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,\vec{i} = -1{,}43\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,\vec{i} \end{cases}$$

$$\vec{a}_2 = \frac{\vec{f}_{roz}}{m_2} = \frac{\mu m_2 g\,\vec{i}}{m_2} = 0{,}98\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,\vec{i} \begin{cases} \vec{v}_2 = \vec{v}_{02} + \vec{a}_2 t = -\dfrac{100}{70}\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,\vec{i} + 0{,}98\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,\vec{i}\times 0{,}2\,\mathrm{s} = -1{,}23\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,\vec{i} \end{cases}$$

$$\vec{v}_1 = \vec{V}_{CM} + \vec{v}'_1 \quad \left\{ \vec{v}_1 = \vec{v}_{01} + \vec{a}t = 10\,\tfrac{m}{s}\,\vec{i} - 9{,}8\,\tfrac{m}{s^2}\,\vec{j} \times 0{,}2\,s = 10\,\tfrac{m}{s}\,\vec{i} - 1{,}96\,\tfrac{m}{s}\,\vec{j} \right.$$

$$\vec{V}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{10\,kg \times \left(10\,\tfrac{m}{s}\,\vec{i} - 1{,}96\,\tfrac{m}{s}\,\vec{j}\right) + 70\,kg \times \left(-1{,}23\,\tfrac{m}{s}\,\vec{i}\right)}{80\,kg} = 0{,}17375\,\tfrac{m}{s}\,\vec{i} - 0{,}245\,\tfrac{m}{s}\,\vec{j}$$

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 - \vec{V}_{CM} = 10\,\tfrac{m}{s}\,\vec{i} - 1{,}96\,\tfrac{m}{s}\,\vec{j} - \left(0{,}17375\,\tfrac{m}{s}\,\vec{i} - 0{,}245\,\tfrac{m}{s}\,\vec{j}\right) = 9{,}83\,\tfrac{m}{s}\,\vec{i} - 1{,}715\,\tfrac{m}{s}\,\vec{j}$$

35) Una cañón, de masa 1.300 kg, lanza una bala de masa 72 kg en una dirección horizontal con una velocidad relativa al cañón de 55 m/s. ¿Cuál es la velocidad de retroceso del cañón respecto de la Tierra y la velocidad de la bala respecto de la Tierra?.[-2,9 y 52 m/s]

Respuesta:

Sistema de referencia Tierra OXYZ y sistema de referencia Cañón O'X'Y'Z':

$$\vec{p}_{i(O)} = \vec{p}_{f(O)}$$

$$0 = \vec{p}_{f(O)} = \vec{p}_{\text{cañón}(O)} + \vec{p}_{\text{bala}(O)} = M_{\text{cañón}}\vec{v}_{\text{cañón}(O)} + m_{\text{bala}}\vec{v}_{\text{bala}(O)} = 1.300\,kg \cdot \vec{v}_{\text{cañón}(O)} + 72\,kg \cdot \vec{v}_{\text{bala}(O)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_O = \vec{v}_{O'O} + \vec{v}'_{O'} \\ \vec{v}_{\text{bala}(O)} = \vec{v}_{\text{cañón}(O)} + \vec{v}'_{\text{bala}(O')} \\ \vec{v}_{\text{bala/Tierra}} = \vec{v}_{\text{cañón/Tierra}} + \vec{v}'_{\text{bala/cañón}} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_{\text{bala/Tierra}} = \vec{v}_{\text{cañón/Tierra}} + \vec{v}'_{\text{bala/cañón}} = \vec{v}_{\text{cañón/Tierra}} + 55\,\tfrac{m}{s} \\ \vec{v}_{\text{bala}(O)} = \vec{v}_{\text{cañón}(O)} + \vec{v}'_{\text{bala}(O')} = \vec{v}_{\text{cañón}(O)} + 55\,\tfrac{m}{s} \end{array} \right.$$

$$0 = \vec{p}_{\text{cañón}(O)} + \vec{p}_{\text{bala}(O)} = 1.300\,kg \cdot \vec{v}_{\text{cañón}(O)} + 72\,kg \cdot \left(\vec{v}_{\text{cañón}(O)} + 55\,\tfrac{m}{s}\right) = 1.372\,kg \cdot \vec{v}_{\text{cañón}(O)} + 3.960\,kg \cdot \tfrac{m}{s}$$

$$\vec{v}_{\text{cañón/Tierra}} = \vec{v}_{\text{cañón}(O)} = \frac{-3.960\,kg \cdot \tfrac{m}{s}}{1.372\,kg} = -2{,}886\,\tfrac{m}{s}$$

$$\vec{v}_{\text{bala/Tierra}} = \vec{v}_{\text{bala}(O)} = \vec{v}_{\text{cañón}(O)} + \vec{v}'_{\text{bala}(O')} = -2{,}886\,\tfrac{m}{s} + 55\,\tfrac{m}{s} = 52{,}11\,\tfrac{m}{s}$$

36) Una bala de masa m_b = 3,50 g se dispara horizontalmente. La bala atraviesa un objeto de masa m_1 = 1,20 kg, que está en reposo, y luego se incrusta en otro objeto de masa m_2 = 1,80 kg, que también está en reposo. El primer objeto adquiere una velocidad de v'_1 = 0,630 m/s y el segundo, con la bala en su interior, adquiere una velocidad de v''_2 = 1,40 m/s. Calcula: a) la velocidad de la bala inmediatamente después de salir del primer bloque; b) la velocidad inicial de la bala. [v'_b = 721 m/s; b) v_b = 937 m/s]

Respuesta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{p}_{(\text{bala+objeto}-1)} = \vec{p}'_{(\text{bala+objeto}-1)} \\ \vec{p}'_{(\text{bala+objeto}-2)} = \vec{p}''_{(\text{bala+objeto}-2)} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m_{\text{bala}}v_b + 0 = m_{\text{bala}}v'_b + m_1v'_1 \\ m_{\text{bala}}v'_b + 0 = \left(m_{\text{bala}} + m_2\right)v'' \end{array} \right\}$$

$$v'_b = \frac{\left(m_{\text{bala}} + m_2\right)v''}{m_{\text{bala}}} = \frac{\left(0{,}0035 + 1{,}80\right)kg \times 1{,}40\,\tfrac{m}{s}}{0{,}0035\,kg} = 721{,}4\,\tfrac{m}{s}$$

$$v_b = \frac{m_{\text{bala}}v'_b + m_1v'_1}{m_{\text{bala}}} = \frac{0{,}0035\,kg \times 721{,}4\,\tfrac{m}{s} + 1{,}20\,kg \times 0{,}63\,\tfrac{m}{s}}{0{,}0035\,kg} = 937{,}4\,\tfrac{m}{s}$$

37) Dos bolas, de masas m_1 = 1 kg y m_2 = 2 kg, impactan mediante una colisión inelástica y oblicua a la línea de impacto. Si consideramos la línea de impacto el eje X las velocidades son: $\vec{v}_1 = 3\,\tfrac{m}{s} \cdot \cos 30^o\,\vec{i} + 3\,\tfrac{m}{s} \cdot \text{sen}\,30^o\,\vec{j}$, para la primera y $\vec{v}_2 = -1\,\tfrac{m}{s} \cdot \cos 45^o\,\vec{i} - 1\,\tfrac{m}{s} \cdot \text{sen}\,45^o\,\vec{j}$, para la segunda. El coeficiente de restitución vale e = 0,75. Determine las velocidades de las bolas después del impacto así como los ángulos que forman con la línea de impacto. [v'_1 = 1,96 m/s a 130º y v'_2 = 1,41 m/s a 329,1º]

Respuesta:

Conservación del momento lineal del sistema a lo largo de la línea de impacto, eje X:

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x}$$

Conservación del momento lineal de la partícula 1, a lo largo del eje Y, que es perpendicular a la línea de impacto, mientras no actúe un impulso sobre la partícula 1 en esa dirección: $m_1 v_{1y} = m_2 v'_{1y}$

Conservación del momento lineal de la partícula 2, a lo largo del eje Y, que es perpendicular a la línea de impacto, mientras no actúe un impulso sobre la partícula 2 en esa dirección: $m_2 v_{2y} = m_2 v'_{2y}$

El coeficiente de restitución, $e = -\dfrac{(v'_{2x} - v'_{1x})_{\text{final}}}{(v_{2x} - v_{1x})_{\text{inicial}}}$

$$\left\{\begin{array}{l} m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x} \\ v'_{2x} - v'_{1x} = -e(v_{2x} - v_{1x}) \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v'_{1x} + m_2 (v'_{1x} - e v_{2x} + e v_{1x}) \\ (m_1 - e m_2) v_{1x} + m_2 (1+e) v_{2x} = (m_1 + m_2) v'_{1x} \end{array}\right.$$

$$v'_{1x} = \frac{(m_1 - e m_2) v_{1x} + m_2 (1+e) v_{2x}}{m_1 + m_2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} v'_{1x} = \dfrac{(1\,\text{kg} - 0{,}75 \times 2\,\text{kg}) \times 3\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \cos 30^\circ + 2\,\text{kg} \times (1 + 0{,}75)(-1\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \cos 45^\circ)}{1\,\text{kg} + 2\,\text{kg}} = -1{,}258\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \\ v'_{1y} = v_{1y} = 3\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \text{sen}\,30^\circ = 1{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \end{array}\right\}$$

$$v'_1 = \sqrt{v'^2_{1x} + v'^2_{1y}} = \sqrt{(-1{,}258\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}})^2 + (1{,}5\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}})^2} = 1{,}96\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} \quad \Rightarrow \quad \theta'_1 = \arctan \frac{v'_{1y}}{v'_{1x}} = \arctan \frac{1{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{-1{,}258\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 130^\circ$$

$$\left\{\begin{array}{l} v'_{2x} = v'_{1x} - e(v_{2x} - v_{1x}) = -1{,}258\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 0{,}75 \times (-1\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \cos 45^\circ - 3\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \cos 30^\circ) = 1{,}22\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \\ v'_{2y} = v_{2y} = -1\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \text{sen}\,45^\circ = -0{,}707\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \end{array}\right.$$

$$v'_2 = \sqrt{v'^2_{2x} + v'^2_{2y}} = \sqrt{(1{,}22\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}})^2 + (-0{,}707\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}})^2} = 1{,}41\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\theta'_2 = \arctan \frac{v'_{2y}}{v'_{2x}} = \arctan \frac{-0{,}707\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{1{,}22\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = -30{,}1^\circ = 329{,}9^\circ$$

Problemas de la XI Olimpiada Nacional de Física:

38) Una bola de acero de masa m y velocidad v, que se desliza sin rozamiento por un plano horizontal, choca contra una pared vertical fija con un ángulo de incidencia θ. Suponiendo que el choque es perfectamente elástico, obtenga la expresión de las componentes normal y tangencial del momento lineal p (cantidad de movimiento) después del choque, en función de m, v y θ. Haga lo mismo para la energía cinética. [$p'_n = -mv\cos\theta$; $p'_t = mv\,\text{sen}\,\theta$]

Respuesta:

Conservación del momento lineal del sistema a lo largo de la línea de impacto, eje X: $p_n = p'_n$

Conservación del momento lineal de la partícula a lo largo del eje Y: $p_t = p'_t$

Colisión elástica: $e = 1 = -\dfrac{v'_n}{v_n} \quad \{v'_n = -v_n$

$$\left.\begin{cases} p'_n = p_n \\ p'_t = p_t \\ v'_n = -v_n \end{cases}\right\} \begin{cases} p'_t = p_t = mv_t = mv\operatorname{sen}\theta \\ p'_n = p_n = mv_n = -mv'_n = -mv\cos\theta \end{cases}$$

$$E'_c = \tfrac{1}{2}mv'^2 = \tfrac{1}{2}m\left(v'^2_x + v'^2_y\right) = \tfrac{1}{2}m\left(v^2_x + v^2_y\right) = \tfrac{1}{2}mv^2$$

39) Una bola de acero se desliza sin rozamiento por un plano horizontal, choca contra una pared vertical fija con un ángulo de incidencia. Suponga que el choque es inelástico con un coeficiente de restitución $e = \dfrac{|v'_n|}{|v_n|}$, siendo e el cociente entre los valores de la componente normal de la velocidad después y antes del choque. En el caso completamente elástico e = 1, y e = 0 en el caso completamente inelástico. En general se tendrá $0 \le e \le 1$). Calcule: a) la energía cinética perdida por la bola en el choque si la masa de esta es de 78 g, la velocidad incidente de 0,045 m/s, el ángulo de incidencia $\theta = 15^o$ y e = 0,80; b) el ángulo de salida de la bola. [a) -2,65·10^{-5} J; b) -18,5º]

Respuesta:

Conservación del momento lineal del sistema a lo largo de la línea de impacto normal: $p_n = p'_n$

Conservación del momento lineal de la partícula perpendicular a línea de impacto: $p_t = p'_t$

Colisión inelástica: $e = -\dfrac{v'_n}{v_n}$ $\begin{cases} v'_n = -ev_n \\ v'\cos\theta' = -ev\cos\theta \end{cases}$

$$\Delta E_c = E'_c - E_c = \tfrac{1}{2}mv'^2 - \tfrac{1}{2}mv^2$$

$$\left.\begin{cases} v'\cos\theta' = -ev\cos\theta \\ v'\operatorname{sen}\theta' = v\operatorname{sen}\theta \end{cases}\right\} \left.\begin{cases} v'^2\cos^2\theta' = e^2v^2\cos^2\theta \\ \underline{v'^2\operatorname{sen}^2\theta' = v^2\operatorname{sen}^2\theta} \\ v'^2\left(\cos^2\theta' + \operatorname{sen}^2\theta'\right) = e^2v^2\cos^2\theta + v^2\operatorname{sen}^2\theta \end{cases}\right\} \left\{ v'^2 = v^2\left(e^2\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right) \right.$$

$$\Delta E_c = E'_c - E_c = \tfrac{1}{2}mv^2\left(e^2\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right) - \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}mv^2\left(e^2\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta - 1\right)$$

$$\Delta E_c = \tfrac{1}{2}\times 0,078\,\text{kg}\times\left(0,045\,\tfrac{m}{s}\right)^2\left(0,80^2\times\cos^2 15^o + \operatorname{sen}^2 15^o - 1\right) = -2,65\cdot 10^{-5}\ \text{J}$$

$$\left.\begin{cases} p'_t = p_t \\ v'_n = -ev_n \end{cases}\right\} \left.\begin{cases} v'\operatorname{sen}\theta' = v\operatorname{sen}\theta \\ v'\cos\theta' = -ev\cos\theta \end{cases}\right\} \frac{v'\operatorname{sen}\theta'}{v'\cos\theta'} = \frac{v\operatorname{sen}\theta}{-ev\cos\theta}$$

$$\tan\theta' = -\frac{1}{e}\tan\theta = -\frac{1}{0,80}\times\tan 15^o = -0,335 \quad \left\{\theta' = \arctan\left(-0,335\right) = -18,5^o = 161,5^o\right.$$

40) Una bola de acero pende de un hilo formando un ángulo con la vertical, constituyendo un péndulo simple. Al caer choca con la pared y lo hace en el punto más bajo de su trayectoria. El ángulo inicial del péndulo respecto de la vertical es $\theta = 0,52\,\text{rad}$, y el coeficiente de restitución tiene un valor de e = 0,80. Calcule el ángulo de retroceso que alcanza la bola después del choque. [0,414 rad]

Respuesta:

Antes del choque:

$$E_{p(i)} = mgh = mg\left(1 - 1\cos\theta\right) = mgl\left(1 - \cos\theta\right) \quad \left\{E_c = \tfrac{1}{2}mv^2 = mgl\left(1 - \cos\theta\right)\right.$$

Después del choque:

$$e=-\frac{v_n'}{v_n}=\frac{|v_n'|}{|v_n|}\quad \begin{cases} v_n'=-ev_n \\ E_c'=\frac{1}{2}mv_n'^2=\frac{1}{2}m\left(ev_n\right)^2 \end{cases}\Bigg\}\begin{cases} E_c'=E_{p(f)}'=mgh'=mgl\left(1-\cos\theta'\right) \\ \frac{1}{2}m\left(ev_n\right)^2=mgl\left(1-\cos\theta'\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} mgl\left(1-\cos\theta'\right)=e^2\,\frac{1}{2}mv^2 \\ mgl\left(1-\cos\theta\right)=\frac{1}{2}mv^2 \end{cases}\Bigg\}\quad \left\{\frac{\left(1-\cos\theta'\right)}{\left(1-\cos\theta\right)}=e^2\right\}\begin{cases} \cos\theta'=1-e^2\left(1-\cos\theta\right) \\ \cos\theta'=1-0{,}80^2\times\left(1-\cos 0{,}52\,\text{rad}\right)=0{,}915 \\ \theta'=\arccos 0{,}915=0{,}414\text{ rad} \end{cases}$$

41) Considera dos bolas de acero, de masas m_1 y m_2, la 1 colgada por un hilo, de longitud l, forma un ángulo θ con la vertical, y la 2 está en su posición más baja, y ambas en reposo. Se suelta la bola 1. Calcule: a) la velocidad de la bola 1 antes de impactar con la bola 2; b) las velocidades de las dos bolas después del choque, considerando éste perfectamente elástico. En el caso en que el choque no sea completamente elástico, se define el coeficiente de restitución e como el cociente entre los módulos de las velocidades relativas de ambas esferas después y antes del choque $e=-\frac{v_2'-v_1'}{v_2-v_1}$, $0\le e\le 1$. Calcule: c) las velocidades después del choque para e < 1. d) ¿Qué relación ha de existir entre m_1, m_2 y e para que la primera bola retroceda después del choque?. e) ¿Qué ocurre para e = 1 y $m_1 = m_2$?. f) Demostrar, calculando su velocidad final, que en el caso completamente inelástico las dos bolas salen juntas después del choque. [a) $v_1=\sqrt{2gl\left(1-\cos\theta\right)}$; b) $v_1'=\frac{\left(m_1-m_2\right)v_1}{m_1+m_2}$; $v_2'=\frac{2m_1v_1}{m_1+m_2}$; c) $v_1'=\frac{\left(m_1-em_2\right)v_1}{m_1+m_2}$; $v_2'=\frac{\left(1+e\right)m_1v_1}{m_1+m_2}$; d) $m_1<em_2$; e) $v_1'=0$]

Respuesta:

Antes del choque:

$$E_{p(i)}=E_{c(f)}\quad \begin{cases} E_{p(i)}=m_1gh=m_1gl\left(1-\cos\theta\right) \\ E_{c(f)}=\frac{1}{2}m_1v_1^2 \end{cases}\Bigg\}\begin{cases} m_1gl\left(1-\cos\theta\right)=\frac{1}{2}m_1v_1^2 \\ v_1=\sqrt{2gl\left(1-\cos\theta\right)} \end{cases}$$

Después del choque elástico:

$$\begin{cases} m_1v_1=m_1v_1'+m_2v_2' \\ v_2'-v_1'=-e\left(v_2-v_1\right) \\ v_2'-v_1'=v_1\ \left(e=1\right) \end{cases}\Bigg\}\begin{cases} m_1v_1=m_1v_1'+m_2\left(v_1'+v_1\right) \\ m_1v_1=m_1\left(v_2'-v_1\right)+m_2v_2' \end{cases}\Bigg\}\left\{v_1'=\frac{\left(m_1-m_2\right)v_1}{m_1+m_2}\right\}\left\{v_2'=\frac{2m_1v_1}{m_1+m_2}\right.$$

Después del choque inelástico:

$$\begin{cases} m_1v_1=m_1v_1'+m_2v_2' \\ v_2'-v_1'=-e\left(v_2-v_1\right) \\ v_2'-v_1'=ev_1 \end{cases}\Bigg\}\begin{cases} m_1v_1=m_1v_1'+m_2\left(v_1'+ev_1\right) \\ m_1v_1=m_1\left(v_2'-ev_1\right)+m_2v_2' \end{cases}\Bigg\}\left\{v_1'=\frac{\left(m_1-em_2\right)v_1}{m_1+m_2}\right\}\left\{v_2'=\frac{\left(1+e\right)m_1v_1}{m_1+m_2}\right.$$

$$v_1'=\frac{\left(m_1-em_2\right)v_1}{m_1+m_2}\quad \left\{v_1'<0\right\}\quad \left\{m_1<em_2\right.$$

$$e=0\left\{v_1'=\frac{(m_1-em_2)v_1}{m_1+m_2}=\frac{m_1v_1}{m_1+m_2}\right\}\left\{v_2'=\frac{(1+e)m_1v_1}{m_1+m_2}=\frac{m_1v_1}{m_1+m_2}\right\}\begin{cases}m_1v_1=(m_1+m_2)v_1'=(m_1+m_2)v_2'\\ v_1'=v_2'\end{cases}$$

$$m_1v_1=(m_1+m_2)v_1'=(m_1+m_2)v_2' \quad \left\{v_1'=v_2'=\frac{m_1v_1}{m_1+m_2}\right.$$

42) Considera el dispositivo de cinco bolas iguales, de masa m. Separamos la bola 1 de la vertical un ángulo θ, y la soltamos. Determine el movimiento resultante en el caso en que e = 1, y en el caso en que los choques entre las bolas no sean perfectamente elásticos (e < 1). ¿Depende la velocidad final de la primera bola del número de bolas? ¿Y la velocidad final de la última bola?.

Respuesta:

Antes del choque de la bola con la más próxima:

$$E_{p(i)}=E_{c(f)} \quad \begin{cases}E_{p(i)}=m_1gh=m_1gl(1-\cos\theta)\\ E_{c(f)}=\frac{1}{2}m_1v_1^2\end{cases}\begin{cases}m_1gl(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}m_1v_1^2\\ v_1=\sqrt{2gl(1-\cos\theta)}\end{cases}$$

Después del impacto la bola 1 golpea a la 2, la bola 2 golpea a la bola 3, la bola 3 golpea a la bola 4 y la bola 4 golpea a la bola 5.

Choque elástico:

$$\begin{cases}mv_1=mv_1'+mv_2'\\ v_2'-v_1'=-e(v_2-v_1)\\ v_2'-v_1'=v_1\ (e=1)\end{cases}\begin{cases}mv_1=mv_1'+m(v_1'+v_1)\\ mv_1=m(v_2'-v_1)+mv_2'\end{cases}\left\{v_1'=\frac{(m-m)v_1}{m+m}=0\right\}\left\{v_2'=\frac{2mv_1}{m+m}=v_1\right.$$

El movimiento resultante después del choque elástico es que la bola 1 se queda quieta, la bola 2 adquiere la velocidad de la bola 1. Y así hasta la quinta o última bola que sale con la misma velocidad que la de la bola 1.

Choque inelástico:

$$1\to 2\begin{cases}mv_1=mv_1'+mv_2'\\ v_2'-v_1'=ev_1\end{cases}\begin{cases}v_1=v_1'+(v_1'+ev_1)\\ v_1=(v_2'-ev_1)+v_2'\end{cases}\begin{cases}v_1'=\dfrac{(1-e)}{2}v_1\\ v_2'=\dfrac{(1+e)}{2}v_1\end{cases}$$

$$2\to 3\begin{cases}v_2'=\dfrac{1+e}{2}v_1=v_2''+v_3'\\ v_3'-v_2''=ev_2'=e\dfrac{1+e}{2}v_1\end{cases}\begin{cases}\dfrac{1+e}{2}v_1=v_2''+\left(v_2''+e\dfrac{1+e}{2}v_1\right)\\ \dfrac{1+e}{2}v_1=\left(v_3'-e\dfrac{1+e}{2}v_1\right)+v_3'\end{cases}\begin{cases}v_2''=\dfrac{[(1+e)-e(1+e)]v_1}{4}=\dfrac{(1+e)(1-e)}{2^2}v_1\\ v_3'=\dfrac{[(1+e)+e(1+e)]v_1}{4}=\dfrac{(1+e)^2}{2^2}v_1\end{cases}$$

$$3\to 4\begin{cases}v_3'=\dfrac{(1+e)^2}{2^2}v_1=v_3''+v_4'\\ v_4'-v_3''=ev_3'=e\dfrac{(1+e)^2}{2^2}v_1\end{cases}\begin{cases}\dfrac{(1+e)^2}{2^2}v_1=v_3''+v_3''+e\dfrac{(1+e)^2}{2^2}v_1\\ \dfrac{(1+e)^2}{2^2}v_1=v_4'-e\dfrac{(1+e)^2}{2^2}+v_4'\end{cases}\begin{cases}v_3''=\dfrac{(1+e)^2(1-e)}{2\cdot 2^2}v_1=\dfrac{(1+e)^2(1-e)}{2^3}v_1\\ v_4'=\dfrac{\left[(1+e)^2+e(1+e)^2\right]v_1}{2\cdot 2^2}=\dfrac{(1+e)^3}{2^3}v_1\end{cases}$$

$$4\to 5\begin{cases} v_4' = \dfrac{(1+e)^3}{2^3}v_1 = v_4'' + v_5' \\ v_5' - v_4'' = e v_4' = e\dfrac{(1+e)^3}{2^3}v_1 \end{cases}\begin{cases} \dfrac{(1+e)^3}{2^3}v_1 = v_4'' + v_4'' + e\dfrac{(1+e)^3}{2^3}v_1 \\ \dfrac{(1+e)^3}{2^3}v_1 = v_5' - e\dfrac{(1+e)^3}{2^3} + v_5' \end{cases}\begin{cases} v_4'' = \dfrac{(1+e)^3(1-e)}{2\cdot 2^3}v_1 \\ v_5' = \dfrac{\left[(1+e)^3 + e(1+e)^3\right]v_1}{2\cdot 2^3} = \dfrac{(1+e)^4}{2^4}v_1 \end{cases}$$

La velocidad final de la primera bola es igual a $v_1' = \dfrac{(1-e)}{2}v_1$, por lo que depende de su velocidad inicial y del coeficiente de restitución.

La velocidad final de la última bola es igual $v_5' = \dfrac{(1+e)^4}{2^4}v_1$, por lo que depende de la velocidad inicial de la primera bola, del coeficiente de restitución y del número de bolas, ya que si hubiese más bolas es exponente sería distinto.

43) Demostrar que en un choque perfectamente elástico entre dos partículas la energía cinética total antes del choque, $E_c = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$, es igual a la energía cinética total después del choque, $E_c' = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2$. [$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2$].

Respuesta:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2' \quad \left\{ e = 1 = -\frac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1} \right.$$

$$\begin{cases} m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2' \\ v_2' - v_1' = -(v_2 - v_1) \\ v_2' = v_1' - v_2 + v_1 \end{cases}\begin{cases} m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2(v_1' - v_2 + v_1) \\ (m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2 = (m_1 + m_2)v_1' \end{cases} v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

$$\begin{cases} m_1v_1 + m_2v_2 = m_1(v_2' + v_2 - v_1) + m_2v_2' \\ 2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2 = (m_1 + m_2)v_2' \end{cases} \quad v_2' = \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}$$

$$\tfrac{1}{2}m_1v_1'^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2'^2 = \tfrac{1}{2}m_1\left[\frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}\right]^2 + \tfrac{1}{2}m_2\left[\frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m_1(m_1 - m_2)^2v_1^2 + m_1(2m_2v_2)^2 + 4m_1m_2v_1v_2(m_1 - m_2) + m_2(2m_1v_1)^2 + m_2(m_2 - m_1)^2v_2^2 + 4m_1m_2v_1v_2(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m_1v_1^2\left[(m_1 - m_2)^2 + m_2 2^2 m_1\right] + m_2v_2^2\left[m_1 2^2 m_2 + (m_2 - m_1)^2\right]}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{1}{2}\frac{m_1v_1^2\left[(m_1 + m_2)^2\right] + m_2v_2^2\left[(m_1 + m_2)^2\right]}{(m_1 + m_2)^2} =$$

$$= \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 = \tfrac{1}{2}m_1v_1'^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2'^2$$

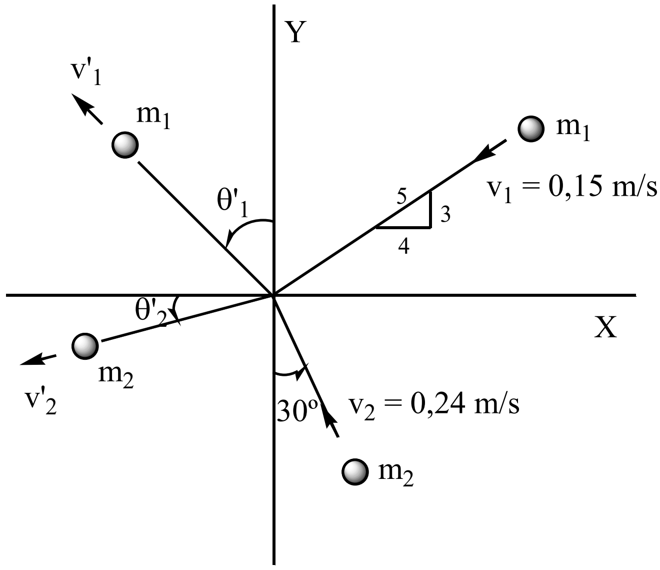
Otra demostración: considera que se ha de cumplir que $v_2' - v_1' = -(v_2 - v_1)$.

$$\tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 = \tfrac{1}{2}m_1v_1'^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2'^2 \quad \left\{ -m_1\left(v_1'^2 - v_1^2\right) = m_2\left(v_2'^2 - v_2^2\right) \right.$$

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2' \quad \left\{ -m_1(v_1' - v_1) = m_2(v_2' - v_2) \right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} -m_1\left(v_1'+v_1\right)\left(v_1'-v_1\right)=m_2\left(v_2'+v_2\right)\left(v_2'-v_2\right) \\ -m_1\left(v_1'-v_1\right)=m_2\left(v_2'-v_2\right) \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l} \left(v_1'+v_1\right)=\left(v_2'+v_2\right) \\ v_2'-v_1'=-\left(v_2-v_1\right) \end{array}\right\}\left\{e=1=-\frac{v_2'-v_1'}{v_2-v_1}\right.$$

44) Dos bolas, que tienen la misma masa, se deslizan sobre una superficie con el movimiento especificado en la gráfica, experimentando una colisión elástica. Determina la velocidad de cada una después de la colisión. Dato: el eje X se establece dentro del plano de contacto y el eje Y a lo largo de la línea de impacto. [v'_1 = 0,240 m/s; θ'_1 = 30º; v'_2 = 0,15 m/s; θ'_2 = 37º]



Respuesta:

El eje X se establece dentro del plano de contacto y el eje Y a lo largo de la línea de impacto, las fuerzas impulsivas de deformación y restitución actúan sólo en la dirección del eje Y. Descomponiendo los vectores velocidad o momento lineal en componentes a lo largo de los ejes X e Y es posible escribir cuatro ecuaciones escalares independientes para determinar las componentes de la velocidad antes y después del impacto.

Colisión elástica (e = 1) siendo la línea de impacto en el eje Y y el plano de contacto el OX:

Conservación del momento lineal del sistema a lo largo de la línea de impacto, eje Y:

$$m_1 v_{1y}+m_2 v_{2y}=m_1 v'_{1y}+m_2 v'_{2y} \quad \left\{\begin{array}{l} m_1=m_2 \\ v_{1y}+v_{2y}=v'_{1y}+v'_{2y} \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l} v_{1y}=-0{,}15\,\tfrac{m}{s}\times\tfrac{3}{5}=-0{,}09\,\tfrac{m}{s} \\ v_{2y}=0{,}24\,\tfrac{m}{s}\times\cos 30^{\circ}=0{,}208\,\tfrac{m}{s} \end{array}\right.$$

Conservación del momento lineal de la partícula 1 a lo largo del eje X:

$$v_{1x}=v'_{1x}=-0{,}15\,\tfrac{m}{s}\times\tfrac{4}{5}=-0{,}12\,\tfrac{m}{s}$$

Conservación del momento lineal de la partícula 2 en el eje X:

$$v_{2x}=v'_{2x}=-0{,}24\,\tfrac{m}{s}\times\operatorname{sen}30^{\circ}=-0{,}12\,\tfrac{m}{s}$$

El coeficiente de restitución, $e=1=-\frac{\left(v'_{2y}-v'_{1y}\right)_{\text{final}}}{\left(v_{2y}-v_{1y}\right)_{\text{inicial}}} \Rightarrow v'_{2y}-v'_{1y}=-v_{2y}+v_{1y}$

$$v_{1y} + v_{2y} = v'_{1y} + v'_{1y} - v_{2y} + v_{1y} \quad \Rightarrow \quad 2v_{2y} = 2v'_{1y} \quad \Rightarrow \quad v'_{1y} = v_{2y} = 0,208\,\tfrac{m}{s}$$

$$\left\{\begin{aligned} v'_{1y} &= v_{2y} = 0,208\,\tfrac{m}{s} \\ v'_{1x} &= -0,12\,\tfrac{m}{s} \end{aligned}\right\}\left\{\begin{aligned} v'_1 &= 0,240\,\tfrac{m}{s} \\ \theta'_1 &= \arctan\tfrac{v'_{1y}}{v'_{1x}} = -60^o = 120^o \end{aligned}\right.$$

$$v'_{2y} = v'_{1y} - v_{2y} + v_{1y} = v_{1y} = -0,09\,\tfrac{m}{s}$$

$$\left\{\begin{aligned} v'_{2y} &= -0,09\,\tfrac{m}{s} \\ v'_{2x} &= -0,12\,\tfrac{m}{s} \end{aligned}\right\}\left\{\begin{aligned} v'_2 &= 0,15\,\tfrac{m}{s} \\ \theta'_2 &= \arctan\tfrac{v'_{2y}}{v'_{2x}} = 36,9^o = 216,9^o \end{aligned}\right.$$

45) Dos bolas, de igual masa cada una, impactan mediante una colisión inelástica y oblicua a la línea de impacto. La primera se mueve por el eje X, siendo su velocidad v_{1x} = -6 m/s. La segunda se mueve con velocidad v_2 = 4 m/s y siendo su vector velocidad $\vec{v}_2 = 4\tfrac{m}{s}\times\tfrac{3}{5}\,\vec{i} + 4\tfrac{m}{s}\times\tfrac{4}{5}\,\vec{j}$. Determine: a) las velocidades de las bolas después del impacto, así como los ángulos que forman con la línea de impacto, si el coeficiente de restitución vale e = 0,75; b) el coeficiente de restitución si después de la colisión la bola 2 viaja a lo largo de una línea a 120º del eje X. [a) v'_{1x} = 1,35 m/s sobre eje +X; v'_{2x} = -4,95 m/s; $v'_{2y} = v_{2y}$ = 3,2 m/s; v'_2 = 5,90 m/s a 147º; b) e = 0,012]

Respuesta:

Conservación del momento lineal del sistema a lo largo de la línea de impacto, eje X:

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x}$$

Conservación del momento lineal de la partícula 1, a lo largo del eje Y, que es perpendicular a la línea de impacto, mientras no actúe un impulso sobre la partícula 1 en esa dirección: $v_{1y} = v'_{1y}$

Conservación del momento lineal de la partícula 2, a lo largo del eje Y, que es perpendicular a la línea de impacto, mientras no actúe un impulso sobre la partícula 2 en esa dirección: $v_{2y} = v'_{2y}$

El coeficiente de restitución, $e = -\dfrac{\left(v'_{2x} - v'_{1x}\right)_{final}}{\left(v_{2x} - v_{1x}\right)_{inicial}} \quad \Rightarrow \quad v'_{2x} - v'_{1x} = -e\left(v_{2x} - v_{1x}\right)$

$$\left\{\begin{aligned} v_{1x} + v_{2x} &= v'_{1x} + v'_{2x} \\ v'_{2x} - v'_{1x} &= -e\left(v_{2x} - v_{1x}\right) \end{aligned}\right\} \quad \left\{\begin{aligned} v_{1x} + v_{2x} &= v'_{1x} + \left(v'_{1x} - ev_{2x} + ev_{1x}\right) \\ v'_{1x} &= \frac{v_{1x} + v_{2x} + ev_{2x} - ev_{1x}}{2} = \frac{(1-e)v_{1x} + (1+e)v_{2x}}{2} \end{aligned}\right.$$

$$v'_{1x} = \frac{(1-0,75)\left(-6\tfrac{m}{s}\right) + (1+0,75)\times 2,4\tfrac{m}{s}}{2} = 1,35\tfrac{m}{s}$$

$$v'_{1y} = v_{1y} = 0$$

$$\left\{\begin{aligned} v_{1x} + v_{2x} &= v'_{1x} + v'_{2x} \\ v'_{2x} - v'_{1x} &= -e\left(v_{2x} - v_{1x}\right) \end{aligned}\right\} \quad \left\{\begin{aligned} v_{1x} + v_{2x} &= v'_{2x} + ev_{2x} - ev_{1x} + v'_{2x} \\ v'_{2x} &= \frac{v_{1x} + v_{2x} - ev_{2x} + ev_{1x}}{2} = \frac{(1+e)v_{1x} + (1-e)v_{2x}}{2} \end{aligned}\right.$$

$$v'_{2x} = \frac{(1+e)v_{1x} + (1-e)v_{2x}}{2} = \frac{(1+0,75)\left(-6\tfrac{m}{s}\right) + (1-0,75)\times 2,4\tfrac{m}{s}}{2} = -4,95\tfrac{m}{s}$$

$$v'_{2y} = v_{2y} = 3,2\tfrac{m}{s}$$

$$v'_2 = \sqrt{v'^2_{2x} + v'^2_{2y}} = \sqrt{\left(-4,95\tfrac{m}{s}\right)^2 + \left(3,2\tfrac{m}{s}\right)^2} = 5,90\tfrac{m}{s}$$

$$\theta'_2 = \arctan\frac{v'_{2y}}{v'_{2x}} = \arctan\frac{3,2\tfrac{m}{s}}{-4,95\tfrac{m}{s}} = -33^o = 147^o$$

b) el coeficiente de restitución si después de la colisión la bola 2 viaja a lo largo de una línea a 120º del eje X

$$\tan\theta' = \tan 120^{o} = \frac{v'_{2y}}{v'_{2x}} \quad \left\{ v'_{2x} = \frac{v'_{2y}}{\tan\theta'} = \frac{3,2\,\frac{m}{s}}{\tan 120^{o}} = -1,85\,\frac{m}{s} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{1x} + v_{2x} = v'_{1x} + v'_{2x} \\ v'_{2x} - v'_{1x} = -e(v_{2x} - v_{1x}) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} v'_{1x} = v_{1x} + v_{2x} - v'_{2x} = -6\,\frac{m}{s} + 2,4\,\frac{m}{s} + 1,85\,\frac{m}{s} = -1,75\,\frac{m}{s} \\ e = -\frac{(v'_{2x} - v'_{1x})_{final}}{(v_{2x} - v_{1x})_{inicial}} = -\frac{-1,85\,\frac{m}{s} + 1,75\,\frac{m}{s}}{2,4\,\frac{m}{s} + 6\,\frac{m}{s}} = 0,0120 \end{array} \right.$$

46) Un cuerpo de 0,5 kg se lanza hacia arriba por un plano inclinado, que forma 30º con la horizontal, con una velocidad inicial de 5 m/s. El coeficiente de rozamiento es 0,2. a) Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, cuando sube y cuando baja por el plano, y calcule la aceleración en la subida y la altura máxima alcanzada por el cuerpo. b) Determine la aceleración en la bajada y la velocidad con la que el cuerpo vuelve al punto de partida. [a) a = -6,6 m/s^2; h = 0,19 m; b) a' = 3,2 m/s^2; v = 1,56 m/s]

47) En una atracción ferial los pasajeros van dentro de un anillo cilíndrico que está rotando, y cuando el anillo alcanza una determinada velocidad de giro se coloca en un plano vertical. El anillo tiene un radio de 8 m y rota en el plano vertical con un período de 4,5 s. Calcule: a) la fuerza que el anillo realiza sobre un pasajero de 55 kg cuando en el giro va por la parte superior, y luego la misma fuerza pero cuando este va por la parte inferior del giro; b) el mayor período de rotación que ha de tener la rueda cilíndrica girando para prevenir que ningún pasajero caiga desde la parte superior. Dato: g = 9,8 m/s^2. [a) 318,80 N; 1.396,80 N; b) 5,677 s]

Respuesta:

En la parte superior la fuerza normal y el peso se dirigen hacia el centro. Como lleva una velocidad constante no hay fuerza tangencial.

$$F_n + P = ma_c = m\omega^2 R$$

$$F_n = m\omega^2 R - P = m\omega^2 R - mg = m\left(\omega^2 R - g\right) = 55\,kg \times \left[\left(\frac{2\pi}{4,5\,s}\right)^2 \times 8\,m - 9,8\,\frac{m}{s^2}\right] = 318,80\,N$$

En la parte inferior la fuerza normal va hacia el centro y el peso se dirige hacia abajo. Como lleva una velocidad constante no hay fuerza tangencial.

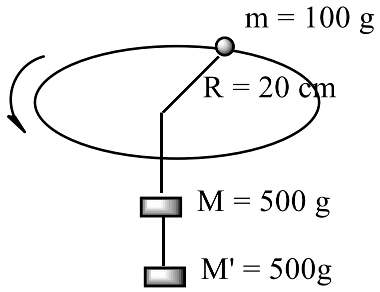
$$F_n - P = ma_c = m\omega^2 R$$

$$F_n = m\omega^2 R + P = m\omega^2 R + mg = m\left(\omega^2 R + g\right) = 55\,kg \times \left[\left(\frac{2\pi}{4,5\,s}\right)^2 \times 8\,m + 9,8\,\frac{m}{s^2}\right] = 1.396,80\,N$$

El mayor período de rotación será cuando la fuerza normal sea cero

$$F_n + P = ma_c = m\omega^2 R$$
$$F_n = 0$$
$$P = mg = ma_c = m\omega^2 R$$
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}} = 1{,}1068\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}}$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 5{,}677\,\text{s}$$

48) Una masa de 100 g gira describiendo círculos de radio 20 cm sobre una mesa sin rozamiento. La cuerda que lo sujeta pasa a través de un hueco en el centro de la mesa y está unido a dos pesas de 500 g cada una. a) Calcule la velocidad que debe llevar la masa m girando para soportar a las dos pesas. b) Suponemos que se corta la cuerda que sujeta la masa M' y cae mientras la masa m sigue girando, cuál será la nueva velocidad de giro de m y su nuevo radio de giro. Dato: g = 9,8 m/s^2. [a) v = 4,427 m/s; b) v' = 3,5138 m/s; R' = 25,2 cm]



Respuesta:

a) La componente radial de la fuerza centrípeta F_c es la causante de la aceleración centrípeta del movimiento. La componente paralela a la trayectoria F_t es la causante de que la partícula aumente o disminuya la velocidad.

Como no cambia la velocidad no hay fuerza tangencial, $F_t = 0$, el momento angular permanece constante. Por lo que la masa m gira a velocidad constante luego no está sometida a fuerza tangencial, siendo la causante de la rotación la fuerza centrípeta

$$\left.\begin{cases} F_t = 0 \\ F_c = ma_c \end{cases}\right\} F_c = Mg + M'g = m\frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{(Mg + M'g)R}{m}} = \sqrt{\frac{\left(0{,}5\,\text{kg}\times 9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 0{,}5\,\text{kg}\times 9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)\times 0{,}20\,\text{m}}{0{,}1\,\text{kg}}} = 4{,}427\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) Suponemos que se corta la cuerda que sujeta la masa M' y cae mientras la masa m sigue girando, cuál será la nueva velocidad de giro de m y su nuevo radio de giro

$$\left.\begin{cases} F_c' = ma_c' \\ F_t = 0 \quad \Rightarrow \quad L_i = L_f \\ L_i = Rmv = R'mv' = L_f \end{cases}\right\} \begin{cases} F_c' = Mg = m\dfrac{v'^2}{R'} \\ Rmv = R'mv' \end{cases}$$

$$R' = \frac{mv'^2}{Mg} \quad \Rightarrow \quad Rmv = R'mv' = \frac{mv'^2}{Mg}mv' = \frac{m^2v'^3}{Mg}$$

$$v' = \sqrt[3]{\frac{RmvMg}{m^2}} = \sqrt[3]{\frac{RvMg}{m}} = \sqrt[3]{\frac{0,20\,\text{m}\times 4,427\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\times 0,5\,\text{kg}\times 9,8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,1\,\text{kg}}} = 3,5138\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$R' = \frac{mv'^2}{Mg} = \frac{0,1\,\text{kg}\times\left(3,5138\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{0,5\,\text{kg}\times 9,8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0,252\,\text{m}$$

49) Desde el suelo se lanza un proyectil de 10 kg con una velocidad inicial de 100 m/s y formando un ángulo de 60º con la horizontal. En el punto más alto de su trayectoria explota en dos fragmentos A y B. El fragmento A, de 2 kg, sale horizontalmente con una velocidad triple a la que tenía el proyectil en el momento de la explosión. Determine: a) la velocidad de salida de los fragmentos después de la explosión; b) el alcance horizontal de cada fragmento desde el lugar de la explosión. Dato: g = 9,8 m/s^2. [a) v_{Ax} = 150 m/s; v_{Bx} = 25 m/s; b) t_{caer} = 8,837 s; Δx_A = 1.325,55 m; Δx_B = 220,925 m]

Respuesta:

a) la velocidad de salida de los fragmentos después de la explosión.

En el punto más alto de la trayectoria toda la velocidad es v_x y la v_y = 0. Las fuerzas externas no cambian como resultado de la explosión, con lo que el momento lineal se conserva:

$$\left.\begin{cases} v_{CM(y)} = v_{0CM(y)} - gt = 0 \\ v_{CM(x)} = v_{0CM(x)} = 100\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\times\cos 60^\circ = 50\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}\right\} \begin{cases} \vec{v}_{CM} = 50\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,\vec{i} \\ \vec{v}_A = 3v_{CM}\,\vec{i} = 3\times 50\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,\vec{i} = 150\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,\vec{i} \end{cases}$$

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f \quad \left.\begin{cases} \vec{p}_i = M\cdot\vec{v}_{CM} \\ \vec{p}_f = m_A\cdot\vec{v}_A + m_B\cdot\vec{v}_B \end{cases}\right\} \quad M\cdot\vec{v}_{CM} = m_A\cdot\vec{v}_A + m_B\cdot\vec{v}_B$$

$$\vec{v}_B = \frac{M\cdot\vec{v}_{CM} - m_A\cdot\vec{v}_A}{m_B} = \frac{10\,\text{kg}\cdot 50\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,\vec{i} - 2\,\text{kg}\cdot 150\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,\vec{i}}{8\,\text{kg}} = 25\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\,\vec{i}$$

b) el alcance horizontal de cada fragmento desde el lugar de la explosión.

El tiempo en subir al punto donde explota, la altura y el desplazamiento horizontal:

$$\left\{\begin{aligned} & v_{CM(y)} = 0 = v_{0CM(y)} - gt_{subir} \\ & t_{subir} = \frac{v_{0y(CM)}}{g} = \frac{100\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\times\text{sen}\,60^\circ}{g} = 8,837\,\text{s} \end{aligned}\right\}$$

$$r_{CM(y)} = r_{0CM(y)} + v_{0CM(y)}t_{subir} - \tfrac{1}{2}gt_{subir}^2 = 0 + v_{0y(CM)}\frac{v_{0y(CM)}}{g} - \tfrac{1}{2}g\times\left(\frac{v_{0y(CM)}}{g}\right)^2$$

$$r_{CM(y)} = \frac{1}{2}\frac{v_{0CM(y)}^2}{g} = \frac{1}{2}\frac{\left(100\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\times\text{sen}\,60^\circ\right)^2}{g} = 382,65\,\text{m}$$

$$r_{CM(x)} = r_{0CM(x)} + v_{0CM(x)}t_{subir} = 0 + 100\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\times\cos 60^\circ\times 8,837\,\text{s} = 441,85\,\text{m}$$

El tiempo en caer al suelo desde el punto de la explosión y el desplazamiento horizontal

$$\left\{\begin{array}{l} r_{A(y)} = 0 = r_{0A(y)} + v_{0A(y)} t_{A(suelo)} - \frac{1}{2} g t^2_{A(suelo)} = r_{0A(y)} - \frac{1}{2} g t^2_{A(suelo)} \\ r_{B(y)} = 0 = r_{0B(y)} + v_{0B(y)} t_{B(suelo)} - \frac{1}{2} g t^2_{B(suelo)} = r_{0B(y)} - \frac{1}{2} g t^2_{B(suelo)} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} t_{A(suelo)} = \sqrt{\frac{r_{0A(y)}}{\frac{1}{2} g}} = \sqrt{\frac{382,65\,\text{m}}{\frac{1}{2} g}} = 8,837\,\text{s} \\ t_{B(suelo)} = \sqrt{\frac{r_{0B(y)}}{\frac{1}{2} g}} = \sqrt{\frac{382,65\,\text{m}}{\frac{1}{2} g}} = 8,837\,\text{s} \end{array}\right\}$$

$$\Delta r_{x(A)} = v_{0x(A)} t_{A(suelo)} = 150\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} \times 8,837\,\text{s} = 1.325,55\,\text{m}$$

$$\Delta r_{x(B)} = v_{0x(B)} t_{B(suelo)} = 25\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} \times 8,837\,\text{s} = 220,925\,\text{m}$$

Problemas resueltos de «Vibraciones»

1) Una partícula sobre un muelle oscila con un período de 0,80 s y una amplitud de 0,10 m. Al tiempo t = 0, está a 5 cm de la posición de equilibrio y moviéndose hacia –A. Determina: a) la ecuación del movimiento oscilatorio; b) la posición y la dirección del movimiento en el instante de tiempo t = 2,0 s; c) la gráfica x-t y v-t. [a) $x = 0,10\cdot\cos(2,5\pi t + \frac{2}{3}\pi)$; b) x = +0,05 m; v = +0,68 m/s]

Solución:

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0) \quad \Rightarrow \quad v = -A\omega\,\text{sen}(\omega t + \phi_0)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\,\text{rad}}{0,80\,\text{s}} = 2,5\pi\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$x_{0(t=0)} = A\cos\phi_0 \quad \Rightarrow \phi_0 = \arccos\frac{x_0}{A} = \arccos\frac{-0,05\,\text{m}}{0,10\,\text{m}} = 120^\circ = 120^\circ \times \frac{\pi\,\text{rad}}{180^\circ} = \frac{2}{3}\pi$$

$$v_{0(t=0)} = -A\omega\,\text{sen}\,\phi_0 = -0,10\,\text{m} \times 2,5\pi\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}}\,\text{sen}\left(\tfrac{2}{3}\pi\right) = -0,68\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0) = 0,10\cdot\cos\left(2,5\pi t + \tfrac{2}{3}\pi\right)$$

$$x_{t=2} = 0,10\cdot\cos\left(2,5\pi\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}} \times 2,0\,\text{s} + \tfrac{2}{3}\pi\right) = 0,05\,\text{m}$$

$$v_{t=2} = -A\omega\,\text{sen}(\omega t + \phi_0) = -0,10\,\text{m} \times 2,5\pi\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}}\,\text{sen}\left(2,5\pi\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}} \times 2,0\,\text{s} + \tfrac{2}{3}\pi\right) = +0,68\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

Representar la gráfica x/t siendo x = 0,10·cos (2,5π·t + 2π/3)

$x_{(t=0)} = -0,05$ m

x = - A = -0,10 = 0,10·cos ϕ ⇒ cos ϕ = -1 ⇒ ϕ = (2n+1)π = 2,5π·t + 2π/3 ⇒ t = [(2n+1) – 2/3]/2,5

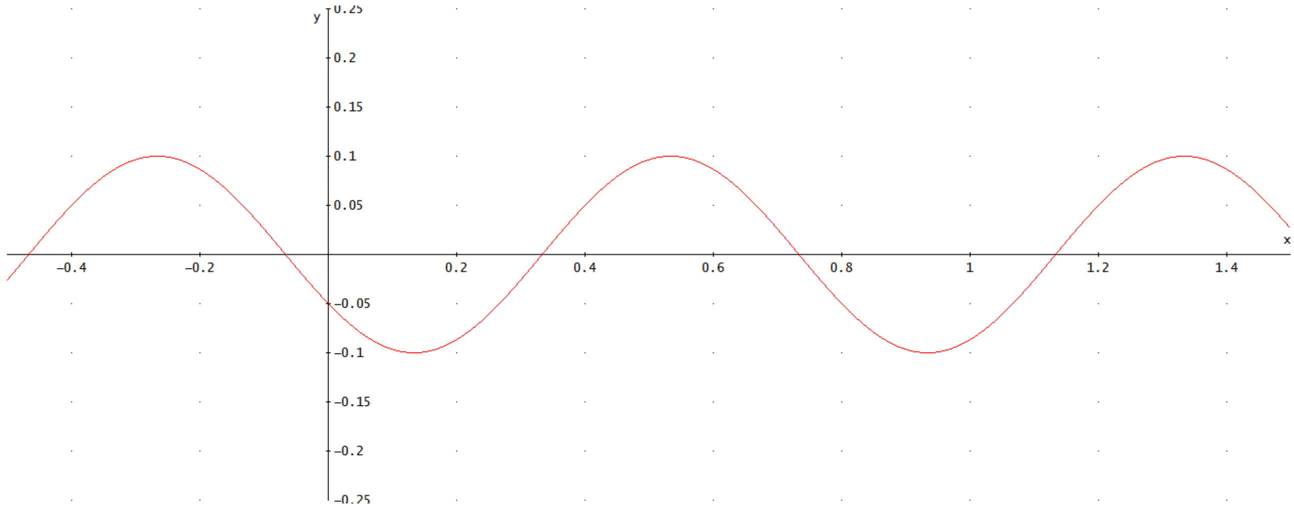
t_0 = 0,1333 s; t_1 = 0,9333 s; t_2 = …

x = 0 = 0,10·cos ϕ ⇒ cos ϕ = 0 ⇒ ϕ = (2n+1)π/2 = 2,5π·t + 2π/3 ⇒ t = [(2n+1)/2 – 2/3]/2,5

t_0 = -0,0666 s; t_1 = 0,333 s; t_2 = 0,7333 s …

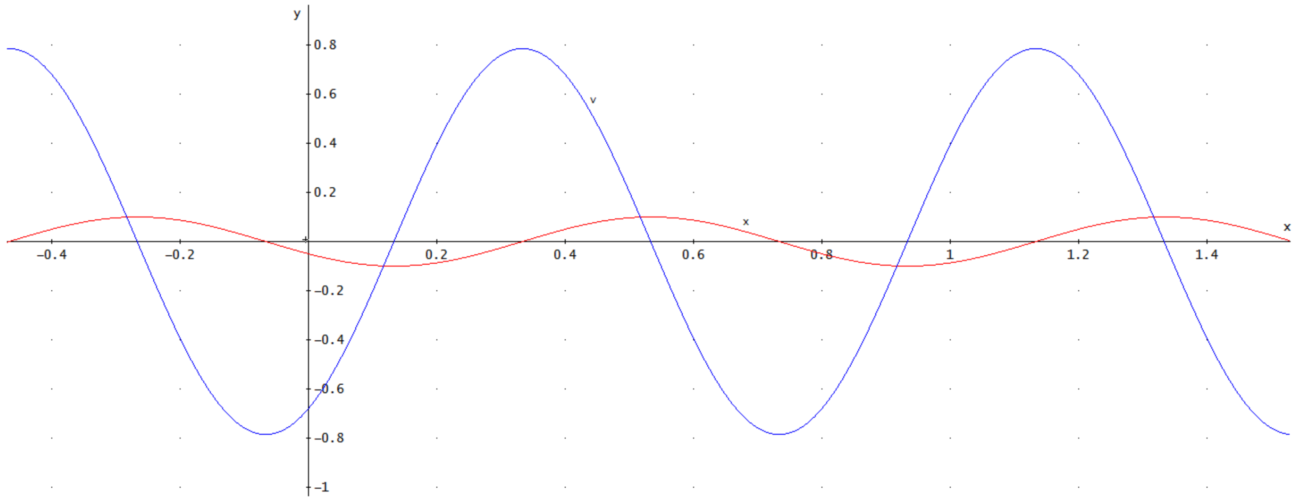
x = + A = 0,10 = 0,10·cos ϕ ⇒ cos ϕ = +1 ⇒ ϕ = 2nπ = 2,5π·t + 2π/3 ⇒ t = [2n – 2/3]/2,5

t_0 = -0,26666 s; t_1 = 0,5333 s; t_2 = 1,333 s …



Representar la gráfica v/t siendo v = -0,10·2,5π· sen (2,5π·t + 2π/3) = -0,7085· sen (2,5π·t + 2π/3)

$v_{(t=0)}$ = -0,25π·sen (2π/3) = -0,68 m/s



2) Una partícula, de masa 0,500 kg, oscila sobre un muelle y se observa que se encuentra en el punto x = 0,15 m en el tiempo inicial t = 0. Alcanza el desplazamiento máximo de 0,25 m en el tiempo t = 0,300 s. Determina: a) la ecuación del movimiento y dibuja la gráfica posición-tiempo; b) el instante, durante el primer ciclo, en que la masa pasa por el punto x = 0,20 m. [a) x = 0,25·cos (πt – 0,3π); b) 0,1·s; 0,5·s]

Solución:

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0) \quad \Rightarrow \quad v = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0)$$

$$x_{0(t=0)} = +0{,}15\,\text{m} = A\cos\phi_0 \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = \arccos\frac{x_0}{A} = \arccos\frac{0{,}15\,\text{m}}{0{,}25\,\text{m}} = \pm 53{,}13^\circ \times \frac{\pi\,\text{rad}}{180^\circ} = \pm 0{,}3\pi\,\text{rad}$$

$$\left.\begin{cases} v_{0(t=0)} = -A\omega \operatorname{sen}\phi_0 = -A\omega \operatorname{sen}(-0{,}3\pi) > 0 \\ v_{0(t=0)} = -A\omega \operatorname{sen}\phi_0 = -A\omega \operatorname{sen}(0{,}3\pi) < 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \phi_0 = -0{,}3\pi\,\text{rad} = 1{,}7\pi\,\text{rad}$$

$$\left.\begin{cases} x_{(t=0,3)} = +A = 0{,}25\,\text{m} \\ \cos(\omega t + \phi_0) = +1 \end{cases}\right\} \quad \omega t + \phi_0 = 2n\pi \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi - \phi_0}{t} = \frac{2\pi - 1{,}7\pi}{0{,}3\,\text{s}} = \pi\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\,\text{rad}}{\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 2\,\text{s}$$

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0) = 0{,}25\cos(\pi t - 0{,}3\pi) = 0{,}25\cos(\pi t + 1{,}7\pi)$$

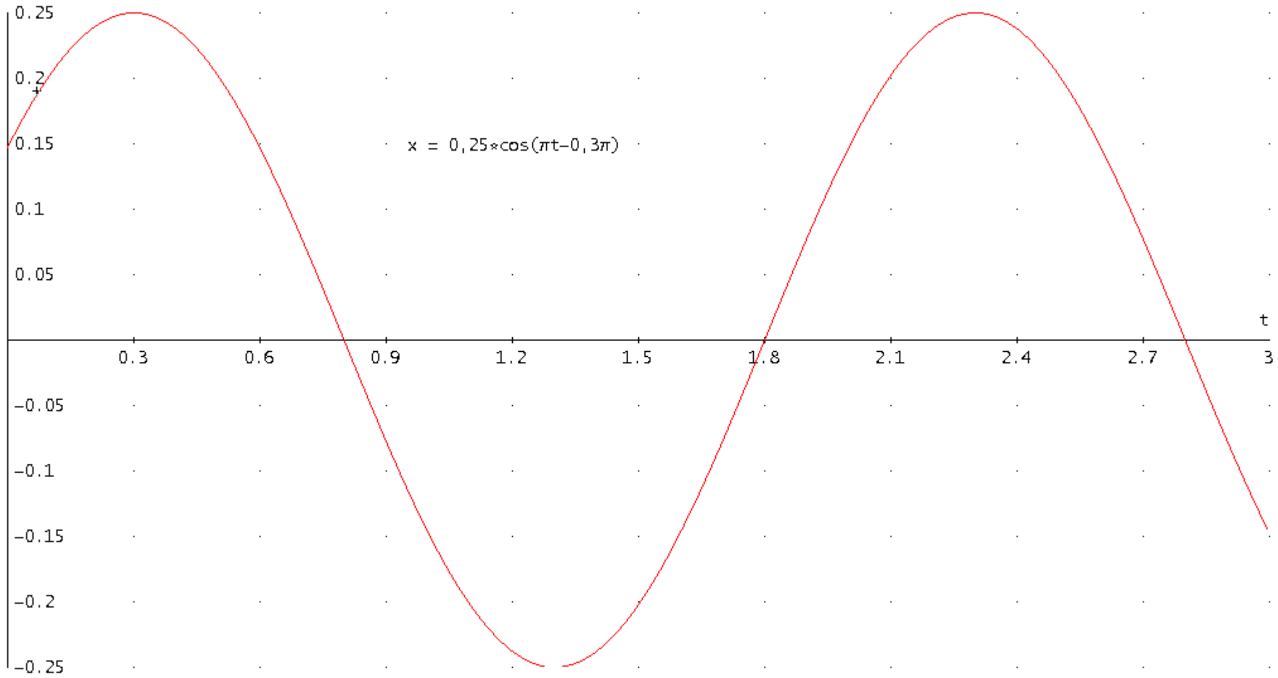
Los valores máximos y mínimos del movimiento oscilatorio se alcanzan al cabo de los siguientes tiempos:

$$x = 0{,}25\cos(\pi t - 0{,}3\pi) = 0{,}25\cos(\pi t + 1{,}7\pi)$$

$$x_{\text{máximo}} = +0{,}25 \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{cases} \cos(\pi t - 0{,}3\pi) = +1 \\ (\pi t - 0{,}3\pi) = 2n\pi \end{cases}\right\} \{t = 2n + 0{,}3\} \begin{cases} t_0 = 0{,}3\,\text{s} \\ t_1 = 2{,}3\,\text{s} \end{cases}$$

$$x_{\text{mínimo}} = -0{,}25 \quad \Rightarrow \begin{cases} \cos(\pi t - 0{,}3\pi) = -1 \\ (\pi t - 0{,}3\pi) = (2n+1)\pi \end{cases} \{t = (2n+1) + 0{,}3\} \begin{cases} t_0 = 1{,}3\,\text{s} \\ t_1 = 3{,}3\,\text{s} \end{cases}$$

$$x_0 = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \cos(\pi t - 0{,}3\pi) = 0 \\ (\pi t - 0{,}3\pi) = (2n+1)\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \left\{ t = \frac{(2n+1)}{2} + 0{,}3 \right\} \begin{cases} t_0 = 0{,}8\,\text{s} \\ t_1 = 1{,}8\,\text{s} \end{cases}$$



Por el punto x = 0,20 m pasa dos veces, antes de alcanzar el valor de la amplitud, antes de los 0,30 s, y un poco más tarde, en el punto simétrico respecto de la amplitud (x = 0,25 m; t = 0,30 s)

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0) = 0{,}25\cos(\pi t - 0{,}3\pi) = 0{,}25\cos(\pi t + 1{,}7\pi)$$

$$0{,}20 = 0{,}25\cos\phi \quad \{\phi = \omega t + \phi_0\}$$

$$\phi = \arccos\frac{0{,}20}{0{,}25} = \arccos 0{,}80 = \pm 36{,}86^{\circ} = \pm 0{,}2\pi \text{ rad} \quad \begin{cases} \phi = -0{,}2\pi \text{ rad} \\ \phi = +1{,}8\pi \text{ rad} \end{cases}$$

$$\phi_{1(x\to +A)} = +1{,}8\pi \text{ rad} = \pi t + 1{,}7\pi \quad \left\{ t = \frac{1{,}8\pi - 1{,}7\pi}{\pi} = 0{,}1\,\text{s} \right.$$

$$\phi_{2(x\to -A)} = +0{,}2\pi \text{ rad} = \pi t - 0{,}3\pi \quad \left\{ t = \frac{0{,}2\pi + 0{,}3\pi}{\pi} = 0{,}5\,\text{s} \right.$$

3) Una partícula de 0,5 kg que describe un movimiento armónico simple de frecuencia $\nu = 5/\pi$ Hz, tiene inicialmente una energía cinética de 0,2 J y una energía potencial de 0,8 J. Calcule: a) la posición y velocidad inicial, así como la amplitud de la oscilación y la velocidad máxima. b) Haga un análisis de las transformaciones de energía que tienen lugar en un ciclo completo. c) ¿Cuál sería el desplazamiento en el instante en que las energías cinética y potencial son iguales?. [a) $x_0 = \pm 0{,}17888$ m; $v_0 = \pm 0{,}8944$ m/s; A = 0,20 m; $v_{máxima} = 2{,}0$ m/s; c) x = 0,1414 m]

Solución:

$$E_{p(0)} = 0{,}8\,\text{J} = \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2$$

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi\cdot\tfrac{5}{\pi}\tfrac{\text{rad}}{\text{s}} = 10\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}}$$

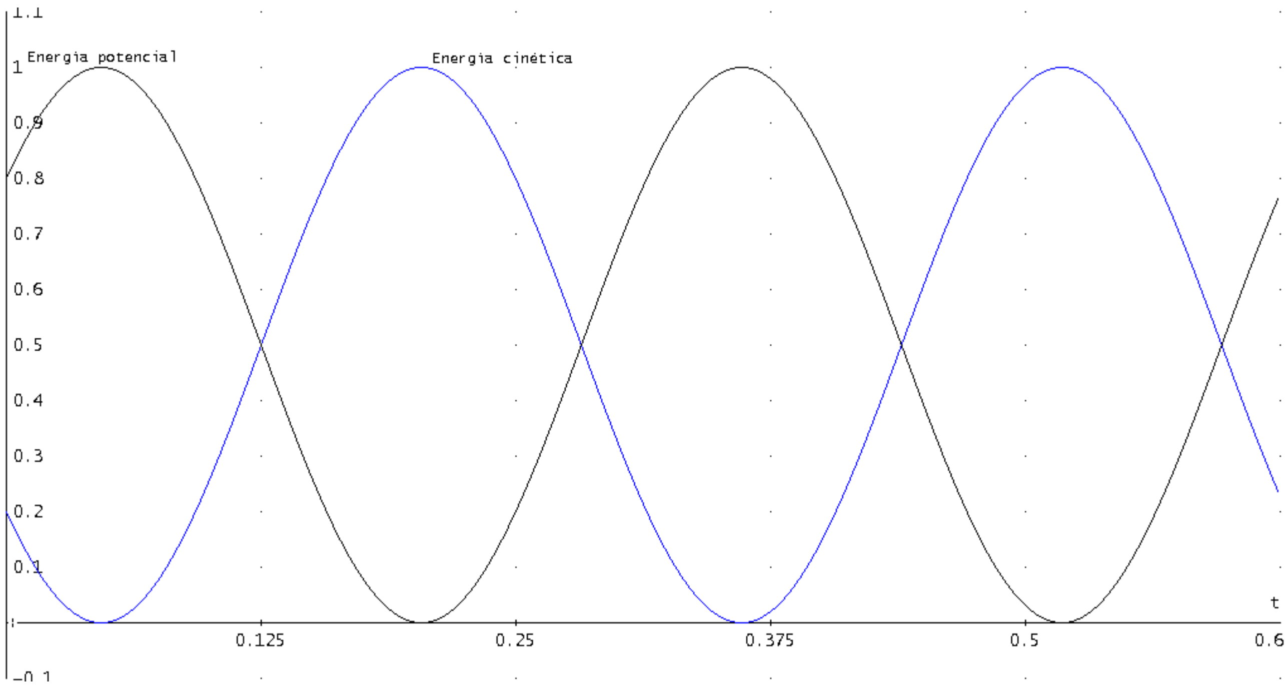
$$x_0 = \sqrt{\frac{2E_{p(0)}}{m\omega^2}} = \sqrt{\frac{2\times 0{,}8\,\text{J}}{0{,}5\,\text{kg}\times\left(10\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2}} = \pm 0{,}17888\,\text{m}$$

$$E_{c(0)} = 0{,}2\,\text{J} = \tfrac{1}{2}mv_0^2 \quad\Rightarrow\quad v_0 = \sqrt{\frac{2E_{c(0)}}{m}} = \pm 0{,}8944\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$E_{total} = E_c + E_p = 0{,}2\,\text{J} + 0{,}8\,\text{J} = 1{,}0\,\text{J} = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 \quad\Rightarrow\quad A = \sqrt{\frac{2E_t}{m\omega^2}} = \pm 0{,}20\,\text{m}$$

$$\left.\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \phi_0) \\ v = -\omega A\,\text{sen}(\omega t + \phi_0) \end{cases}\right\} \quad v_{máx} = -\omega A = -10\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}}\times 0{,}20\,\text{m} = -2{,}0\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$E_c = E_{p(m)} = 0{,}5\,\text{J} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \quad\Rightarrow\quad x = \sqrt{\frac{2E_p}{m\omega^2}} = \pm 0{,}1414\,\text{m}$$



4) Un cuerpo realiza un movimiento vibratorio armónico simple. a) Escriba la ecuación del movimiento si la aceleración máxima es $5\cdot\pi^2$ cm/s^2, el período de las oscilaciones 2 s y la elongación del cuerpo al iniciarse el movimiento 2,5 cm y siendo la velocidad negativa. b) Represente gráficamente la elongación y la velocidad en función del tiempo y comente la gráfica. [a) x = 5·cos (π·t + π/3) cm; b) v = -5·π·sen (π·t + π/3) cm/s]

Solución:

$$x = A\cos(\omega t+\phi_0) \;\Rightarrow\; v = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t+\phi_0) \;\Rightarrow\; a = -A\omega^2\cos(\omega t+\phi_0) = -\omega^2 x$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\,s} = \pi\,\tfrac{rad}{s}$$

$$a_{máx} = 5\pi^2\,\tfrac{cm}{s^2} = -\omega^2 A \;\Rightarrow\; A = \frac{a_{máx}}{\omega^2} = \frac{5\pi^2\,\tfrac{cm}{s^2}}{\left(\pi\,\tfrac{rad}{s}\right)^2} = 5\,cm$$

$$x_{0(t=0)} = 2{,}5\,cm = A\cos\phi_0 \;\Rightarrow\; \phi_0 = \arccos\frac{x_{0(t=0)}}{A} = \arccos\frac{2{,}5\,cm}{5\,cm} = \pm 60^o = 60^o\times\frac{\pi\,rad}{180^o} = \pm\tfrac{1}{3}\pi$$

$$v_{0(t=0)} = -A\omega\,\mathrm{sen}(\phi_0) = -A\omega\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) < 0$$

$$x = 0{,}05\cdot\cos\left(\pi t+\tfrac{1}{3}\pi\right) \;\Rightarrow\; v = -0{,}05\cdot\pi\cdot\mathrm{sen}\left(\pi t+\tfrac{1}{3}\pi\right)$$

$$x = 0{,}05\cdot\cos\left(\pi t+\tfrac{1}{3}\pi\right) \quad \left\{\omega = \pi\,\tfrac{rad}{s}\right\} \quad T = 2\,s$$

$$x_{máximo} = +0{,}05 \;\Rightarrow\; \begin{Bmatrix}\cos\left(\pi t+\tfrac{1}{3}\pi\right) = +1\\ \pi t+\tfrac{1}{3}\pi = 2n\pi\end{Bmatrix} \quad t = 2n-\tfrac{1}{3}\begin{cases}t_1 = \tfrac{5}{3}\,s\\ t_2 = \tfrac{11}{3}\,s = \left(\tfrac{5}{3}+2\right)s\end{cases}$$

$$x_{mínimo} = -0{,}05 \;\Rightarrow\; \begin{Bmatrix}\cos\left(\pi t+\tfrac{1}{3}\pi\right) = -1\\ \pi t+\tfrac{1}{3}\pi = (2n+1)\pi\end{Bmatrix} \quad t = 2n+1-\tfrac{1}{3}\begin{cases}t_0 = \tfrac{2}{3}\,s\\ t_1 = \tfrac{8}{3}\,s = \left(\tfrac{2}{3}+2\right)s\end{cases}$$

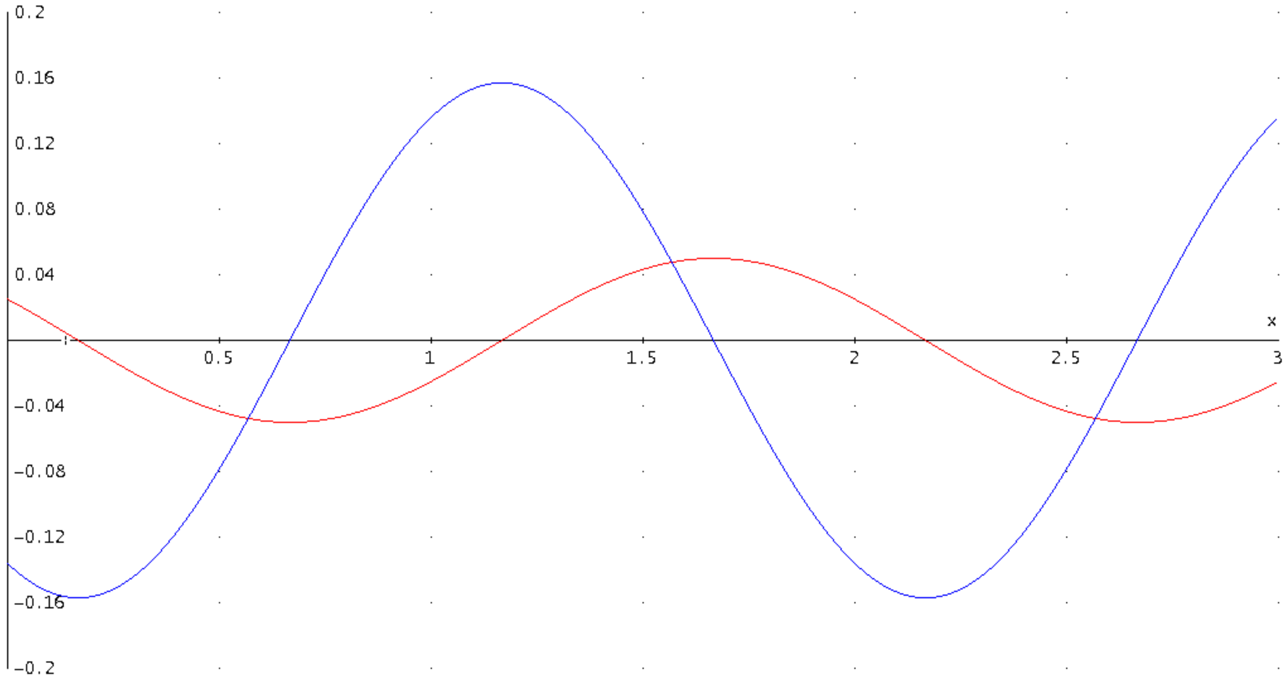
$$x = 0 = x_0 \;\Rightarrow\; \begin{Bmatrix}\cos\left(\pi t+\tfrac{1}{3}\pi\right) = 0\\ \pi t+\tfrac{1}{3}\pi = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}\end{Bmatrix} \quad t = \frac{2n+1}{2}-\tfrac{1}{3}\begin{cases}t_0 = \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{6}\,s\\ t_1 = \tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{3} = \tfrac{7}{6} = \left(\tfrac{1}{6}+1\right)s\end{cases}$$

$$v = -0,05\cdot\pi\cdot \mathrm{sen}\left(\pi t + \tfrac{1}{3}\pi\right) \quad \left\{\omega = \pi \tfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right\} \quad T = 2\,\mathrm{s}$$

$$v = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{matrix} \mathrm{sen}\left(\pi t + \tfrac{1}{3}\pi\right) = 0 \\ \pi t + \tfrac{1}{3}\pi = n\pi \end{matrix}\right\} \quad t = n - \tfrac{1}{3}\left\{\begin{matrix} t_1 = \tfrac{2}{3}\,\mathrm{s} \\ t_2 = \tfrac{5}{3} = \left(\tfrac{2}{3}+1\right)\mathrm{s} \end{matrix}\right.$$

$$v_{máx} = +0,05\pi \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{matrix} \mathrm{sen}\left(\pi t + \tfrac{1}{3}\pi\right) = -1 \\ \pi t + \tfrac{1}{3}\pi = \left(2n + \dfrac{3}{2}\right)\pi \end{matrix}\right\} \quad t = 2n + \frac{3}{2} - \tfrac{1}{3}\left\{\begin{matrix} t_0 = \tfrac{7}{6}\,\mathrm{s} \\ t_1 = \left(2+\tfrac{7}{6}\right)\mathrm{s} \end{matrix}\right.$$

$$v_{mín} = -0,05\pi \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{matrix} \mathrm{sen}\left(\pi t + \tfrac{1}{3}\pi\right) = +1 \\ \pi t + \tfrac{1}{3}\pi = \left(2n + \dfrac{1}{2}\right)\pi \end{matrix}\right\} \quad t = 2n + \frac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\left\{\begin{matrix} t_0 = \tfrac{1}{6}\,\mathrm{s} \\ t_1 = \left(2+\tfrac{1}{6}\right)\mathrm{s} \end{matrix}\right.$$



5) Una masa de 200 g cuelga de un muelle colocado verticalmente de k = 10 N/m. La masa se estira hacia abajo hasta un punto donde el muelle está a 30 cm de su longitud sin estirar y sin la masa. En esa posición estirada se suelta. Determina: a) la distancia de la posición de equilibrio; b) la amplitud de las oscilaciones; c) la posición de la masa a los 3 s y respecto a la posición de equilibrio; d) la velocidad de la masa a los 3s. [a) Δl = 19,6 cm; b) A = 10,4 cm; c) y = 7,4 cm por encima de la posición de equilibrio; b) v = 51,6 cm/s]

Solución:

Las oscilaciones verticales son movimiento armónico simple. Aunque el muelle empiece a oscilar a 30 cm de alargamiento no significa que esa es su amplitud de la oscilación. Las oscilaciones tienen lugar alrededor de la posición de equilibrio, por lo que empezaremos determinándola:

$\Delta l = mg/k = 0{,}200\ \mathrm{kg}\cdot 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}/10\ \mathrm{N/m} = 0{,}196\ \mathrm{m} = 19{,}6\ \mathrm{cm}$

El muelle se ha estirado 30 cm pero la posición de equilibrio del muelle con la masa colgada está a 19,6 cm, luego la amplitud de las oscilaciones tiene un valor de: A = 30 cm – 19,6 cm = 10,4 cm.

La posición de la masa se determina por la ecuación: $y(t) = A\cdot\cos(\omega\cdot t + \phi_0)$.

Posición inicial t = 0: $y_0 = - A = A\cdot\cos\phi_0 \Rightarrow \cos\phi_0 = -1 \Rightarrow \phi_0 = \pi$ rad.

$\omega = (k/m)^{½} = (10\ N/m/0{,}200\ kg)^{½} = 7{,}071$ rad/s.

$y(t) = A\cdot\cos(\omega\cdot t + \phi_0) = 0{,}104\ m\cdot\cos(7{,}07\ rad/s\cdot 3\ s + \pi\ rad) = 0{,}07407\ m = 7{,}407\ cm$

La masa está a 7,4 cm por encima de la posición de equilibrio o a 12,2 cm por debajo del extremo original del muelle. Su velocidad en ese instante es: $v = -\omega\cdot A\cdot sen(\omega\cdot t + \phi_0) = 52$ cm/s

$v = -\omega\cdot A\cdot sen(\omega\cdot t + \phi_0) = -7{,}071\ rad/s\ \cdot 0{,}104\ m\cdot sen(7{,}07\ rad/s\cdot 3\ s + \pi\ rad) = 0{,}516\ m/s = 51{,}6\ cm/s$

6) Un objeto de 0,2 kg, unido al extremo de un resorte, efectúa oscilaciones armónicas de 0,1 π s de período y su energía cinética máxima es de 0,5 J. a) Escriba la ecuación de movimiento del objeto y determine la constante elástica del resorte. b) Explique cómo cambiarían las características del movimiento si: i) se sustituye el resorte por otro de constante elástica doble; ii) se sustituye el objeto por otro de masa doble. [a) k = 80 N/m; x = 0,1118·cos (20·t); b)]

Solución:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 20\,\tfrac{rad}{s} \quad\Rightarrow\quad k = m\omega^2 = 80\,\tfrac{N}{m}$$

$$\left.\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \phi_0) \\ v = -A\omega\,sen(\omega t + \phi_0) \\ a = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi_0) = -\omega^2 x \end{cases}\right\} \begin{cases} E_c = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right) \\ E_{c(máx)} = \tfrac{1}{2}m\omega^2 A^2 \end{cases}$$

$$A^2 = \frac{E_{c(máx)}}{\tfrac{1}{2}m\omega^2} \quad\Rightarrow\quad A = 0{,}1118\,m = 11{,}18\,cm$$

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0) = 0{,}1118\cos(20t)$$

$$\left\{\begin{matrix} k' = 2k \\ m\omega'^2 = 2m\omega^2 \end{matrix}\right\} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \omega' = \sqrt{2}\omega \\ T' = \tfrac{1}{\sqrt{2}}T \\ a' = -\omega'^2 x = 2a \end{cases}$$

$$\left\{\begin{matrix} m' = 2m \\ m'\omega'^2 = m\omega^2 \\ 2m\omega'^2 = m\omega^2 \end{matrix}\right\} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \omega' = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\omega \\ T' = \sqrt{2}\cdot T \\ a' = -\omega'^2 x = \tfrac{1}{2}a \end{cases}$$

7) a) ¿Qué características debe tener una fuerza para que al actuar sobre un cuerpo le produzca un movimiento armónico simple?. b) Represente gráficamente el movimiento armónico simple de una partícula dado por: y = 5 cos (10 t + π/2) (S I) y otro movimiento armónico que tenga una amplitud doble y una frecuencia mitad que el anterior.

Solución:

$$\begin{Bmatrix} y = 5 \cdot \cos\left(10t + \frac{1}{2}\pi\right) \\ v = -50 \cdot \operatorname{sen}\left(10t + \frac{1}{2}\pi\right) \end{Bmatrix} \quad \left\{\omega = 10\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{2\pi}{T}\right\} \quad T = \frac{2\pi}{10} = 0,628\,\text{s}$$

$$y_{0(t=0)} = 5 \cdot \cos\tfrac{1}{2}\pi = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{0(t=0)} = -50 \cdot \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\pi = -50\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$y_{\left(t=\frac{1}{4}T\right)} = 5 \cdot \cos\left(10\tfrac{1}{4}\tfrac{2\pi}{10} + \tfrac{1}{2}\pi\right) = 5 \cdot \cos(\pi) = -5\,\text{m} \quad \Rightarrow \quad v_{\left(t=\frac{1}{4}T\right)} = -50 \cdot \operatorname{sen}\pi = 0\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$y_{\left(t=\frac{1}{2}T\right)} = 5 \cdot \cos\left(10\tfrac{1}{2}\tfrac{2\pi}{10} + \tfrac{1}{2}\pi\right) = 5 \cdot \cos\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = 0\,\text{m} \quad \Rightarrow \quad v_{\left(t=\frac{1}{2}T\right)} = -50 \cdot \operatorname{sen}\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = +50\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$y_{\left(t=\frac{3}{4}T\right)} = 5 \cdot \cos\left(10\tfrac{3}{4}\tfrac{2\pi}{10} + \tfrac{1}{2}\pi\right) = 5 \cdot \cos(2\pi) = +5\,\text{m} \quad \Rightarrow \quad v_{\left(t=\frac{3}{4}T\right)} = -50 \cdot \operatorname{sen}(2\pi) = 0\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$y_{(t=T)} = 5 \cdot \cos\left(10\tfrac{2\pi}{10} + \tfrac{1}{2}\pi\right) = 5 \cdot \cos(2,5\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{\left(t=\frac{3}{4}T\right)} = -50 \cdot \operatorname{sen}(2,5\pi) = -50\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\begin{Bmatrix} y' = 10 \cdot \cos\left(5t + \frac{1}{2}\pi\right) \\ v = -50 \cdot \operatorname{sen}\left(5t + \frac{1}{2}\pi\right) \end{Bmatrix} \quad \left\{\omega'' = 5\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{2\pi}{T'}\right\} \quad T' = \frac{2\pi}{5} = 2T = 2 \times 0,628\,\text{s}$$

$$y'_{0(t=0)} = 10 \cdot \cos\tfrac{1}{2}\pi = 0 \quad \Rightarrow \quad v'_{0(t=0)} = -50 \cdot \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\pi = -50\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$y'_{\left(t=\frac{1}{4}T\right)} = 10 \cdot \cos\left(5\tfrac{1}{4}\tfrac{2\pi}{5} + \tfrac{1}{2}\pi\right) = 10 \cdot \cos(\pi) = -10\,\text{m} \quad \Rightarrow \quad v'_{\left(t=\frac{1}{4}T\right)} = -50 \cdot \operatorname{sen}\pi = 0\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$y'_{\left(t=\frac{1}{2}T\right)} = 10 \cdot \cos\left(5\tfrac{1}{2}\tfrac{2\pi}{5} + \tfrac{1}{2}\pi\right) = 10 \cdot \cos\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = 0\,\text{m} \quad \Rightarrow \quad v'_{\left(t=\frac{1}{2}T\right)} = -50 \cdot \operatorname{sen}\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = +50\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$y'_{\left(t=\frac{3}{4}T\right)} = 10 \cdot \cos\left(5\tfrac{3}{4}\tfrac{2\pi}{5} + \tfrac{1}{2}\pi\right) = 10 \cdot \cos(2\pi) = +10\,\text{m} \quad \Rightarrow \quad v'_{\left(t=\frac{3}{4}T\right)} = -50 \cdot \operatorname{sen}(2\pi) = 0\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$y'_{(t=T)} = 10 \cdot \cos\left(5\tfrac{2\pi}{5} + \tfrac{1}{2}\pi\right) = 10 \cdot \cos(2,5\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad v'_{\left(t=\frac{3}{4}T\right)} = -50 \cdot \operatorname{sen}(2,5\pi) = -50\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

8) Una partícula de 50 g vibra a lo largo del eje X, alejándose como máximo 10 cm a un lado y a otro de la posición de equilibrio (x = 0). El estudio de su movimiento ha revelado que existe una relación sencilla entre la aceleración y la posición que ocupa en cada instante: $a = -16\cdot\pi^2 x$. a) Escriba las expresiones de la posición y de la velocidad de la partícula en función del tiempo, sabiendo que este último se comenzó a medir cuando la partícula pasaba por la posición x = 10 cm. b) Calcule las energías cinética y potencial de la partícula cuando se encuentra a 5 cm de la posición de equilibrio. [a) x = 0,10·cos (4πt); v = -0,4π·sen (4πt); b) E_c = 0,0296 J; E_p = 0,00987 J]

Solución:

$$\left\{x = A\cos(\omega t + \phi_0) \quad \Rightarrow \quad v = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0) \quad \Rightarrow \quad a = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi_0) = -\omega^2 x\right\}$$

$$\begin{Bmatrix} x = A\cos(\omega t + \phi_0) \\ x_0 = A\cos(\phi_0) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_0 = \arccos\dfrac{x_0}{A} = 0^{\circ} \\ a = -\omega^2 x = -16\pi^2 x \quad \Rightarrow \quad \omega = 4\pi \end{Bmatrix}$$

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0) = 0,10\cos(4\pi t)$$

$$v = -0,4\pi \operatorname{sen}(4\pi t)$$

$$E_c = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right) = \tfrac{1}{2} \times 0,050\,\text{kg} \times \left(4\pi\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 \times \left(0,10^2 - 0,05^2\right)\text{m}^2 = 0,0296\,\text{J}$$

$$E_p = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \tfrac{1}{2} \times 0,050\,\text{kg} \times \left(4\pi\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 \times 0,05^2\,\text{m}^2 = 0,00987\,\text{J}$$

9) Una partícula de 0,2 kg describe un movimiento armónico simple a lo largo del eje x, de frecuencia 20 Hz. En el instante inicial la partícula pasa por el origen, moviéndose hacia la derecha, y su velocidad es máxima. En otro instante de la oscilación la energía cinética es 0,2 J y la energía potencial es 0,6 J. a) Escriba la ecuación de movimiento de la partícula y calcule su aceleración máxima. b) Explique, con ayuda de una gráfica, los cambios de energía cinética y de energía potencial durante una oscilación. [a) x = 0,0005·cos (40πt - ½π); $a_{máx}$ = 8 m/s²]

Solución:

$$\left\{x = A\cos(\omega t + \phi_0) \;\Rightarrow\; v = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0) \;\Rightarrow\; a = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi_0) = -\omega^2 x\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = A\cos(\omega t + \phi_0) \\ x_0 = A\cos(\phi_0) \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l} \phi_0 = \arccos\dfrac{x_0}{A} = \pm\dfrac{1}{2}\pi \\ v_0 = -A\omega \operatorname{sen}(\phi_0) > 0 \\ \operatorname{sen}(\phi_0) = -1 \;\Rightarrow\; \phi_0 = -\dfrac{1}{2}\pi = \dfrac{3}{2}\pi \end{array}\right.$$

$$E_t = E_c + E_p = \tfrac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right) + \tfrac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

$$A^2 = \frac{E_t}{\tfrac{1}{2}m\omega^2} = \frac{0,8\,\mathrm{J}}{\tfrac{1}{2}\times 0,2\,\mathrm{kg}\times\left(2\pi\cdot 20\,\tfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)^2} \;\Rightarrow\; A = 0,0005066\,\mathrm{m}$$

$$a_{máx} = -\omega^2 A = -8\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

10) Un movimiento armónico simple viene descrito por la ecuación x(t) = A·sen (ωt + δ). a) Escriba la velocidad y la aceleración de la partícula en función del tiempo y explique cómo varían a lo largo de una oscilación. b) Deduzca las expresiones de las energías cinética y potencial en función de la posición y explique sus cambios a lo largo de la oscilación.

11) Un cuerpo realiza un movimiento vibratorio armónico simple. a) Escriba la ecuación del movimiento si la aceleración máxima es 10·π² cm/s², el período de las oscilaciones T = 1·s y la elongación del cuerpo al iniciarse el movimiento 2 cm y la velocidad positiva. b) Represente gráficamente la elongación y la velocidad en función del tiempo y comente la gráfica. [a) x = 2,5·cos (2π·t – 0,20π) cm; b) v = -5·π·sen (2π·t – 0,20π) cm/s]

Solución:

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0) \;\Rightarrow\; v = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0) \Rightarrow\; a = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi_0) = -\omega^2 x$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\,\mathrm{rad}}{1\,\mathrm{s}} = 2\pi\,\tfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

$$a_{máx} = 10\pi^2\,\tfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2} = -\omega^2 A \;\Rightarrow\; A = \frac{a_{máx}}{\omega^2} = \frac{10\pi^2\,\tfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}}{\left(2\pi\,\tfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)^2} = 2,5\,\mathrm{cm}$$

$$x_{0(t=0)} = 2\,\mathrm{cm} = A\cos\phi_0 \;\Rightarrow \phi_0 = \arccos\frac{x_{0(t=0)}}{A} = \arccos\frac{2\,\mathrm{cm}}{2,5\,\mathrm{cm}} = \pm 36,87^{\circ}\times\frac{\pi\,\mathrm{rad}}{180^{\circ}} = \pm 0,20\pi$$

$$v_{0(t=0)} = -A\omega \operatorname{sen}(\phi_0) = -A\omega \operatorname{sen}(-0,20\pi) > 0$$

$$x = 2,5\cdot\cos(2\pi t - 0,20\pi)\,\mathrm{cm} = 2,5\cdot\cos(2\pi t + 1,80\pi)\,\mathrm{cm}$$

$$v = -2,5\cdot 2\pi\cdot \operatorname{sen}(2\pi t + 1,80\pi)\,\tfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} = -5\pi\cdot \operatorname{sen}(2\pi t + 1,80\pi)\,\tfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$$

$$x = 2,5 \cdot \cos\left(2\pi t - 0,20\pi\right)\text{cm} = 2,5 \cdot \cos\left(2\pi t + 1,80\pi\right)\text{cm} \quad \left\{\omega = 2\pi \tfrac{\text{rad}}{\text{s}}\right\} \quad T = 1\,\text{s}$$

$$x_{\text{máximo}} = +2,5 \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \cos\left(2\pi t - 0,20\pi\right) = +1 \\ 2\pi t - 0,20\pi = 2n\pi \end{Bmatrix} \quad t = \frac{2n\pi + 0,2\pi}{2\pi} \begin{cases} t_0 = 0,1\,\text{s} \\ t_1 = 1,1\,\text{s} \end{cases}$$

$$x_{\text{mínimo}} = -0,05 \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \cos\left(2\pi t - 0,20\pi\right) = -1 \\ 2\pi t - 0,20\pi = \left(2n+1\right)\pi \end{Bmatrix} \quad t = \frac{\left(2n+1\right)\pi + 0,2\pi}{2\pi} \begin{cases} t_0 = 0,6\,\text{s} \\ t_1 = 1,6\,\text{s} \end{cases}$$

$$x = 0 = x_0 \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \cos\left(2\pi t - 0,20\pi\right) = 0 \\ 2\pi t - 0,20\pi = \left(2n+1\right)\dfrac{\pi}{2} \end{Bmatrix} \quad t = \frac{\left(2n+1\right)\frac{\pi}{2} + 0,2\pi}{2\pi} - \tfrac{1}{3} \begin{cases} t_0 = 0,35\,\text{s} \\ t_1 = 0,85\,\text{s} \end{cases}$$

$$v = -5\pi \cdot \text{sen}\left(2\pi t - 0,20\pi\right)\tfrac{\text{cm}}{\text{s}} = -5\pi \cdot \text{sen}\left(2\pi t + 1,80\pi\right)\tfrac{\text{cm}}{\text{s}} \quad \left\{\omega = \pi \tfrac{\text{rad}}{\text{s}}\right\} \quad T = 2\,\text{s}$$

$$v = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \text{sen}\left(2\pi t - 0,20\pi\right) = 0 \\ 2\pi t - 0,20\pi = n\pi \end{Bmatrix} \quad t = \frac{n\pi + 0,2\pi}{2\pi} \begin{cases} t_0 = 0,1\,\text{s} \\ t_1 = 0,6\,\text{s} \end{cases}$$

$$v_{\text{máx}} = +5\pi \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \text{sen}\left(2\pi t - 0,20\pi\right) = -1 \\ 2\pi t - 0,20\pi = \left(2n + \dfrac{3}{2}\right)\pi \end{Bmatrix} \quad t = \frac{\left(2n+1,5\right)\pi + 0,2\pi}{2\pi} \begin{cases} t_0 = 0,85\,\text{s} \\ t_1 = 1,85\,\text{s} \end{cases}$$

$$v_{\text{mín}} = -5\pi \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \text{sen}\left(2\pi t - 0,20\pi\right) = +1 \\ 2\pi t - 0,20\pi = \left(2n + \dfrac{1}{2}\right)\pi \end{Bmatrix} \quad t = \frac{\left(2n+0,5\right)\pi + 0,2\pi}{2\pi} \begin{cases} t_0 = 0,35\,\text{s} \\ t_1 = 1,35\,\text{s} \end{cases}$$

12) a) Describa el movimiento armónico simple y comente sus características cinemáticas y dinámicas. b) Una masa oscila verticalmente suspendida de un muelle. Describa los tipos de energía que intervienen y sus respectivas transformaciones.

13) Un cuerpo, situado sobre una superficie horizontal lisa y unido al extremo de un resorte, efectúa un movimiento armónico simple y los valores máximos de su velocidad y aceleración son 0,6 m/s y 7,2 m/s^2 respectivamente. a) Determine el período y la amplitud del movimiento. b) Razone cómo variaría la energía mecánica del cuerpo si se duplicara: i) la frecuencia; ii) la aceleración máxima. [a) T = 0,5236 s; A = 0,05 m; b) i) E' = 4·E_t]

Solución:

$$\left\{x = A\cos\left(\omega t + \phi_0\right) \quad \Rightarrow \quad v = -A\omega\,\text{sen}\left(\omega t + \phi_0\right) \quad \Rightarrow \quad a = -A\omega^2\cos\left(\omega t + \phi_0\right) = -\omega^2 x\right\}$$

$$\begin{Bmatrix} v_{\text{máx}} = A\omega = 0,6\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} \\ a_{\text{máx}} = \omega^2 A = 7,2\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{Bmatrix} \omega = \frac{v_{\text{máx}}}{A}$$

$$a_{\text{máx}} = \omega^2 A = \omega^2 A = \frac{v_{\text{máx}}^2}{A^2} \cdot A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{v_{\text{máx}}^2}{a_{\text{máx}}} = \frac{\left(0,6\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{7,2\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0,05\,\text{m}$$

$$\omega = \frac{v_{\text{máx}}}{A} = \frac{0,6\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}}{0,05\,\text{m}} = 12\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,5236\,\text{s}$$

$$E_t = E_c + E_p = \tfrac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right) + \tfrac{1}{2}m\omega^2x^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2A^2$$

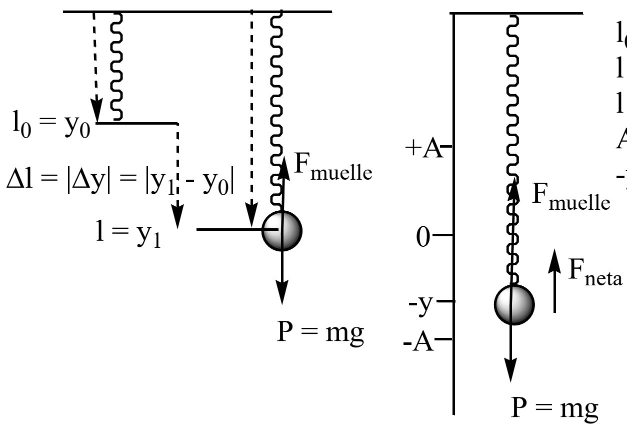
$$\omega' = 2\omega \;\Rightarrow\; E'_t = \tfrac{1}{2}m\omega'^2A^2 = \tfrac{1}{2}m(2\omega)^2A^2 = 4\cdot\tfrac{1}{2}m\omega^2A^2 = 4E_t$$

$$a'_{máx} = 2a_{máx} \quad \left\{a_{máx} = \omega^2A = 7{,}2\,\tfrac{m}{s^2} \;\Rightarrow\; A = \frac{a_{máx}}{\omega^2}\right\} \quad A' = \frac{a'_{máx}}{\omega^2} = 2\frac{a_{máx}}{\omega^2} = 2A$$

$$E'_t = \tfrac{1}{2}m\omega^2A'^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2(2A)^2 = 4\cdot\tfrac{1}{2}m\omega^2A^2 = 4E_t$$

14) Un bloque de 0,5 kg cuelga del extremo inferior de un resorte de constante elástica k = 72 N/m. Al desplazar el bloque verticalmente hacia abajo de su posición de equilibrio comienza a oscilar, pasando por el punto de equilibrio con una velocidad de 6 m/s. a) Razone los cambios energéticos que se producen en el proceso. b) Determine la amplitud y la frecuencia de la oscilación. [a) La E_c oscila entre 0 y 9 J; la E_p oscila entre 2,45 J y 11,45 J; la E_t = 11,45 J; b) A = 0,5 m; ω = 12 rad/s]

Solución:



$l_0 = y_0$ es la longitud del muelle sin estirar
$l = y_1$ es la longitud del muelle con la masa en reposo
$l = y_1$ define la posición de equilibrio y = 0
A es la amplitud de las oscilaciones alrededor de y = 0
-y es la posición de la masa en un instante

La energía en una superficie vertical: el movimiento es también armónico, de la misma pulsación $\omega = (k/m)^{½}$, pero con la posición de equilibrio está desplazada respecto del caso horizontal, está alargada en: Δl = mg/k. Por lo que respecto de la energía es de esperar que en vertical haya que añadirle un término de energía potencial correspondiente al alargamiento $\Delta l = l - l_0$:

$$\begin{cases} E_p = E_{p(m)} + E_{p(g)} = \tfrac{1}{2}kx^2 - mgy = \tfrac{1}{2}k\left[\Delta l + y\right]^2 - mgy = \tfrac{1}{2}k\left[\Delta l^2 + y^2 + 2y\Delta l\right] - mgy \\ E_p = \tfrac{1}{2}k\Delta l^2 + \tfrac{1}{2}ky^2 + ky\Delta l - mgy = \tfrac{1}{2}k\Delta l^2 + \tfrac{1}{2}ky^2 + mgy - mgy \\ E_p = E_{p(m)} + E_{p(g)} = \tfrac{1}{2}k\Delta l^2 + \tfrac{1}{2}ky^2 \end{cases}$$

$$E_c = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - y^2\right) = \tfrac{1}{2}k\left(A^2 - y^2\right)$$

$$E_{total} = E_c + E_p = \tfrac{1}{2}k\left(A^2 - y^2\right) + \tfrac{1}{2}k\Delta l^2 + \tfrac{1}{2}ky^2 = \tfrac{1}{2}kA^2 + \tfrac{1}{2}k\Delta l^2$$

$$E_{c(máx)} = \tfrac{1}{2}mv^2_{máx} = \tfrac{1}{2}m\omega^2A^2 = \tfrac{1}{2}kA^2$$

$$E_{c(máx)} = \tfrac{1}{2}mv^2_{máx} = \tfrac{1}{2}\times 0{,}5\,kg\times\left(6\,\tfrac{m}{s}\right)^2 = 9\,J \;\Rightarrow\; A = \sqrt{\frac{2\cdot E_{c(máx)}}{k}} = \sqrt{\frac{2\times 9\,J}{72\,\frac{N}{m}}} = 0{,}5\,m$$

ω^2 = k/m = 72/0,5; ω = 144 rad/s; **frecuencia = 1,90 Hz**

Δl = (l – l_0) = mg/k = 0,5 kg·9,8 m/s²/72 N/m = 0,068 m

La energía total: $E_{total} = ½·k·A^2 + ½·k·\Delta l^2 = 9\ J + 2{,}45\ J = 11{,}45\ J$